L_1-Medialskelett einer Punktwolke

Christian Neuenroth

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

7. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
   - Motivation
   - L_1-Medialskelett

Motivation

- L_1-Medialskelett als Skelettdarstellung für 3D Punktwolken.
- Der L_1-Median ist ein robuster globaler Mittelpunkt von beliebigen Mengen von Punkten.
- Vorteil dieses Ansatzes: sehr geringe Anforderungen an die Eingabedaten.

Motivation

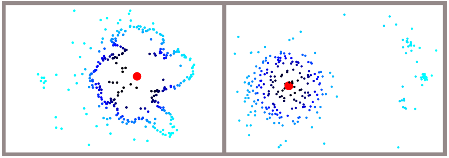


Abbildung: Mediane zweier Punktmengen

1. Einleitung
   - Motivation
   - L_1-Medialskelett

Definition

Definition 1.1

Gegeben sei ein unorganisiertes und unorientiertes Set von Punkten $Q = \{q_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^3$.
Wir definieren das L_1-Medialskelett als Punkte $X = \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^3$, sodass

$$\underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \, \theta \left(\|x_i - q_j\|\right) + R(X)$$

Analyse

$$\underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \, \theta \left(\|x_i - q_j\| \right) + R(X)$$

Analyse

$$\underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \, \theta \left(\|x_i - q_j\| \right) + R(X)$$

L_1-Median

Analyse

$$\underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \, \theta\left(\|x_i - q_j\|\right) + R(X)$$

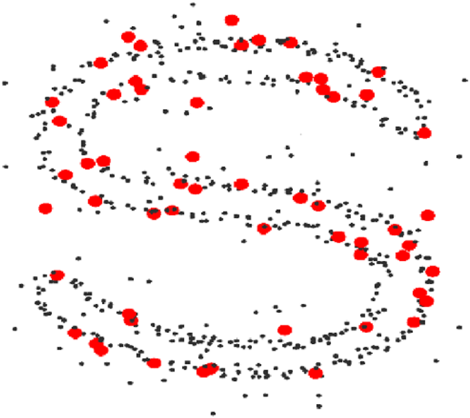
Lokalisierung: $\theta(r) = e^{-r^2/(h/2)^2}$ mit Supportradius h

Analyse

$$\underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \,\theta\left(\|x_i - q_j\|\right) + R(X)$$

Regularisierung um Clusterbildung innerhalb X zu verhindern

Konditionale Regularisierung



Konditionale Regularisierung

Modifikation der Hauptkomponentananalyse.

Konditionale Regularisierung

Modifikation der Hauptkomponentananalyse.

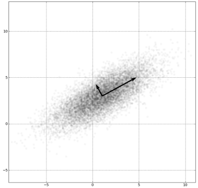


Abbildung: PCA

Konditionale Regularisierung

Für jeden Punkt x_i berechnen wir die gewichtete Covarianzmatrix

$$C_i = \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \theta\left(\|x_i - x_{i'}\|\right)\left(x_i - x_{i'}\right)\left(x_i - x_{i'}\right)^T$$

Konditionale Regularisierung

Für jeden Punkt x_i berechnen wir die gewichtete Covarianzmatrix

$$C_i = \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \theta\left(\|x_i - x_{i'}\|\right)\left(x_i - x_{i'}\right)\left(x_i - x_{i'}\right)^T$$

und die Eigenwerte $\lambda_i^0 \leq \lambda_i^1 \leq \lambda_i^2$

Konditionale Regularisierung

Nun definieren wir

$$\sigma_i = \sigma(x_i) = \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^0 + \lambda_i^1 + \lambda_i^2}.$$

Je näher σ_i an 1 ist, desto näher liegen die Punkte um x_i entlang eines Pfades.

Konditionale Regularisierung

Definition 1.2

Die konditionale Regularisierung ist definiert durch

$$R(X) = \sum_{i \in I} \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{\theta\left(\|x_i - x_{i'}\|\right)}{\sigma_i \|x_i - x_{i'}\|},$$

wobei $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ balancierungs Konstanten sind.

