

# Iterative Methods for Improving Mesh Parameterizations

**Autoren: Shen Dong & Michael Garland, SMI '07**

Nicola Sheldrick

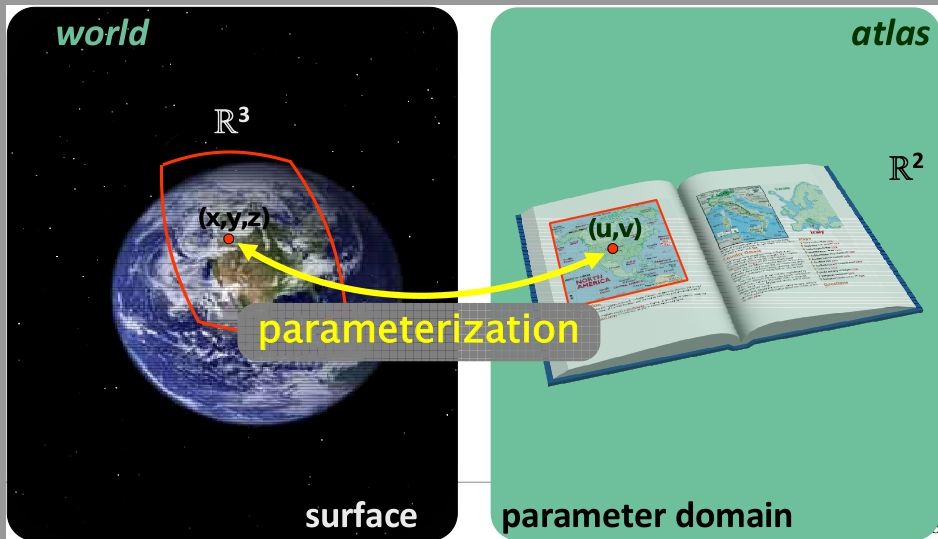
Seminar Computergrafik

April 6, 2010

# Inhaltsverzeichnis

- 1** Einleitung
- 2** Grundlagen
- 3** Quasi-konforme Parametrisierungen
- 4** Nicht- Lineare Optimierung
- 5** Ergebnisse

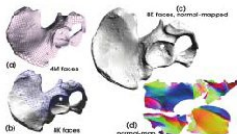
# Was ist eine Parametrisierung?



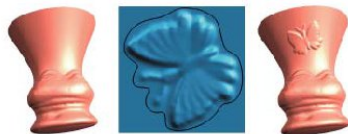
# Anwendungsbeispiele



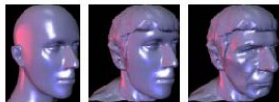
Texture Mapping



Normal Mapping



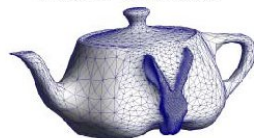
Detail Transfer



Morphing



Mesh Completion



Editing

# Planare Parametrisierungen

planare Parametrisierungen

→  
bilde eine 3D-Fläche auf eine 2D-Fläche ab

→  
minimiere dabei Verzerrungen, vor allem Streckung

→  
definiere eine Fehler-Metrik

→  
messe einige spezielle Fehler der Abbildungsfunktion

→  
Fehlerminimierung

# Grundlagen

## Theorema Egregium (C.F. Gauß)

Satz aus der Differentialgeometrie besagt, dass die Erde nicht auf einer Karte dargestellt werden kann ohne Verzerrung (distortion).

- eine Parametrisierung kann entweder nur *authalisch* (Flächenerhaltend) oder *conform* (Winkelerhaltend) sein
- keine Abbildung kann *isometrisch* (Distanzerhaltend) sein, gleichzeitig *authalisch* und *conform*

# Grundlagen

## Theorema Egregium (C.F. Gauß)

Satz aus der Differentialgeometrie besagt, dass die Erde nicht auf einer Karte dargestellt werden kann ohne Verzerrung (distortion).

