Aufgabe U 21 (geodätische Distanz, geodätische Merkmale, Wasserscheiden-Transformation)

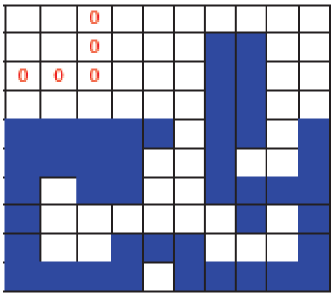
(a) Die geodätische Distanz $d_A(p, q)$ zwischen 2 Bildpunkten p und q in der Bildpunkt-Teilmenge $A (p, q \in A)$ ist die minimale Länge eines Pfades, der p und q verbindet (bzgl. der 8-Nachbarschaft) und ganz in A enthalten ist. (Wenn p und q in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von A liegen, wird $d_A(p, q) = \infty$ gesetzt.) Die Menge A wird als geodätische Maske bezeichnet. Die Pfade minimaler Länge in A heißen geodätische Pfade.

Man zeige: Auf zusammenhängenden Mengen A ist d_A eine Metrik.

(b) Die geodätische Distanz zwischen einem Bildpunkt $p \in A$ und einer Teilmenge ("Markermenge") $M \subseteq A$ ist def. als

$$d_A(p, M) = min\{d_A(p, m) \mid m \in M\}$$

Man bestimme für alle Pixel der folgenden geodätischen Maske A (nicht-schraffierter Bereich) die geodätische Distanz zur mit "0" markierten Menge.



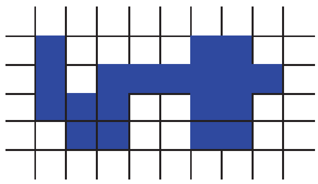
(c) Sei A eine Punktmenge. Die geodätische Länge $L(A)$ ist die Länge des längsten geodätischen Weges, der in A enthalten ist. Die Ausbreitungsfunktion P_A auf A ist def. als

$$P_A(x) = max\{d_A(x, y) \mid y \in A\},$$

also als die maximale Länge eines von x ausgehenden geodätischen Weges in A. Die geodätischen Endpunkte von A sind die lokalen Maxima der Ausbreitungsfunktion von A, das geodätische Zentrum von A das lokale Minimum seiner Ausbreitungsfunktion. (Beachte: Im Gegensatz zum Schwerpunkt gehört das geodätische Zentrum auch bei nichtkonvexem A stets zu A.) Der geodätische Radius ist der Wert der Ausbreitungsfunktion am geodätischen Zentrum. Der geodätische Formfaktor von A ist

$$\frac{\pi * L^2(A)}{4 * Flaeche(A)}$$

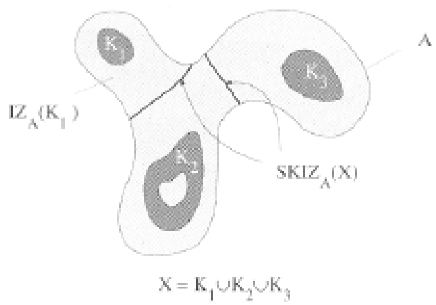
Man bestimme diese Merkmale an der folgenden Menge A.



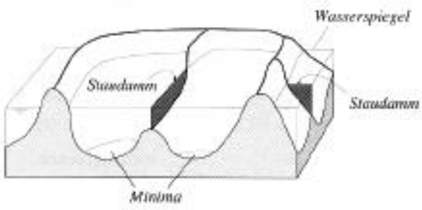
(d) Sei X eine Menge mit den Zusammenhangskomponenten $K_i, X \subseteq A$. Die geodätische Einflusszone (influence zone) $IZ_A(K_i)$ einer Zusammenhangskomponente von X in A ist die Menge aller Punkte von A, deren geodätische Distanz zu K_i kleiner als ihre geodätische Distanz zu jeder anderen Komponente von X ist:

$$IZ_A(K_i) = \{p \in A \mid \forall j \neq i : d_A(p, K_i) < d_A(p, K_j)\}.$$

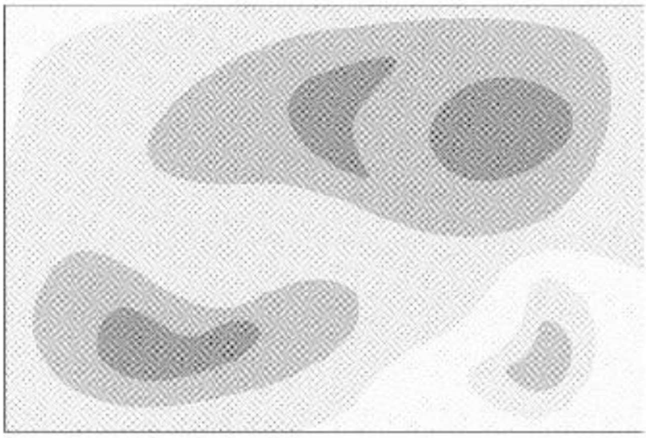
Die Grenzen der Einflusszonen bilden das geodätische Skelett durch Einflusszonen (SKIZ).