2 Algorithmus
- Operatorgleichung
- Fixpunktiteration
- Iterative Kontraktion
- Dichtebasierte Gewichte
- Rezentrieren

Operator

Seien $Q = \{q_j\}_{j \in J}$ Eingabedaten (raw scan). Wie wird das L_1-Medialskelett effizient bestimmt?

Operator

Seien $Q = \{q_j\}_{j \in J}$ Eingabedaten (raw scan). Wie wird das L_1-Medialskelett effizient bestimmt?
Formulierung als Projektion:

$$C = \{c_i\}_{i \in I}, \quad X = \{x_i\}_{i \in I}$$

Operator

Seien $Q = \{q_j\}_{j \in J}$ Eingabedaten (raw scan). Wie wird das L_1-Medialskelett effizient bestimmt?
Formulierung als Projektion:

$$C = \{c_i\}_{i \in I}, \quad X = \{x_i\}_{i \in I}$$

$$G(C) = \underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \, \theta\left(\|c_i - q_j\|\right) + \sum_{i \in I} \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{\theta\left(\|c_i - x_{i'}\|\right)}{\sigma_i \, \|c_i - c_{i'}\|}$$

Operator

Sei MS das L_1-Medialskelett,

$$MS = \underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \, \theta\left(\|x_i - q_j\|\right) + \sum_{i \in I} \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{\theta\left(\|x_i - x_{i'}\|\right)}{\sigma_i \|x_i - x_{i'}\|}$$

Operator

Sei MS das L_1-Medialskelett,

$$MS = \underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \, \theta\left(\|x_i - q_j\|\right) + \sum_{i \in I} \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{\theta\left(\|x_i - x_{i'}\|\right)}{\sigma_i \|x_i - x_{i'}\|}$$

$$\Rightarrow MS = G(MS)$$

Iterationsvorschrift

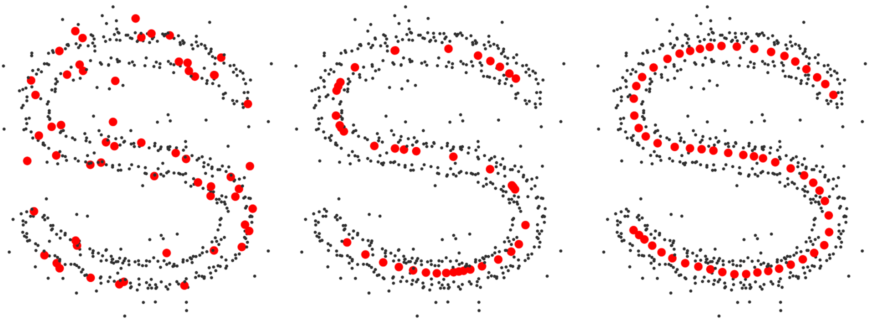
Definition 2.1

Sei $X^k = \{x_i^k\}_{i \in I}$, $k = 0, 1, \ldots$ der aktuelle Zustand, $X^0 =$ zufällige Teilmenge von Q.

$$x_i^{k+1} = \frac{\sum_{j \in J} q_j \alpha_{ij}^k}{\sum_{j \in J} \alpha_{ij}^k} + \mu \sigma(x_i^k) \frac{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \left(x_i^k - x_{i'}^k\right) \beta_{ii'}^k}{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \beta_{ii'}^k}$$

$$\text{mit } \alpha_{ij}^k = \frac{\theta\left(\left\|x_i^k - q_j\right\|\right)}{\left\|x_i^k - q_j\right\|}, \; \beta_{ii'}^k = \frac{\theta\left(\left\|x_i^k - x_{i'}^k\right\|\right)}{\left\|x_i^k - x_{i'}^k\right\|^2}, \; \mu \in [0, 1/2)$$