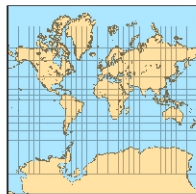
- eine Parametrisierung kann entweder nur *authalisch* (Flächenerhaltend) oder *conform* (Winkelerhaltend) sein
- keine Abbildung kann *isometrisch* (Distanzerhaltend) sein, gleichzeitig *authalisch* und *conform*



orthographic  
~ 500 B.C.



stereographic  
~ 150 B.C.



Mercator  
1569



Lambert  
1772

# Conforme und Harmonische Parametrisierungen

- conforme = winkelerhaltende Abbildungen haben einige günstige Eigenschaften
- stehen in direkter Beziehung zu komplexer Funktionstheorie
- eine solche Abbildung kann als eine Funktion einer komplexen Variable  $\omega = f(z)$  betrachtet werden
- somit werden die *Cauchy-Riemann'schen* Gleichungen aus der Funktionstheorie erfüllt
- mit  $z = x + iy$  und  $\omega = u + iv$  folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- differenziert man einer dieser Gleichungen einmal mit Bezug auf  $x$  und einmal mit Bezug auf  $y$
- erhält man die zwei *Laplace* Gleichungen



# Conforme und Harmonische Parametrisierungen

## Laplace Gleichungen

- differenziert einmal mit Bezug auf  $x$  und einmal mit Bezug auf  $y$  erhält man

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0$$

- wobei der *Laplace – Operator* gilt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- jede Abbildung, die diese *Laplace* Gleichungen erfüllt bezeichnet man als eine *harmonische* Abbildung
- also ist eine *conforme* Abbildung auch *harmonisch* und impliziert

**isometrisch  $\Rightarrow$  conform  $\Rightarrow$  harmonisch**

# Harmonische Parametrisierungen

## Vorteile

- einfach zu berechnen, relativ gut annäherbar
- formulierbar als ein Optimierungsproblem
- lösbar durch ein PDE, approximierbar durch verschiedene Methoden
- führt zu einem Linearen Gleichungssystem
- vermindern Verzerrungen im Sinne, dass sie *Dirichlet* Energie minimieren
- *Dirichlet* Energie, beliebtes Maß um *Verzerrung* zu messen

# Gradient und Divergenz

Differentialoperator Gradient:  $\nabla$

$$\nabla f(x, y, z) = \text{grad } f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \end{pmatrix}$$

Vektorfeld zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion

# Gradient und Divergenz

Differentialoperator Gradient:  $\nabla$

$$\nabla f(x, y, z) = \text{grad } f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \end{pmatrix}$$

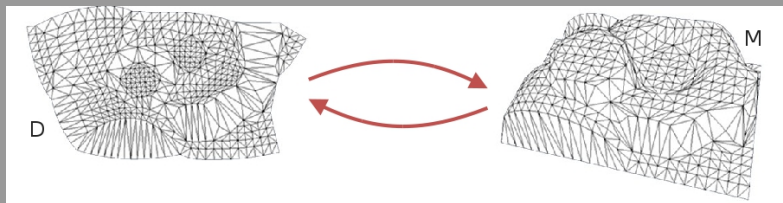
Vektorfeld zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion

Divergenz:  $\nabla \cdot \vec{F}$  oder  $\text{div } \vec{F}$

- bezeichnet ein bestimmtes Funktional eines Vektorfeldes
- die Divergenz für jede Stelle gibt die Tendenz an, ob ein Teilchen in der Nähe zu diesem Punkt hin- bzw. von diesem Punkt wegzeigt
- sagt aus, ob und wo das Vektorfeld Quellen  $\nabla \cdot \vec{F} > 0$
- oder Senken hat  $\nabla \cdot \vec{F} < 0$
- $\nabla \cdot \vec{F} = 0$  ist das Feld quellenfrei

# Erstellen einer Parametrisierung

- Oberfläche  $M \subset \mathbb{R}^3$
- parameter domain  $D \subset \mathbb{R}^2$
- Menge Knoten  $V$ , Kanten  $E$ , Dreiecke  $F$
- $M = (V, F)$



