Aufgabe U 23

Man gebe für jeden der Sachverhalte aus Aufgabe U 22 eine Repräsentation in Form eines semantischen Netzes an.

Lösung U 23

Vereinbarungen:

Kanten, die für Konzeptklassen stehen, werden durch unterstrichene Bezeichner gekennzeichnet.

Die Repräsentation eines Individualkonzepts (Instanz) impliziert die Behauptung von dessen Existenz.

Ererbte Beschreibungsmerkmale werden nicht redundant repräsentiert.

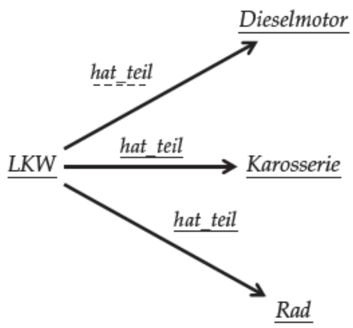
Wir unterscheiden zwischen:

kontingentem Wissen allgemein anerkannt oder beziehen sich auch einen Großteil einer Klasse aber nicht unbedingt notwendig; Kontingente Fakten könnten auch anders sein.

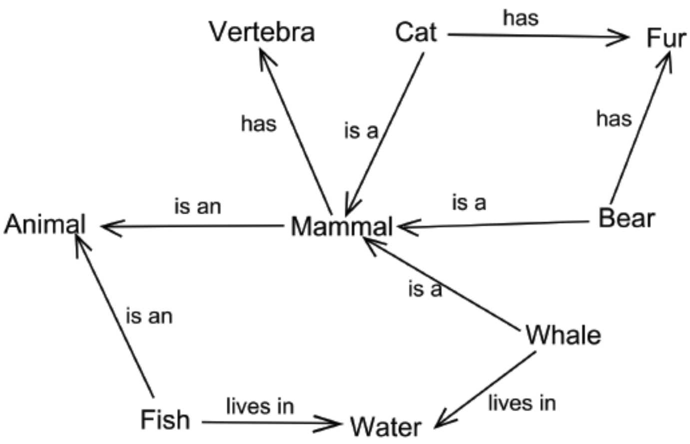
definitorischem Wissen unanzweifelbare Eigenschaft

Kontingente Eigenschaftes– und Beziehungskanten werden durch gestrichelte Unterstreichung markiert (in der Literatur meist Kursiv).

Beispiel:



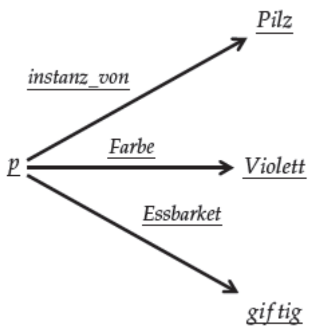
Weiters Beispiel (Vererbung (Hierarchien) über *is_a*; keine Redundanz vererbter Eigenschaften (Wirbel nicht bei der Katze)):



a)

$\forall\, p\colon (\underline{\text{instanz\_von}}(p, \text{Pilz}) \wedge \underline{\text{violett}}(p)) \Rightarrow \underline{\text{giftig}}(p)$

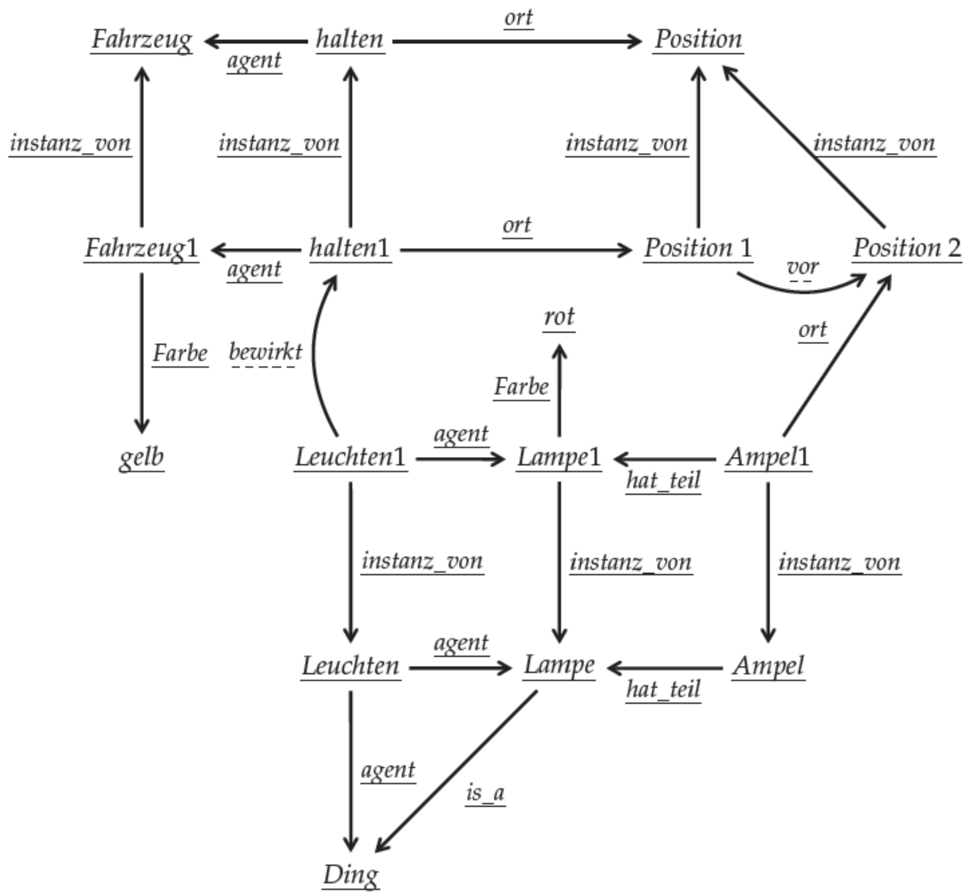
oder: $\underline{\text{hat\_farbe}}(p, \text{violett})$



b)