Die Wasserscheidentransformation (watershed transform) eines Grauwertbildes B verläuft anschaulich so, dass das "Grauwertgebirge" B von den lokalen Minima aus "geflutet" wird. An den Stellen, wo in diesem Flutungsprozess 2 Wasserbecken (catchment basins) zusammenstoßen, werden 1 Pixel-dünne Dämme errichtet.



Präziser: Beginnend mit der minimalen vorkommenden Graustufe h_{min} durchläuft h alle Graustufen in aufsteigender Folge. $X_{h_{min}}$ hat als Komponenten die lokalen Minima von B mit Wert h_{min}. X_{h+1} besteht aus den geodätischen Einflusszonen der Komponenten von X_h in der Menge aller Bildpunkte mit Graustufe $\leq h+1$, vereinigt mit denjenigen Bereichen mit Graustufe $h+1$ welche keine Komponenten von X_h einschließen (neu hinzukommende lokale Minima auf Höhe $h+1$). Die Grenzen zwischen den Einflusszonen, die nach maximaler Überflutung ($X_{h_{max}}$) entstanden sind, bilden die Segmentierung von B durch Wasserscheiden (watershed segmentation). (Präziser Pseudocode eines effizienten Algorithmus bei Soille 1998, S. 247ff.). Man skizziere dieses Verfahren in folgendem Grauwertbild:



Lösung U21

a) Geodetische Distanz $d_A(p,q)$ = min. Länge eines p und q verbindenden Pfades (bzgl. 8-Nachbarschaft), der ganz in A liegt.

Metrik-Eigenschaften:

- positiv definit:
  $d_A(p,q) \geq 0$
  $d_A(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ (Pfadlänge 0)
- symmetrisch : $d_A(p,q) = d_A(q,p)$ klar.
- Dreiecksangleichung:

Es muss gelten: $d_A(p,r) \leq d_A(p,q) + d_A(q,r)$

Pfad von p über q nach r mit Länge $d_A(p,q) + d_A(q,r)$ gehört zu dem Pfaden, über die in der Def. Von $d_A(p,r)$ das Minimum gebildet wird $\rightarrow$ Behauptung.

b) Für Menge M:

$d_A(p, M) = min\{d_A(p,m) \mid m \in M\}$.

Distanz zur mit "0" markierten Teilmenge :

2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	1	2	3			6	7
0	0	0	1	2	3			7	7
1	1	1	1	2	3			8	8
					3			9	
				4	4		10	10	
	8			5	5				
	8	7	6	6	6	6		8	
	8	7				7	7	8	
				∞					

c) Definitionen (wiederholen):

Gehodetische Länge $L(A)$ ist die Länge des längsten geodätischen Weges, der in A enthalten ist

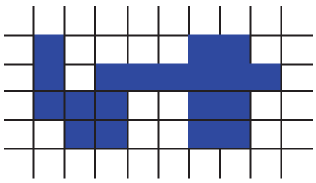
Ausbreitungsfunktion P_A auf A ist def. als $P_A(x) = max\{d_A(x,y) \mid y \in A\}$, also als die maximale Länge eines von x ausgehenden geodätischen Weges in A

Geodät. Endpunkte von A sind die lokalen Maxima der Ausbreitungsfunktion von A

Geodät. Zentrum von A das lokale Minimum seiner Ausbreitungsfunktion

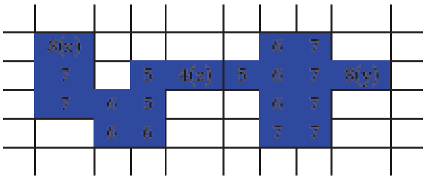
Geodät. Radius ist der Wert der Ausbreitungsfunktion am geodätischen Zentrum

Geodät. Formfaktor Verhältnis von Umfangsquadrat/Außenkreis zur Fläche $\frac{U^2}{4 \cdot \pi \cdot Flaeche}$ / $\frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot Flaeche}$