# Erstellen einer Parametrisierung

- Koordinatenfunktion  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^3$
- Abbildung:  $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$
- Koordinaten  $(u_i, v_i)$  werden jedem Knoten  $i \in V$  zugewiesen
- aus Koordinatenfunktionen  $u, v : M \rightarrow D$ ,  
zwei Gradientenfelder erstellen  $\nabla u, \nabla v : F \rightarrow \mathbb{R}^3$
- gesucht Koordinatenfunktionen  $u, v : V \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\nabla v = R \nabla u$$

- $R$ :  $90^\circ$  entgegen dem Uhrzeigersinn der Flächennorm gedreht

# Formulierung als Optimierungsproblem

- es ist einfacher zwei Vektorfelder zu  $g_1, g_2 : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  zu finden

$$g_2 = Rg_1$$

- gesucht sind die Koordinatenfunktionen  $(u, v)$  dessen Gradientenfelder die Richtungsfelder  $g_1, g_2$  am besten approximieren

$$\min_{(u, v)} \int_M \|\nabla u - g_1\|^2 + \|\nabla v - g_2\|^2$$

# Formulierung als Optimierungsproblem

- es ist einfacher zwei Vektorfelder zu  $g_1, g_2 : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  zu finden

$$g_2 = Rg_1$$

- gesucht sind die Koordinatenfunktionen  $(u, v)$  dessen Gradientenfelder die Richtungsfelder  $g_1, g_2$  am besten approximieren

$$\min_{(u, v)} \int_M \|\nabla u - g_1\|^2 + \|\nabla v - g_2\|^2$$

- die Lösung des Problems sind ein System aus *Poisson* Gleichungen

$$\Delta u = \nabla \cdot g_1 \quad \Delta v = \nabla \cdot g_2$$

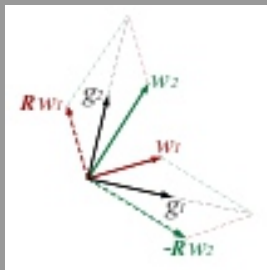
- das System kann mit Divergenz und Laplace-Operatoren gelöst werden



# Berechnung der Vektorfelder $g_1$ und $g_2$

- $g_1$  und  $g_2$  sollten die Eigenschaften von *konformen* Abbildungen besitzen, d.h. überall orthogonal
- gegeben zwei beliebige Vektorfelder  $w_1$  und  $w_2$ , kann man  $g_1$  und  $g_2$  folgendermaßen erzeugen

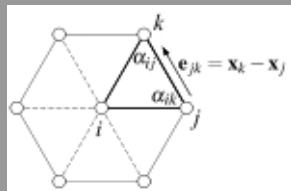
$$g_1 = \frac{1}{2}(w_1 - R w_2) \quad g_2 = \frac{1}{2}(w_2 - R w_1)$$



# Erweiterung des Linearen Gleichungssystems

- bereits vorhandene Verfahren lösen das System indem die Ränder der Abbildungen *konvex* sind, d.h. auf den Einheitskreis abbilden
- Die Divergenz des Tangentenvektorfeldes  $g$  an dem Knoten  $i \in V$  ist gegeben durch

$$\operatorname{div}_i g = \sum_{(j,k) \in LK_i} g \cdot R e_{jk}$$



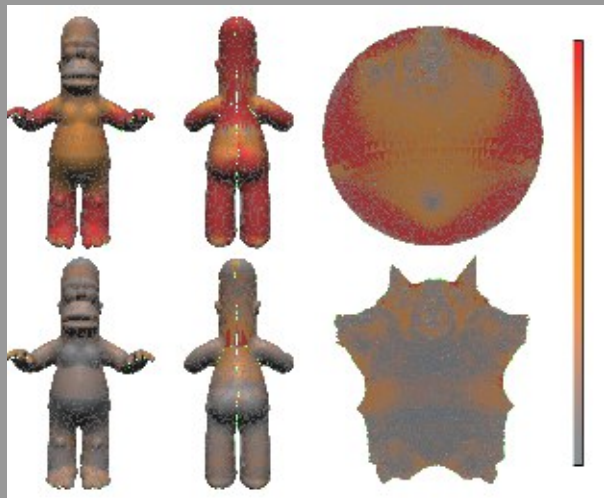
- wobei  $LK_i$  der Link eines Knotens ist - die Menge aller verbundenen Kanten die  $i$  benachbart