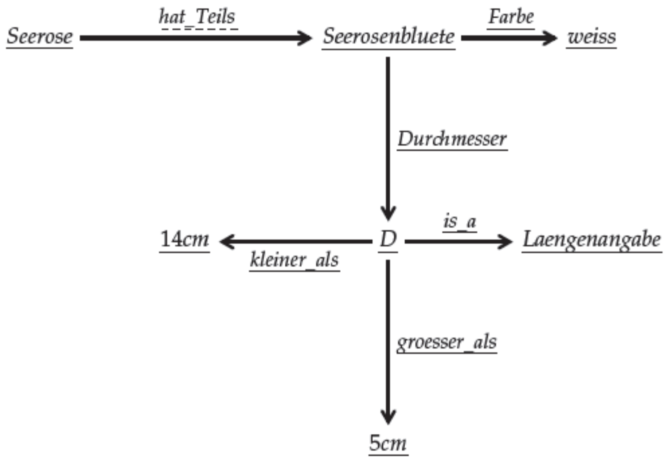
$\exists\, f, r, a, l, h, pf, pa :$

$\underline{\text{instanz\_von}}(f, \text{Farhzeug}) \wedge \underline{\text{gelb}}(f) \wedge$
$\underline{\text{instanz\_von}}(a, \text{Ampel}) \wedge$
$\underline{\text{instanz\_von}}(r, \text{Lampe}) \wedge \underline{\text{hat\_teil}}(a, r) \wedge \underline{\text{rot}}(r) \wedge$
$\underline{\text{instanz\_von}}(l, \text{Leuchten}) \wedge$
$\underline{\text{instanz\_von}}(h, \text{halten}) \wedge \underline{\text{agent}}(h, f) \wedge \underline{\text{bewirkt}}(l, h) \wedge$
$\underline{\text{instanz\_von}}(pf, \text{Position}) \wedge \underline{\text{ort}}(h, pf) \wedge$
$\underline{\text{instanz\_von}}(pa, \text{Position}) \wedge \underline{\text{ort}}(a, pa) \wedge \underline{\text{vor}}(pf, pa)$



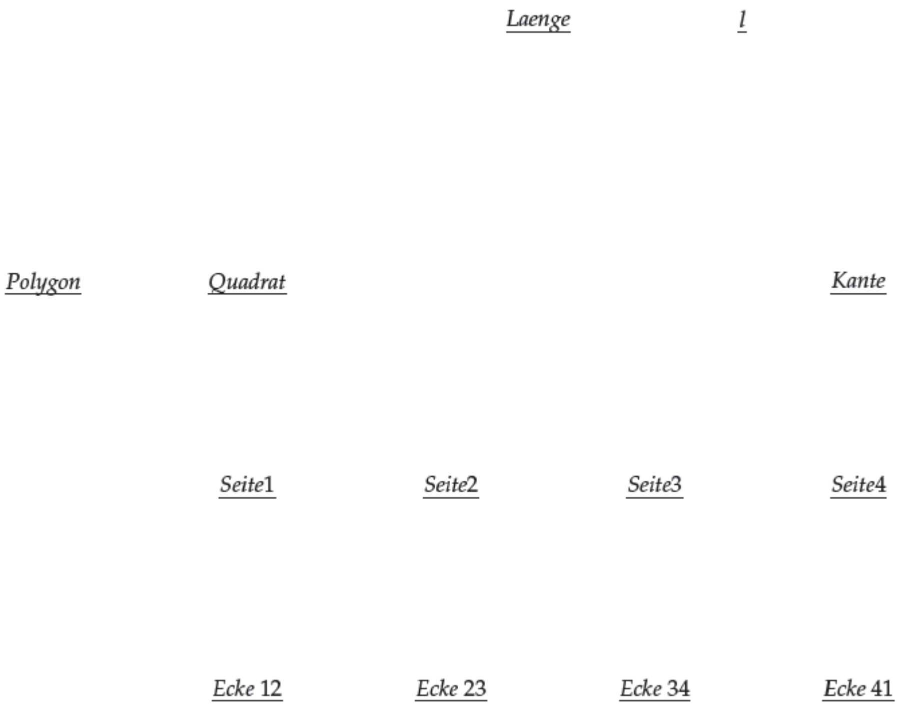
vor und *bewirkt* sind Kontingente Beziehungskanten.

c)
$\forall\, s, b$:
(instanz_von(s, seerose) $\wedge$
instanz_von(b, Blüte) $\wedge$ hat_teil(s, b) $\Rightarrow$
(weiß(b) $\wedge$ $\exists\, d$:(hat_durchmesser(b, d) $\wedge$ wert_cm(d) ≥ 5 $\wedge$ wert_cm(d) ≤ 14))

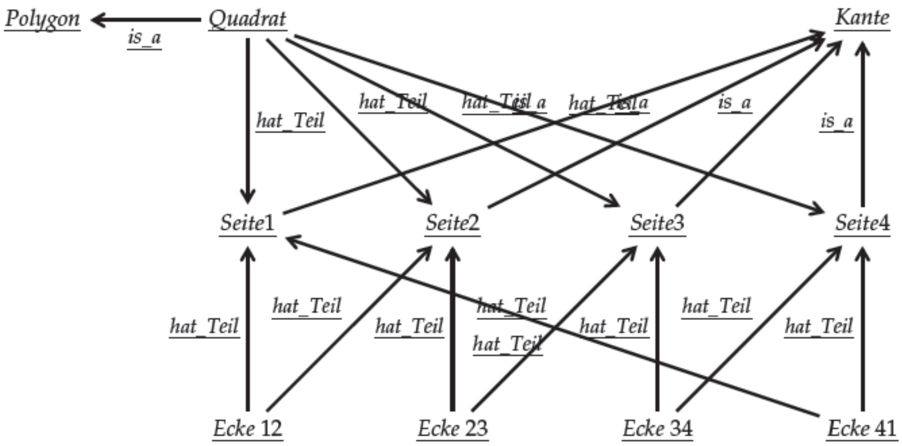


d)