Lösung:
$L(A) = 8$

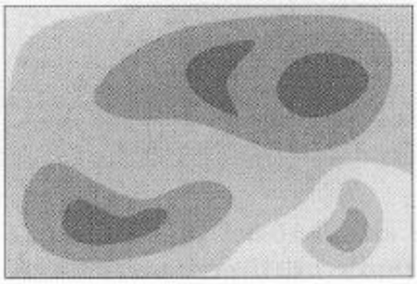
p_A:



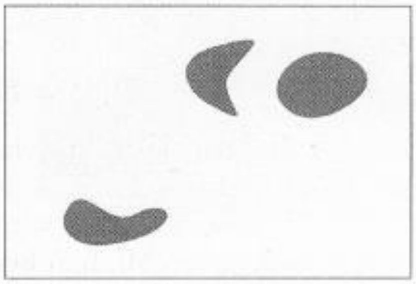
Endpunkt	x, y
Zentrum	z
Radius	$r = 4$
Fläche	$A = 19$

$\Longrightarrow$ Formfaktor = $\frac{\pi \cdot 64}{4 \cdot 19} \approx \frac{16}{19}\pi \approx 2.64$ (Kreis = 1)

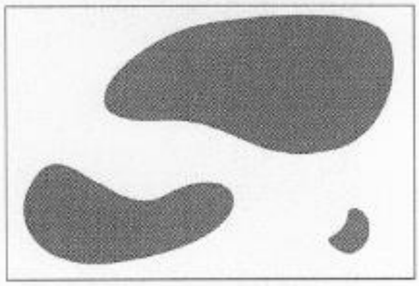
c) Bild



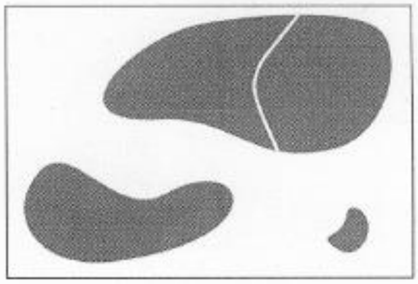
(a) Eingangsbild f.



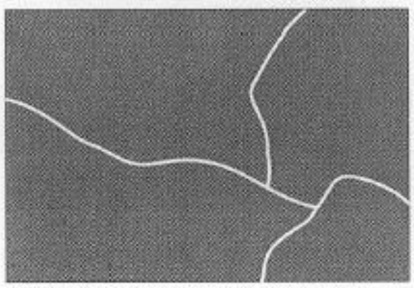
(b) $X_{h_{min}} = T_{h_{min}}(f)$.

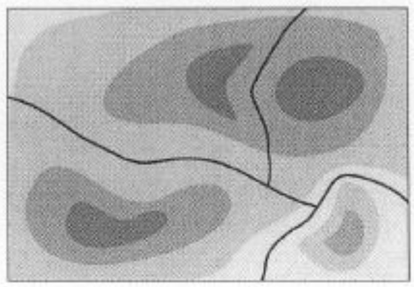


(c) $T_{t \le h_{min+1}}(f)$.



(d) $X_{h_{\min}+1} = \mathrm{RMIN}_{h_{\min}+1}(f) \cup IZ_{T_{t \le h_{\min}+1}(f)}(X_{h_{\min}})$.





Nachteile: - Übersegmentierung (insbesondere bei verrauschten Bildern) → erfordert Vorbearbeitung

Aufgabe U 22 - Wissensrepräsentation

Man erstelle für jeden der folgenden Sachverhalte eine prädikatenlogische Repräsentation.

a) Violette Pilze sind giftig.

b) Ein gelbes Fahrzeug hält an einer Ampel, weil sie auf Rot steht.

c) Eine Seerose hat weiße Blüten mit einem Durchmesser zwischen 5 und 14 cm.

d) Ein Quadrat ist ein Polygon mit 4 gleich langen Seiten und rechten Winkeln an den 4 Ecken. Jede Ecke wird von je 2 der Seiten gebildet.

Lösung U22

Wir unterscheiden Prädikatsymbole von Funktionssymbolen durch Unterstreichung.

Prädikatsymbole Namen für Eigenschaften und Relationen; (n-stellige Prädikate sind eigentlich n-stellige Funktionen); Bsp.: $\underline{\text{bruder\_von}}(a, b)$ (Eigenschaft zuordnend)

Funktionssymbole stehen für Funktionen des jeweiligen Problemkreises; Bsp.: länge(x) (Eigenschaft abfragend)

Folgende generische Prädikate werden benutzt (epistemische Primitive nicht an einen bestimmten Diskursbereich gebunden):

Prädikat	Bedeutung	Bsp.
$\underline{\text{instanz\_von}}(x, \text{Klasse})$	(instance of)	Miezi ist eine Katze
$\underline{\text{hat\_teil}}(x, y)$	y ist Teil von x (part of)	Katze hat ein Herz
$\underline{\text{is\_a}}(\text{Subklasse, Klasse})$	Hierarchien	Katze ist ein Tier
$\underline{\text{agent}}(t, x)$	x führt Tätigkeit t aus	...
$\underline{\text{ort}}(x, o)$	x hat Ort o	...