# Erweiterung des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta t \end{bmatrix} + \sum_{(j,k) \in Lki} \begin{bmatrix} t_j - t_k \\ s_k - s_j \end{bmatrix} \right)$$

- mit  $w_1 = \nabla s$  und  $w_2 = \nabla t$
- für ein Mesh mit  $n$  Knoten, ergibt dies ein  $n \times n$  Lineares Gleichungssystem, eins für  $u$  und eins für  $v$
- das Lösen Gleichungssysteme dieser Art ist in Desbrun *et al.* [2002] beschrieben

## Erweiterung des Linearen Gleichungssystems



# Nicht- Lineare Optimierung

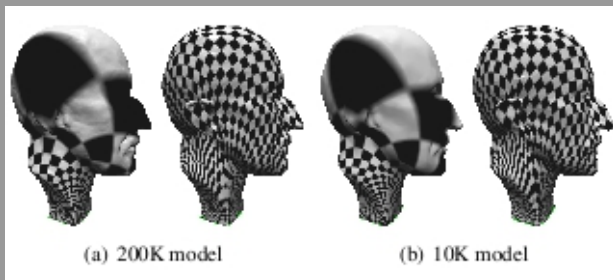
## Wie kann man die Verzerrung von Flächen minimieren?

- wünschenswert ein Kompromiss aus Winkelerhaltung und Flächenerhaltung
- lineare Methoden sind einfacher zu implementieren und oftmals schneller, jedoch auf Kosten von Verzerrung der Fläche
- Ziel: Minimierung einer nicht- linearen Energiefunktion  $E$ , indem man iterativ eine kleine Anzahl von linearen Systemen löst ( $3 \sim 5$ )
- anstatt zu versuchen mit der Parametrisierungsfunktion  $\phi^*$  die Energiefunktion  $E$  zu minimieren, versucht man die Matrix  $L^*$  zu finden, die  $\phi^*$  erzeugt

# Nicht- Lineare Optimierung

- ausgehend davon dass jeder innerer Knoten von  $\phi^*$  sich schon an dem Minimum von  $E$  im Dreieck befindet
- man berechnet für eine initiale Parametrisierung  $\phi_0$  den Zielort innerhalb eines Dreiecks wo  $E$  minimal ist und erhält damit einen Durchschnittswert für eine Gewichtung
- bei jedem iterativen Schritt wird die Matrix Reihe für Reihe erzeugt, bis sie schnell konvergiert
- der Fixpunkt ist dann das Minimum von  $E$
- der Ort des Minimums wird mit der Nelder-Mead Simplex Methode berechnet

# Ergebnisse



- die nicht- lineare Optimierungsmethode reduziert Verzerrung in 4 Iterationsschritten
- gleich gut bei verschiedenen Auflösungen

## Ergebnisse

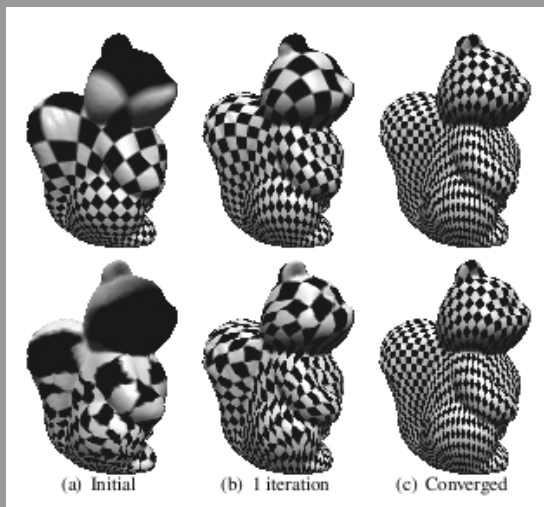


Figure: mean value (oben) oder random (unten) das System konvergiert schnell



# Noch Fragen?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!