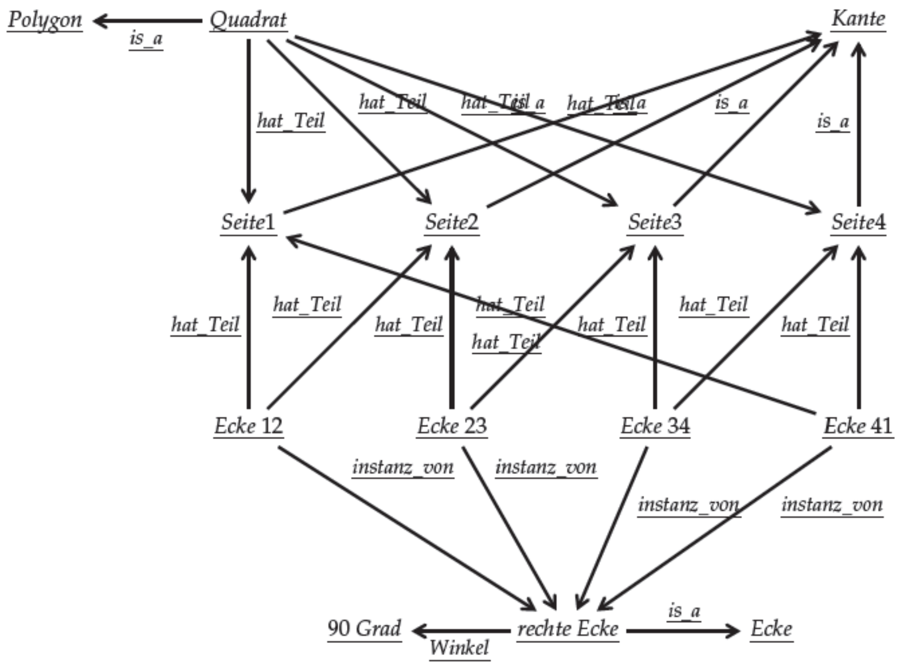
is_a(Quadrat, Polygon) $\wedge$ Winkel_grad(rechter_Ecke)=90 $\wedge$
$\forall\, q$: (instanz_von(q, Quadrat) $\Rightarrow$
$\exists\, S_1, S_2, S_3, S_4$:
instanz_von(S_1, Seite) $\wedge$ instanz_von(S_2, Seite) $\wedge$
instanz_von(S_3, Seite) $\wedge$ instanz_von(S_4, Seite) $\wedge$
$S_1 \neq S_2 \wedge S_1 \neq S_3 \wedge S_1 \neq S_4 \wedge S_2 \neq S_3 \wedge S_2 \neq S_4 \wedge S_3 \neq S_4 \wedge$
länge(S_1)=länge(S_2) $\wedge$ länge(S_1)=länge(S_3) $\wedge$ länge(S_1)=länge(S_4) $\wedge$
$\exists\, e_1, e_2, e_3, e_4$:
instanz_von(e_1, rechter_Ecke) $\wedge$ instanz_von(e_2, rechter_Ecke) $\wedge$
instanz_von(e_3, rechter_Ecke) $\wedge$ instanz_von(e_4, rechter_Ecke) $\wedge$
hat_teil(e_1, S_1) $\wedge$ hat_teil(e_1, S_2) $\wedge$ hat_teil(e_2, S_2) $\wedge$ hat_teil(e_2, S_3) $\wedge$
hat_teil(e_3, S_3) $\wedge$ hat_teil(e_3, S_4) $\wedge$ hat_teil(e_4, S_4) $\wedge$ hat_teil(e_4, S_1)



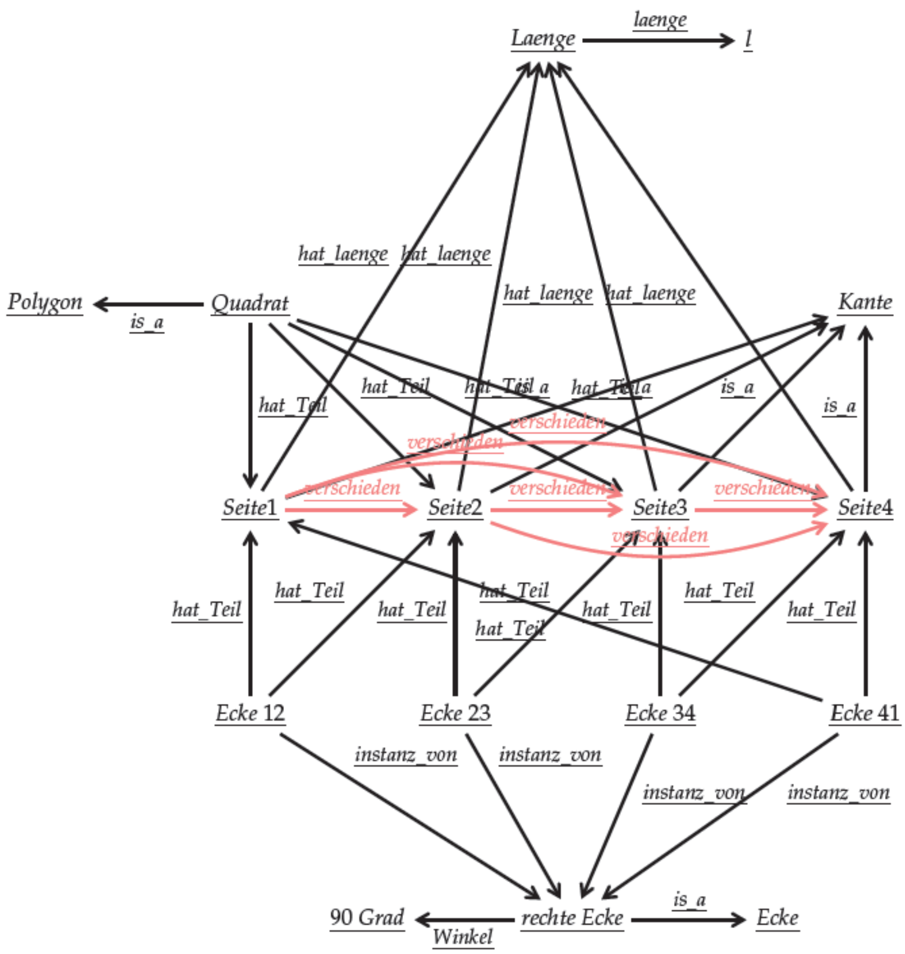
Laenge l


Polygon
Quadrat
Kante
is_a
hat_Teil
Seite1
Seite2
Seite3
Seite4
Ecke 12
Ecke 23
Ecke 34
Ecke 41

Laenge *l*



+ Seiten sind verschieden und gleich lang



Laenge
laenge
l
hat_laenge
hat_laenge
hat_laenge
hat_laenge
Polygon
is_a
Quadrat
Kante
hat_Teil
hat_Teil
hat_Teil
hat_Teil
is_a
is_a
is_a
is_a
verschieden
Seite1
Seite2
Seite3
Seite4
hat_Teil
Ecke 12
Ecke 23
Ecke 34
Ecke 41
instanz_von
90 Grad
Winkel
rechte Ecke
Ecke

Aufgabe U24 - Auffinden von Fluchtpunkten im Bild

Die modifizierte Hough-Transformation werde so definiert, dass eine Gerade nicht durch Abstand vom Ursprung und Winkel repräsentiert wird, sondern durch die Koordinaten ihres dem Ursprung nächstliegenden Punktes.

a) Wie ist diese Transformation rechnerisch durchzuführen?

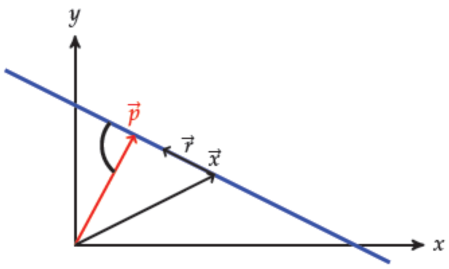
b) Eine Geradenschar gehe im Originalbild durch ein- und denselben Punkt P. Wo liegen die entsprechenden Punkte nach der modifizierten Hough-Transformation?

c) Wie kann man den Punkt P durch lineare Regression detektieren?

d) Man führe die entsprechenden Berechnungen durch für die 3 Geraden $y = 2, y = x$ und $y = 4-x$ durch den Punkt $(2, 2)$.