Weitere Prädikate nach Bedarf.

a)
$\forall\, p: (\underline{\text{instanz\_von}}(p, \text{Pilz}) \land \underline{\text{violett}}(p)) \Rightarrow \underline{\text{giftig}}(p)$
oder: $\underline{\text{hat\_farbe}}(p, \text{violett})$

b)
Instanzen:

das gelbe Fahrzeug	f
die rote Lampe	r
die Ampel	a
das Leuchten	l
das Halten	h
die Position des Fahrzeugs	pf (genauer: Pos. des Haltens!)
die Position der Ampel	pa

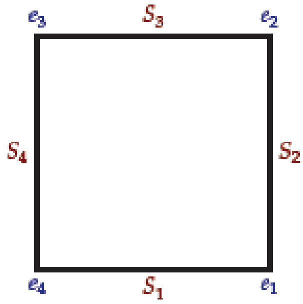
$\exists f, r, a, l, h, pf, pa$:

$\text{instanz\_von}(f, \text{Farhzeug}) \wedge \text{gelb}(f) \wedge$
$\text{instanz\_von}(a, \text{Ampel}) \wedge$
$\text{instanz\_von}(r, \text{Lampe}) \wedge \text{hat\_teil}(a, r) \wedge \text{rot}(r) \wedge$
$\text{instanz\_von}(l, \text{Leuchten}) \wedge$
$\text{instanz\_von}(h, \text{halten}) \wedge \text{agent}(h, f) \wedge \text{bewirkt}(l, h) \wedge$
$\text{instanz\_von}(pf, \text{Position}) \wedge \text{ort}(h, pf) \wedge$
$\text{instanz\_von}(pa, \text{Position}) \wedge \text{ort}(a, pa) \wedge \text{vor}(pf, pa)$

c)

$\forall s, b$:
$(\text{instanz\_von}(s, \text{seerose}) \wedge$
$\text{instanz\_von}(b, \text{Blüte}) \wedge \text{hat\_teil}(\text{s}, b) \Rightarrow$
$(\text{weiß}(b) \wedge \exists d{:}(\text{hat\_durchmesser}(b, d) \wedge \text{wert\_cm}(d) \geq 5 \wedge \text{wert\_cm}(d) \leq 14))$

d)



$\text{is\_a}(\text{Quadrat}, \text{Polygon}) \wedge \text{Winkel\_grad}(\text{rechter\_Ecke}){=}90 \wedge$
$\forall q$: $(\text{instanz\_von}(\text{q}, \text{Quadrat}) \Rightarrow$
$\exists S_1, S_2, S_3, S_4$:
$\text{instanz\_von}(S_1, \text{Seite}) \wedge \text{instanz\_von}(S_2, \text{Seite}) \wedge$
$\text{instanz\_von}(S_3, \text{Seite}) \wedge \text{instanz\_von}(S_4, \text{Seite}) \wedge$
$S_1 \neq S_2 \wedge S_1 \neq S_3 \wedge S_1 \neq S_4 \wedge S_2 \neq S_3 \wedge S_2 \neq S_4 \wedge S_3 \neq S_4 \wedge$
$\text{länge}(S_1){=}\text{länge}(S_2) \wedge \text{länge}(S_1){=}\text{länge}(S_3) \wedge \text{länge}(S_1){=}\text{länge}(S_4) \wedge$
$\exists e_1, e_2, e_3, e_4$:
$\text{instanz\_von}(e_1, \text{rechter\_Ecke}) \wedge \text{instanz\_von}(e_2, \text{rechter\_Ecke}) \wedge$
$\text{instanz\_von}(e_3, \text{rechter\_Ecke}) \wedge \text{instanz\_von}(e_4, \text{rechter\_Ecke}) \wedge$
$\text{hat\_teil}(e_1, S_1) \wedge \text{hat\_teil}(e_1, S_2) \wedge \text{hat\_teil}(e_2, S_2) \wedge \text{hat\_teil}(e_2, S_3) \wedge$
$\text{hat\_teil}(e_3, S_3) \wedge \text{hat\_teil}(e_3, S_4) \wedge \text{hat\_teil}(e_4, S_4) \wedge \text{hat\_teil}(e_4, S_1)$