Aufgabe U 19 (Kanten in Multi-Merkmalsbildern)

Ein Bild sei nicht durch eine skalare Grauwertfunktion gegeben, sondern durch eine vektorwertige Funktion

$$\vec{m} = (x, y) = \begin{pmatrix} m_1(x,y) \\ m_2(x,y) \\ \vdots \\ m_M(x,y) \end{pmatrix}$$

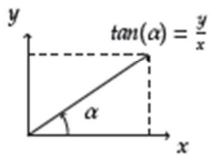
(z.B. Multispektralbild). Es sei hier der Fall zweier kontinuierlicher Variablen x, y angenommen. Man bestimme zu einem gegebenen Punkt (x_0, y_0) diejenige Richtung α (Winkel zur X-Achse), in der sich $\vec{m}$ am stärksten ändert (als Maß der Änderung soll der Betrag der Richtungsableitung dienen):

a) allgemein,

b) für $\vec{m}(x,y) = (2xy; 1; 1)^T$, $(x_0; y_0) = (1; 2)$.

Lösung U 19

a) normalisierter Richtungsvektor $\vec{n}$ mit Richtung α in der xy-Ebene:



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung von $\vec{m}$ bzgl. $\vec{n}$:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) * \frac{\partial m_1}{\partial x} + sin(\alpha) * \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ cos(\alpha) * \frac{\partial m_2}{\partial x} + sin(\alpha) * \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \vdots \\ cos(\alpha) * \frac{\partial M}{\partial x} + sin(\alpha) * \frac{\partial M}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial y} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix} = J * \vec{n}$$

J Jakobimatrix (Funktionalmatrix von $\vec{m}(x,y)$ $\qquad$ $\langle a, b \rangle$ = Skalarprodukt

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\| = \|J * \vec{n}\|^2 = \langle J * \vec{n}, J * \vec{n} \rangle = (J * \vec{n})^T * (J * \vec{n}) = \vec{n}^T * J^T * J * \vec{n} = \vec{n}^T * M * \vec{n}$$

mit

$$M = J^T \bullet J = \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{2x} & \dots & m_{Mx} \\ m_{1y} & m_{2y} & \dots & m_{My} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{1y} \\ \vdots & \vdots \\ m_{Mx} & m_{My} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} m_{ix}^2 & \sum_{i=1}^{M} m_{ix} m_{iy} \\ \sum_{i=1}^{M} m_{ix} m_{iy} & \sum_{i=1}^{M} m_{iy}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

M ist symmetrisch

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = (cos(\alpha)\ sin(\alpha)) \bullet \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix} = A\, cos^2(\alpha) + 2B cos(\alpha) sin(\alpha) + C sin^2(\alpha)$$

$f(\alpha) \coloneqq \left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = \vec{n}^T * M * \vec{n} \quad \rightarrow \text{ MAX}$

Extremmaproblem unter Nebenbedingung $\|\vec{n}\|^2 = \vec{n}^T * \vec{n} = 1$, äquivalent zu Extremmaproblem ohne Nebenbedingung:

$R(\vec{x}) \coloneqq \frac{\vec{x}^T M \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} \rightarrow$ Max (wegen $R(\vec{x}) = R(c \bullet \vec{x})$ für $c \neq 0$)

$R(\vec{x})$ heißt Rayleight-Quotient.

Aus der Lin. Algebra: Die Extremwerte von R sind die Eigenwerte von M, die Eigenvektoren von M lösen die Extremwertanfgabe.
Eigenwerte (EW) von M:

$$det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = (A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}$$

b) Zahlenbeispiel

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \frac{\partial m_3}{\partial x} & \frac{\partial m_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2y & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y^2 & 4xy \\ 4xy & 4x^2 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $x_0 = 1,\ y_0 = 2: \ M = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

EW: $\lambda_{1,2} = \frac{20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right) + 64} = 10 \pm \sqrt{100} = 10 \pm 10 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = 0$

Eigenvektoren zu $\lambda_2: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Kern(M): \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu λ_1 : muss orthogonal zu $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sein, also $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Probe: $\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = 20 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normiert:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix} \ \alpha_1 = arctan(2), \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \ \alpha_2 = arctan(-1/2)$$

$(M - \lambda I)\vec{x_\lambda} = 0 \quad \|\vec{n}\|^2 = (2, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 1 = 5$

Wo ist das Max. der Richtungsableitung? $\rightarrow$ bei $\vec{n_1}$ (Wert 20)

Probe:

$$\left\|\frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}_1}\right\|^2 = 16cos^2(\alpha_1) + 2 * 8 * cos(\alpha_1)sin(\alpha_1) + 4sin^2(\alpha_1) = \frac{16*4}{5} + \frac{32}{5} + \frac{4}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