Lösung U24

a) modifizierte Hough-Transformation:



gegeben: Richtung $\vec{r}$, beliebiger Punkt $\vec{x}$ auf der Geraden

$\vec{p} = \vec{x} + c * \vec{r}$

$\vec{p} * \vec{r} = 0$ (Skalarprodukt)

$\Longrightarrow (\vec{x} + c * \vec{r}) * \vec{r} = 0$

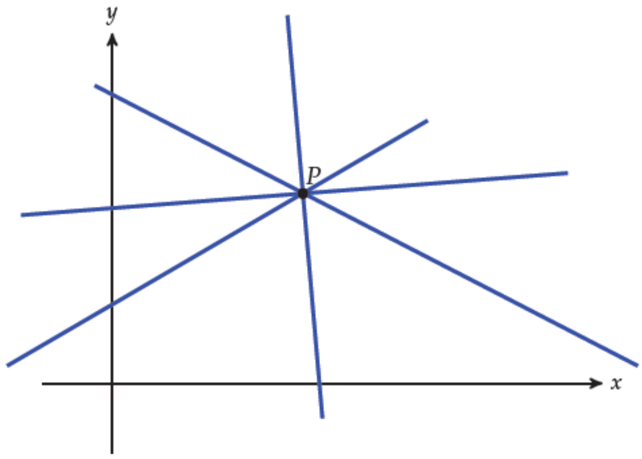
$\vec{x} * \vec{r} + c * ||\vec{r}||^2 = 0$

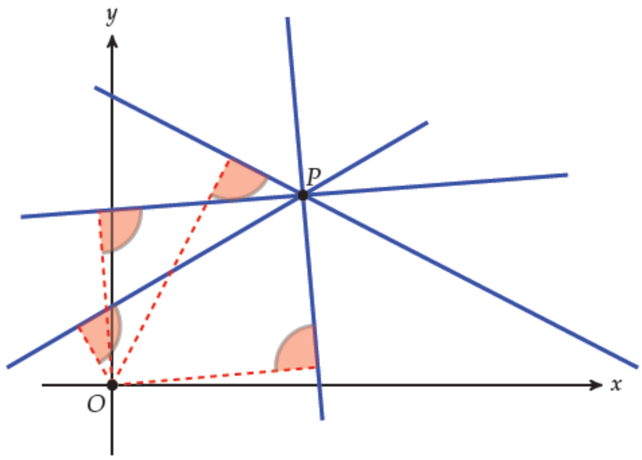
$c * ||\vec{r}||^2 = -\vec{x} * \vec{r}$

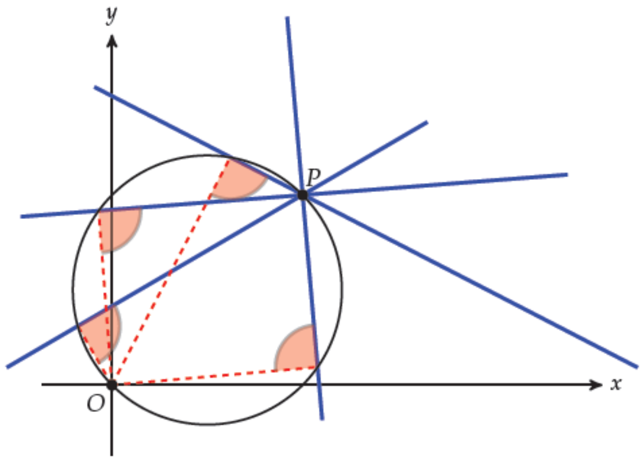
$c = -\frac{\vec{x} * \vec{r}}{||\vec{r}||^2}$

also $\vec{p} = \vec{x} - (\vec{x} * \vec{\mathbf{r}}) * \vec{\mathbf{r}}$, wobei $\vec{\mathbf{r}}$ der normierte Vector (Länge 1) ist: $\vec{\mathbf{r}} = \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||}$

b)
Satz des Thales: Punkte, deren Verbindungslinien zu P und O (=Ursprung) rechten Winkel bilden, liegen auf einem Kreis PO, als Durchmesser (Mittelpunkt $1/2P$) d.h. die Punkte liegen nach der modifizierten Hough-Transformation auf einem Kreis durch den Ursprung O. P ist der Punt auf diesem Kreis mit größtem Abstand von O.


y
P
x


y
P
x
O


y
P
x
O

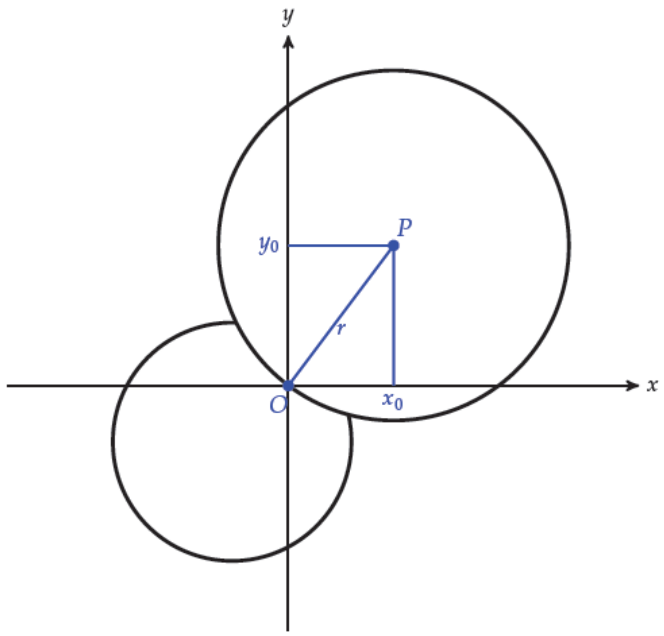
c)
Anwendung linearer Regression?
Trick: aus Kreis eine Gerade machen; Inversion zum Einheitskreis

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) = (x', y') \qquad (*)$$

Behauptung: ein Kreis durch O wird von f auf eine Gerade abgebildet.