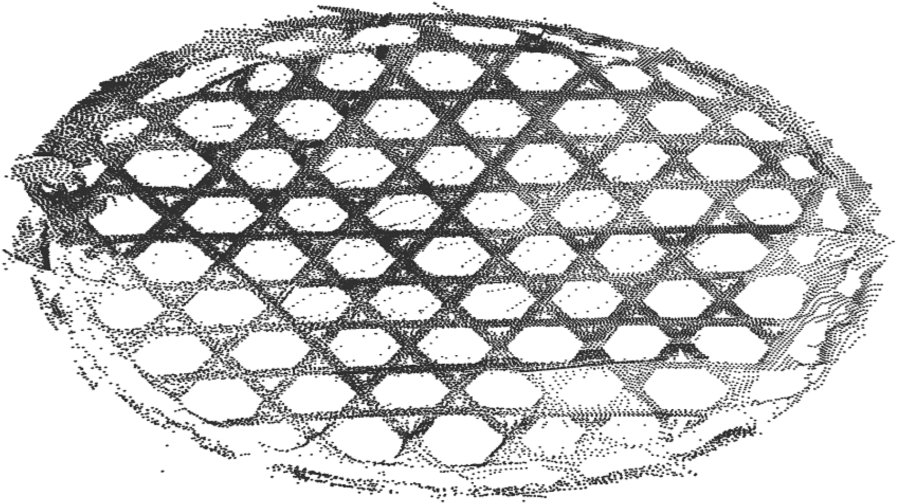
Das richtige μ



(a) input (b) $\mu = 0,1$ (c) $\mu = 0,35$

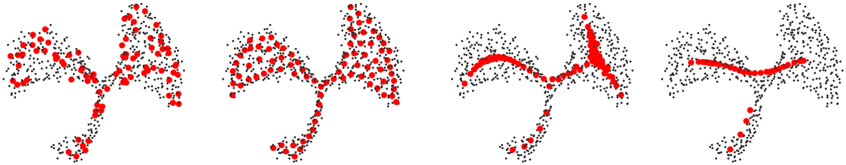
Abbildung: Verschiedene μ

Beispiel



Das richtige h

Sei $h_0 = 2d_{bb}/\sqrt[3]{|J|}$ mit d_{bb} die Diagonale von Q's Bounding Box.



(a) input (b) $h = h_0$ (c) $h = 2h_0$ (d) $h = 3h_0$

Abbildung: Verschiedene h

2 Algorithmus

- Operatorgleichung
- Fixpunktiteration
- Iterative Kontraktion
- Dichtebasierte Gewichte
- Rezentrieren

Übersicht

- Ein h kann nicht für alle Formen ideal sein!
- Färbe die Punkte (Grün, Blau, Rot) und wiederhole Fixpunktiteration mit größeren h und grünen Punkten fix.
- $h_{i+1} = h_i + 0.5h_0,\ i = 0, 1, \ldots$

Grünfärbung

- Berechne für jeden nicht grünen Punkt:

$$\sigma^K(x_i) = \sum_{j \in Knn(i)} \sigma(x_j)/K$$

wobei $Knn(i)$ die K nächsten Nachbarn von x_i sind. $x_i \in Knn(i)$.

Grünfärbung

- Berechne für jeden nicht grünen Punkt:

$$\sigma^K(x_i) = \sum_{j \in Knn(i)} \sigma(x_j)/K$$

  wobei $Knn(i)$ die K nächsten Nachbarn von x_i sind. $x_i \in Knn(i)$.
- Alle x_i mit $\sigma^K(x_i) > 0,9$ sind Kandidaten für grüne Punkte.

Grünfärbung

- Berechne für jeden nicht grünen Punkt:

$$\sigma^K(x_i) = \sum_{j \in Knn(i)} \sigma(x_j)/K$$

  wobei $Knn(i)$ die K nächsten Nachbarn von x_i sind. $x_i \in Knn(i)$.
- Alle x_i mit $\sigma^K(x_i) > 0,9$ sind Kandidaten für grüne Punkte.
- Bestimmen den seed point, den Punkt mit dem höchsten σ^K und beginnen bei diesem.

Grünfärbung

- Bilde eine Kette von Punkten, sodass

$$x_1 = \underset{y \in Knn(0)}{\operatorname{argmax}} \cos(\angle(domPCA, x_0 y))$$

$$\cos(\angle(x_i x_{i-1}, x_i x_{i+1})) \leq -0.9, \quad i = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Grünfärbung

- Bilde eine Kette von Punkten, sodass

$$x_1 = \underset{y \in Knn(0)}{\operatorname{argmax}} \cos(\angle(domPCA, x_0 y))$$

$$\cos(\angle(x_i x_{i-1}, x_i x_{i+1})) \leq -0.9, \quad i = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

- Stop bei x_j, falls keinen Punkt in der lokalen Nachbarschaft(Radius h) die Bedingung erfüllt.