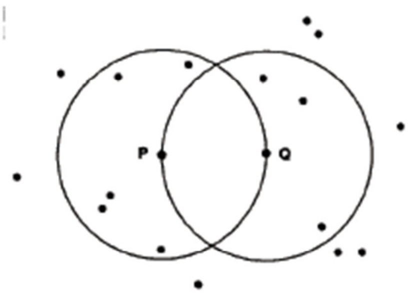
$$\left\|\frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}_2}\right\|^2 = \frac{16}{5} + 2 * 8 * \frac{-2}{5} + 4 * \frac{4}{5} = 0$$

Aufgabe U20 (punktbasierte Segmentierung)

Es sei eine Menge von Punkten in der Ebene gegeben: $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}$. Ein auf P definierter Graph ist ein in die Ebene eingebetteter Graph mit Knotenmenge P, dessen Kanten Geradenstücken entsprechen, die je 2 Punkte aus P verbinden. Ein minimaler aufspannender Baum (minimal spanning tree, MST) ist ein auf P definierter Graph mit minimaler (euklidischer) Kantenlängensumme. Der relative Nachbarschaftsgraph (relative neighbourhood graph, RNG) ist ein auf P def. Graph, der genau dann eine Kante zwischen p und q hat, wenn p und q relative Nachbarn bzgl. P sind, d.h. für die euklidischen Abstände d gilt:

$$\forall r \in P : d(r,p) > d(p,q) \text{ oder } d(r,q) > d(p,q),$$

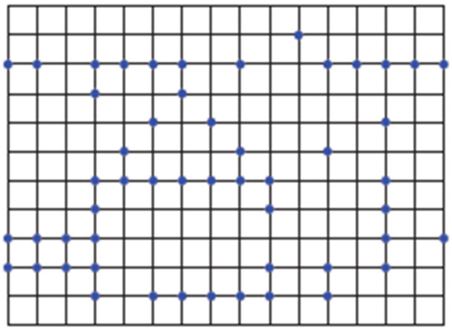
d.h. kein Punkt r liegt innerhalb des von p und q definierten Kreiszweiecks.

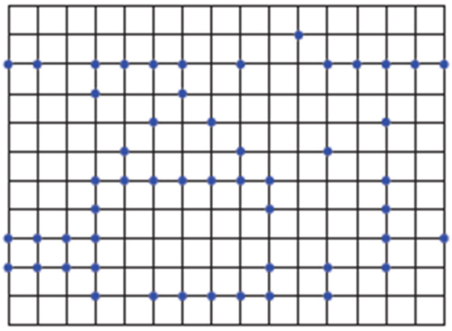


- "Greedy-Algorithmus" zur Bestimmung eines MST:
  1. Verbinde ein Punktepaar aus P mit kürzestem Abstand.
  2. Sei T die Menge der schon verbundenen Punkte. Suche einen Punkt p aus $P \setminus T$ und einen Punkt q aus T, so dass der Abstand unter allen solchen Punktepaaren am kürzesten ist, und verbinde p mit q.
  3. Wiederhole (2), bis keine isolierten Punkte mehr übrig sind.
- Algorithmus zur Bestimmung des RNG:
  Prüfe für jede mögliche Kante pq, ob sie Kante des RNG ist. (*Verfahren wird deutlich effizienter, wenn durch a-priori-Wissen feststeht, dass Kanten, deren Längen oberhalb eines bestimmten Schwellenwertes liegen, nicht zum RNG gehören.*)

a) Man zeige, dass der Greedy-Algorithmus tatsächlich einen MST erzeugt.

b) Man wende den Algorithmus an, um den MST und den RNG des folgenden Punktmusters zu bestimmen.





Anmerkung: Es gilt $P \subseteq MST \subseteq RNG \subseteq DT$, dabei ist DT die Delaunay-Triangulierung von P (siehe Skript zur Computergrafik, Kapitel 8c).

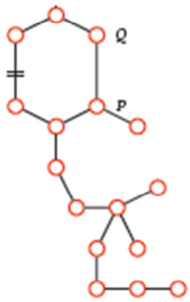
Lösung U20

a) Greedy-Algorithmus:

- Greedy-Prinzip: "Lokales Optimum führt zu globalen Optimum"
- Greedy-Algorithmen sind meist schnell, lösen viele Probleme aber nicht optimal.

1) Sei B ein MST
Sei pq Punktepaar mit kürzesten Abstand.
Annahme: pq gehört nicht zu einem MST.

Verbinde pq in B. es entsteht ein Kreis
entferne eine andere Kante aus dem Kreis
→ neuer Graph ist MST, Widerspruch!



2) T sei schon mit dem Algorithmus erzeugt und Subgraph eines MST B.
pq sei Punktepaar gemäß Schritt 2.
Annahme: pq gehört zu einem MST.

Wie in 1):
verbinde pq in B, entferne andere Verbindungskante zwischen T und B\T aus B
→ entstehender Baum ist MST n. enthält pq, Widerspruch!
Mit Induktion über |T| folgt die Behauptung.

b)

- siehe dazu **Algorithmus von Prim**
- Schrittweise Erweiterung der bereits konstruierten Teilknotenmenge

Lösung nicht eindeutig!