Kreis durch O: Kreisgleichung $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ mit Mittelpunkt (x_0, y_0)

geht durch $O \implies x_0^2 + y_0^2 = r^2$

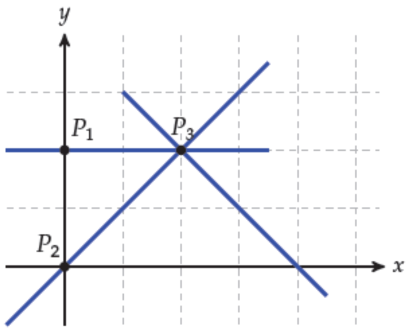


$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 - 2xx_0 + \underline{x_0^2} + y^2 - 2yy_0 + \underline{y_0^2} = \underline{r^2}$
$\implies x^2 - 2xx_0 + y^2 - 2yy_0 = 0$

$\implies \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} - 2\frac{x}{x^2+y^2}x_0 - 2\frac{y}{x^2+y^2}y_0 = 0 \iff 1 - 2x'x_0 - 2y'y_0 = 0$ (**) ...Geradengleichung in x', y'

Transformiere also Punkte aus dem modifizierten Hough-Space durch Inversion zum Einheitskreis (*). Suche anschließend nach Geraden (z.B. mit klassischer linearer Regression)
Wende (*) erneut an (Selbstinverse Abbildung!) $\implies$ Kreis durch O im modifizierten Hough-Space $\implies$ Diametralpunkt P dieses Kreises liefert Fluchtpunkt im Originalbild.

d)
Gerade zu O nächstliegende Punkte:



$y = 2 \quad \rightarrow \quad P_1 = (0, 2)$
$y = x \quad \rightarrow \quad P_2 = (0, 0)$
$y = 4 - x \quad \rightarrow \quad P_3 = (2, 2)$

Inversion am Einheitskreis:
$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) = (x', y')$

$f(0, 2) = (0, 0.5)$
$f(0, 0) = \infty$
$f(2, 2) = (2/8, 2/8) = (1/4, 1/4)$

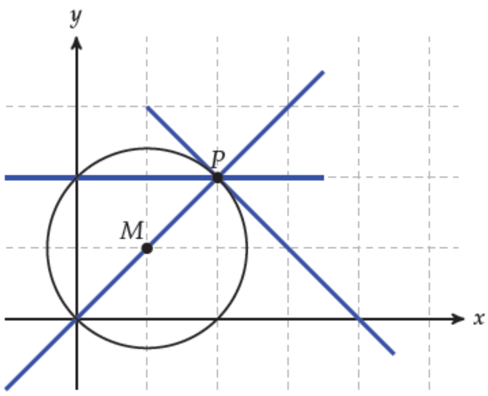
$\iff$ Gerade $x + y = 1/2$ oder $1/2 - x - y = 0$ oder $1 - 2x - 2y = 0$
$\iff$ in (**) ist $x_0 = y_0 = 1$

$\iff$ Kreismittelpunkt bei $M = (x_0, y_0) = (1, 1)$
$\iff$ Radius $r^2 = x_0^2 + y_0^2 = 1 + 1 = 2 \;\rightarrow\; r = \sqrt{2}$

$P = 2 * (1, 1) = (2, 2)$

Schnittpunkt der drei Geraden

(war auch so klar, aber interessant ist der Fall, wenn nicht exakt derselbe Schnittpunkt vorliegt)



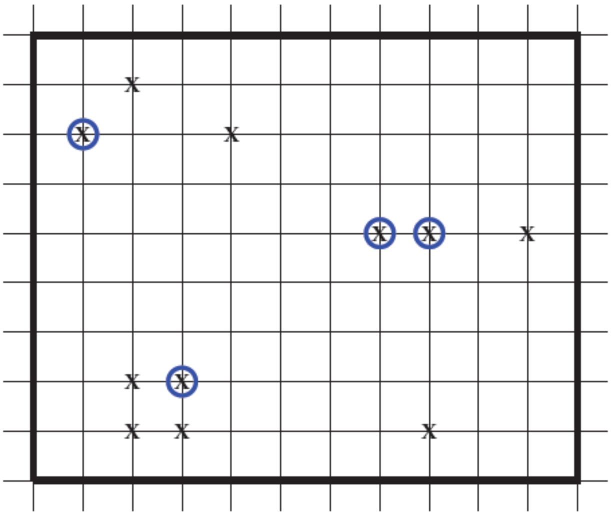
Aufgabe U25 (Clusteranalyse)

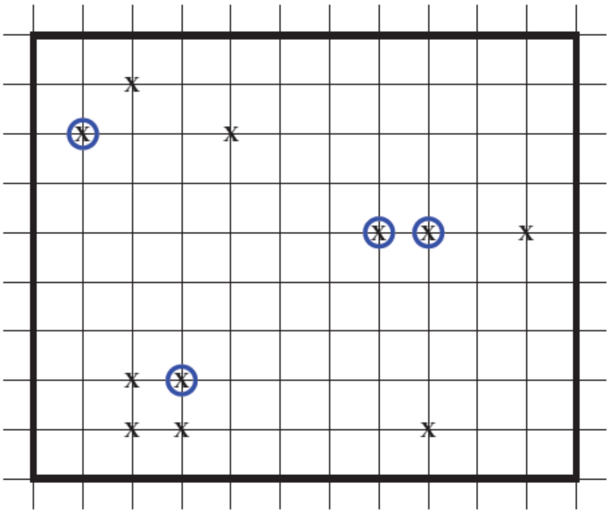
In einem zweidimensionalen Merkmalsraum liege das unten stehende Punktmuster vor. Mit dem Minimum-Distanz-Algorithmus soll eine Clusterung der Punkte (Merkmalsvektoren) in 4 Cluster erzeugt werden:

1. 4 initiale Cluster-Repräsentanten sind vorgegeben worden (mit Kreis markierte Punkte),
2. jeder Punkt wird in dasjenige Cluster aufgenommen, dessen Repräsentant am nächsten liegt,
3. der Schwerpunkt jedes Clusters wird berechnet und wird zum neuen Repräsentanten.

   (2) und (3) werden solange wiederholt, bis alle Cluster stabil sind.

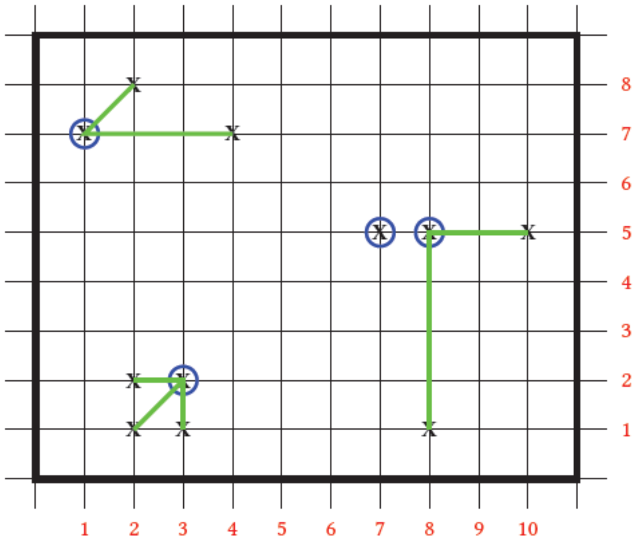
Ist die entstehende Clusterung optimal?
Schablonen:





Lösung U25

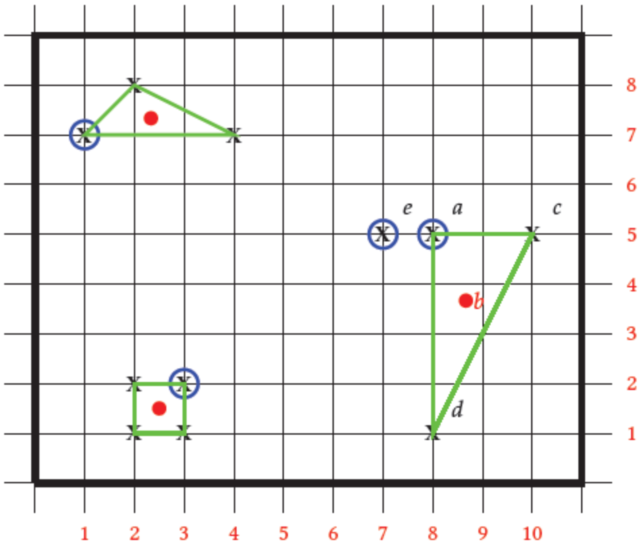
1. Schritt: verbinden mit nächsten markierten Nachbarn



2. Schritt: Schwerpunkt jedes Clusters berechnen

Obere Cluster:	Untere Cluster:	Rechtes Cluster:
(1, 7)	(2, 2)	(8, 1)
(2, 8)	(3, 2)	(8, 5)
(4, 7)	(3, 1)	(10, 5)
	(2, 1)	
(7,22):3=(2.334, 7.334)	(10, 6):4=(2.5, 1.5)	(26,11):3=(8,667, 3,667)

$\Longrightarrow$ neue Rehpräsentante



3. Schritt: Umgruppierung

- die beiden linken Cluster bleiben stabil
- a liegt näher an e als am neuen Zentrum b
  $(e, a); (c, d)$

3. Schritt: Stabilisierung der Cluster im nächsten Iterationsschritt:
$(e, a); (c, d)$

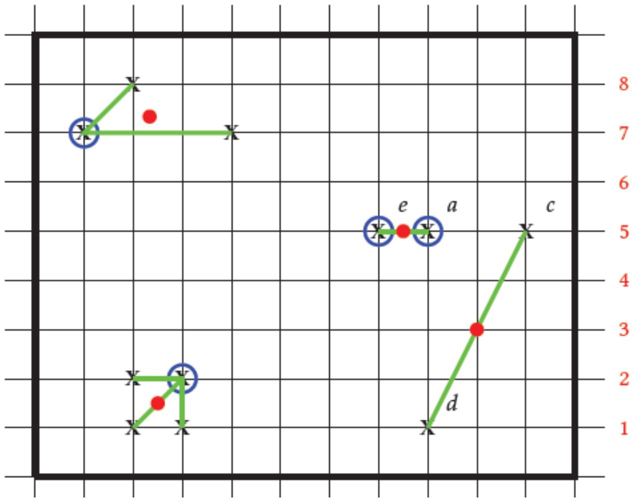
* Berechnung der Zuordnung des rechten Außenpunktes c: (gehört er zu e oder b? $\rightarrow$ Abstände untersuchen)

$d(e, c) = 3$ (e ist Clusterzentrum des alten Clusters $\{e\}$)

$b = \frac{1}{3}(a + c + d) = \frac{1}{3}((0, 4) + (0, 0) + (2, 4)) = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$ mit Verschiebung von d nach $(0, 0)$ und $c = (2, 4)$

$d(c, b) = \sqrt{\left(\frac{6-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{12-8}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{32}}{3} \approx 1.8856 < 3$

$\Longrightarrow$ c wird b zugeordnet.



Optimalität der entstandenen Clusterung (nach Stabilisierung):

Fehlerquadratsumme der beiden rechten Cluster (Abstände zum Repräsentanten)

- im Vorliegenden Endzustand des Algorithmus:

$\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + = 1/4 + 1/4 + 5 + 5 = 10,5$

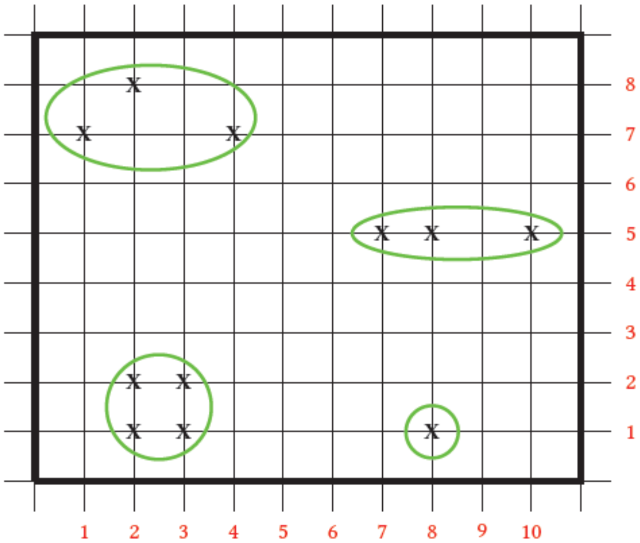
- wenn stattdessen c mit e und a ein Cluster bilden würde:

x x x

$e\ a\ c\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 0 = 4,667 < 10,5!$

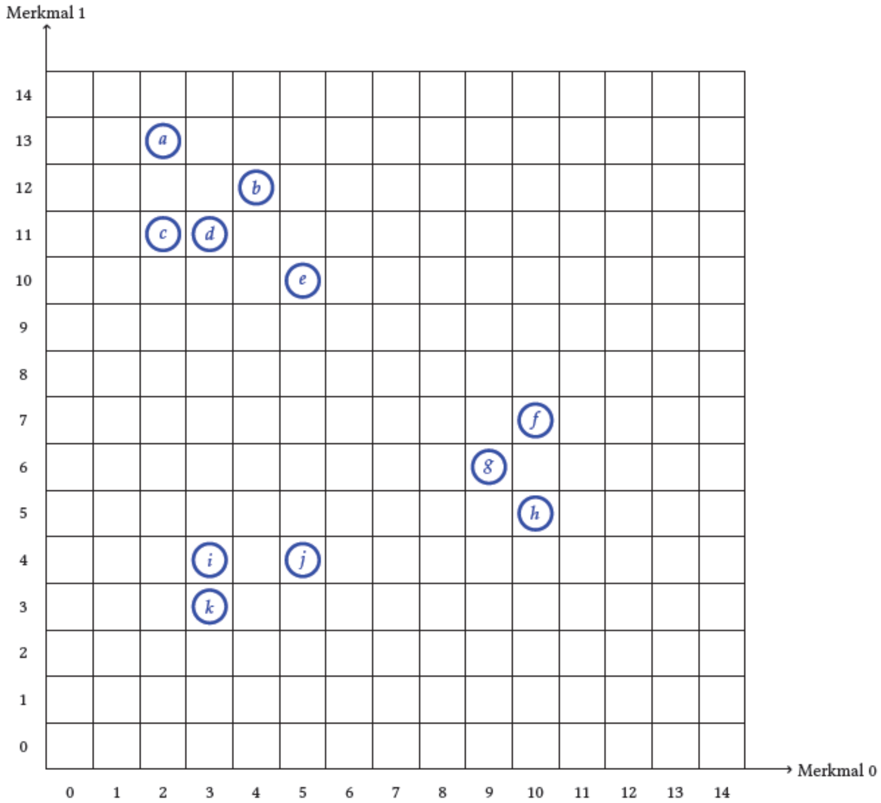
- Verfahren "Läuft sich fest" in lokalem Minimum, welches nicht das globale Min. ist!
- Sensitiv gegenüber Ausreißern

Optimale Klusterung:



Aufgabe U26 - (Mahalanobis-Klassifikator)

Gegeben sind die Objekte a-k in einem zweidimensionalen Merkmalsraum:



Die Objekte a–e sollen eine Lernstichprobe für eine Klasse k_0 auf der Grundlage des Mahalanobis-Klassifikators bilden. Die Zurückweisungsschwelle d_0 sei $\vec{\sigma}_0^T \Sigma_0^{-1} \vec{\sigma}_0$.

In der Anwendungsphase des Klassifikators sollen 2 Objekte $p = (5;10)^T$ und $q = (6;9)^T$ klassifiziert werden. Gehören sie zu k_0?

(Typische Anwendung des Mahalanobis-Klassifikators: Klassen von Pixeln in Satellitenbildern, Merkmale = Farbkanäle.)

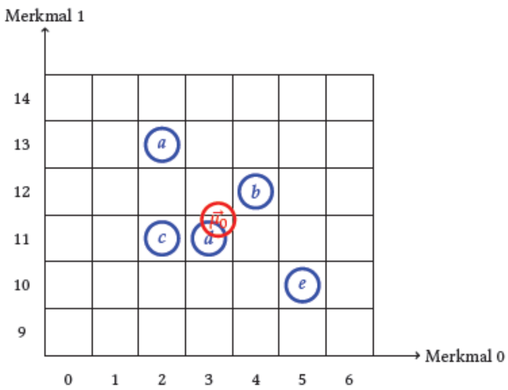
Lösung U26

Mahalanobis-Distanz:

$$d(\vec{x}, \vec{\mu}_0) = (\vec{x} - \vec{\mu}_0)^T * \Sigma_0^{-1} * (\vec{x} - \vec{\mu}_0)$$

Mittelwert Vektor $\vec{\mu}_0$ für Klasse k_0:

$$\vec{\mu}_0 = \frac{1}{5}(a + b + +c + d + e) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\ +\ 4\ +\ 2\ +\ 3\ +\ 5 \\ 13 + 12 + 11 + 11 + 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 \\ 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 11.4 \end{pmatrix}$$



Kovarianzematrix $\sum_0$ für k_0:

Enthält die Kovarianzen der 2 Markmale. u_0=Anzahl der Objekte von $k_0 \ \rightarrow u_0 = 5$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \tfrac{1}{u_0-1}\sum_{j=0}^{u_0}(\vec{x}_j - \vec{\mu}_0)(\vec{x}_j - \vec{\mu}_0)^T \\
&= \tfrac{1}{4}((a-\vec{\mu}_0)(a-\vec{\mu}_0)^T + \ldots + (e-\vec{\mu}_0)(e-\vec{\mu}_0)^T) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}-1.2\\1.6\end{pmatrix}(-1.2\ 1.6) + \begin{pmatrix}0.8\\0.6\end{pmatrix}(0.8\ 0.6) + \begin{pmatrix}-1.2\\-0.4\end{pmatrix}(-1.2\ \ -0.4) + \begin{pmatrix}-0.2\\-0.4\end{pmatrix}(-0.2\ \ -0.4) + \begin{pmatrix}1.8\\-1.4\end{pmatrix}(1.8\ \ -1.4)\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}1.44 & -1.92\\-1.92 & 2.56\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.64 & 0.48\\0.48 & 0.36\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1.44 & 0.48\\0.48 & 0.16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.04 & 0.08\\0.08 & 0.16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3.24 & -2.52\\-2.52 & 1.96\end{pmatrix}\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}6.8 & -3.4\\-3.4 & 5.2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.7 & -0.85\\-0.85 & 1.3\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

inverse Matrix:

$$\Sigma_0^{-1} = \frac{1}{det\Sigma_0} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & -\sigma_{01}\\-\sigma_{10} & \sigma_{00}\end{pmatrix} = \frac{1}{1.7*1.3-0.85^2}\begin{pmatrix}1.3 & 0.85\\0.85 & 1.7\end{pmatrix} = \frac{1}{1.4875}\begin{pmatrix}1.3 & 0.85\\0.85 & 1.7\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0.874 & 0.571\\0.571 & 1.143\end{pmatrix}$$

Streuungsvector $\vec{\sigma}_0$ (Standartabweichung):

$$\vec{\sigma}_0 = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma_{00}}\\\sqrt{\sigma_{11}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{1.7}\\\sqrt{1.3}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1.304\\1.140\end{pmatrix}$$

Zurückweisungsschwelle d_0 für Klasse k_0:

$$d_0 = \vec{\sigma}_0{}^T * \Sigma_0^{-1} * \vec{\sigma}_0 = (1.304\ 1.140) * \begin{pmatrix}0.874 & 0.571\\0.571 & 1.143\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1.304\\1.140\end{pmatrix} \approx (1.791\ 2.048) * \begin{pmatrix}1.304\\1.140\end{pmatrix} \approx 4.670$$

Mahalanobis-Distanz für $p = e = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$

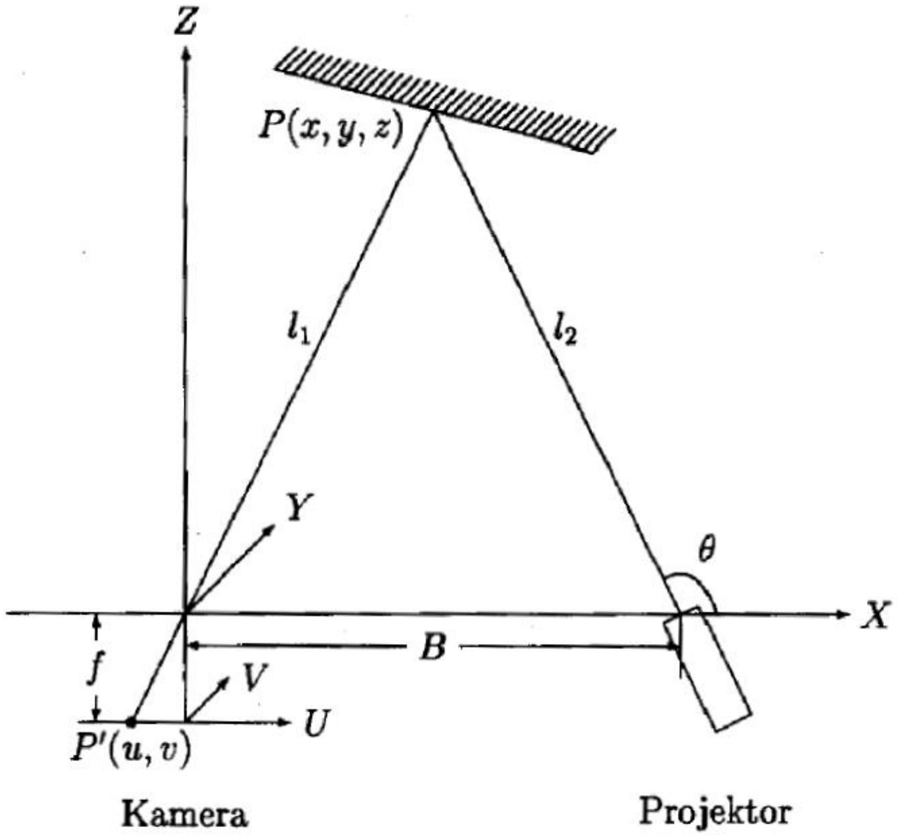
$$
\begin{aligned}
d(p,\ \vec{\mu}_0) &= (p-\vec{\mu}_0)^T * \Sigma_0^{-1} * (p-\vec{\mu}_0) \\
&= (1.8\ \ -1.4) * \begin{pmatrix}0.874 & 0.571\\0.571 & 1.143\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1.8\\-1.4\end{pmatrix} \\
&= (0.774\ \ -0.5724) * \begin{pmatrix}1.8\\-1.4\end{pmatrix} \approx 2.195 < d_0 \\
&\implies p \text{ wird zu } k_0 \text{ klassifiziert (sofern } p \text{ nicht näher an anderer Klasse liegt)}
\end{aligned}
$$

Mahalanobis-Distanz für $q = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$

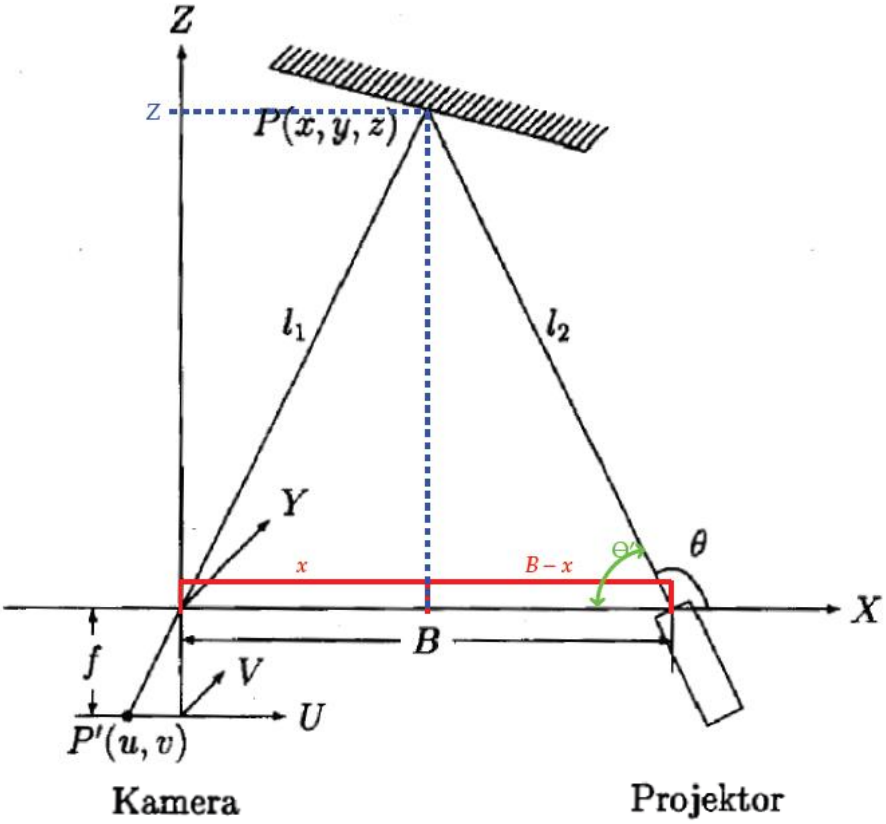
$$
\begin{aligned}
d(q,\ \vec{\mu}_0) &= (2.8\ \ -2.4) * \begin{pmatrix}0.874 & 0.571\\0.571 & 1.143\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2.8\\-2.4\end{pmatrix} \\
&= (1.077\ \ -1.1444) * \begin{pmatrix}2.8\\-2.4\end{pmatrix} \approx 5.762 > d_0 \\
&\implies q \text{ wird nicht zu } k_0 \text{ klassifiziert}
\end{aligned}
$$

Aufgabe U27 - (Tiefengewinnung durch Triangulation)

Ein Projektor mit bekannter Position und Orientierung erzeugt in einer Szene einen Lichtpunkt **P**. Eine (ideale) Kamera mit Brennweite f und bekannter Position und Orientierung nimmt die Szene auf. Der Lichtpunkt wird in der Bildebene an der Position (u, v) detektiert. Man berechne die Position (x, y, z) des Punktes **P** in der Szene aus den bekannten Größen.



Lösung U27



O.B.d.A. habe das Koordinatensystem der Szene (Weltkoordinaten) das optische Zentrum der Kamera als Ursprung, und x- und y-Achse seien parallel zur u- bzw. v-Achse; z-Achse = optische Achse der Kamera

Ähnliche Dreiecke: $\frac{x}{z} = \frac{-u}{f}$ und $\frac{y}{z} = \frac{-v}{f}$

l_1 = Gerade OP: $z = -\frac{f}{u}x$
l_2 = Projektion des Sichtstrahls in die xz-Ebene (B = Abstand des Projektors von der Kamera): $tan(\Theta') = \frac{z}{B-x}$

$\Longrightarrow z = (B-x) * tan(\Theta') = (B-x) * tan(180° - \Theta) = (x-B) * tan(\Theta)$

$(x-B) * tan(\Theta) = -\frac{f}{u}x$
$x * tan(\Theta) + \frac{f}{u}x = B * tan(\Theta)$

$x * (tan(\Theta) + \frac{f}{u}) = B * tan(\Theta)$
$x = \frac{B*tan(\Theta)}{tan(\Theta)+\frac{f}{u}} = \frac{B*tan(\Theta)*u}{u*tan(\Theta)+f}$

$\Longrightarrow z = -\frac{f}{u} * \frac{B*tan(\Theta)*u}{u*tan(\Theta)+f} = \frac{-B*tan(\Theta)}{u*tan(\Theta)+f} * f$

$\Longrightarrow y = \frac{-v*z}{f} = \frac{B*tan(\Theta)}{u*tan(\Theta)+f} * v$