Grünfärbung

- Bilde eine Kette von Punkten, sodass

$$x_1 = \operatorname*{argmax}_{y \in Knn(0)} \cos(\angle(domPCA, x_0 y))$$

$$\cos(\angle(x_i x_{i-1}, x_i x_{i+1})) \leq -0.9, \quad i = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

- Stop bei x_j, falls keinen Punkt in der lokalen Nachbarschaft(Radius h) die Bedingung erfüllt.
- Länge mindestens fünf Punkte: $\Rightarrow$ grün färben, sonst rot.
- Beginne mit dem nächsten seed point.

Blaufärbung

Blaufärbung

- Zu jedem Endpunkt e einer grünen Kette wird ein Brückenpunkt b bestimmt (wenn existent) und blau gefärbt.

Blaufärbung

- Zu jedem Endpunkt e einer grünen Kette wird ein Brückenpunkt b bestimmt (wenn existent) und blau gefärbt.

$$b = \operatorname{argmin}\left\{\|e-b\| \,\middle|\, \angle\left(\text{Zweigrichtung}, \vec{eb}\right) < 90^\circ,\ \|e-b\| < h\right\}$$

Weitere Regeln

- Zwei oder mehr Brückenpunkte in einer lokale Nachbarschaft werden einen Punkt kontrahiert und grün gefärbt.

Weitere Regeln

- Zwei oder mehr Brückenpunkte in einer lokale Nachbarschaft werden einen Punkt kontrahiert und grün gefärbt.
- Rote Punkte werden entfernt, wenn sie nach aber nicht entlang des Zweiges liegen oder wenn es keine Punkte in deren Nachbarschaft gibt.
- Nachdem alle Punkte grün sind, wird noch down-sampling und glätten durchgeführt.

Dichte

Dichte

Definition 2.2 (Dichte)

$$d_j = 1 + \sum_{j' \in J \setminus \{j\}} \theta\left(\left\|q_j - q_{j'}\right\|\right)$$

$$\text{mit } \theta(r) = e^{-r^2/(h_d/2)^2}, \quad h_d = h_0/2$$

Dichte

Definition 2.2 (Dichte)

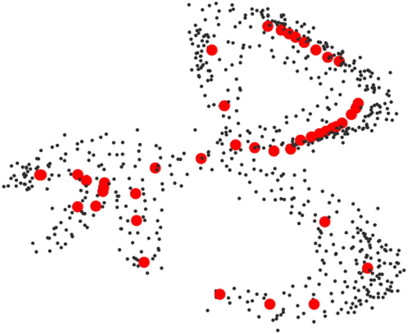
$$d_j = 1 + \sum_{j' \in J \setminus \{j\}} \theta\left(\left\| q_j - q_{j'} \right\|\right)$$

$$\text{mit } \theta(r) = e^{-r^2/(h_d/2)^2}, \quad h_d = h_0/2$$

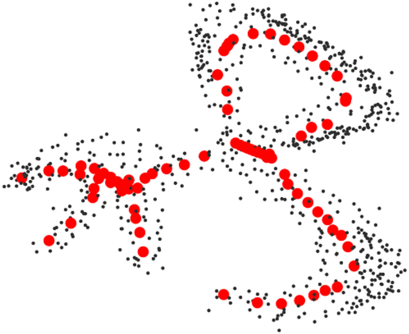
Definition 2.3 (Iterationsvorschrift)

$$x_i^{k+1} = \frac{\sum_{j \in J} q_j \alpha_{ij}^k / d_j}{\sum_{j \in J} \alpha_{ij}^k / d_j} + \mu \sigma(x_i^k) \frac{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \left(x_i^k - x_{i'}^k\right) \beta_{ii'}^k}{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \beta_{ii'}^k}$$

Beispiel



(a) Ungewichted



(b) Mit dichtebasierten Gewichten

Abbildung: Beispiel dichtebasierter Gewichtung

2 Algorithmus

- Operatorgleichung
- Fixpunktiteration
- Iterative Kontraktion
- Dichtebasierte Gewichte
- Rezentrieren

Rezentrierung mit Elipsen

Rezentrierung mit Elipsen

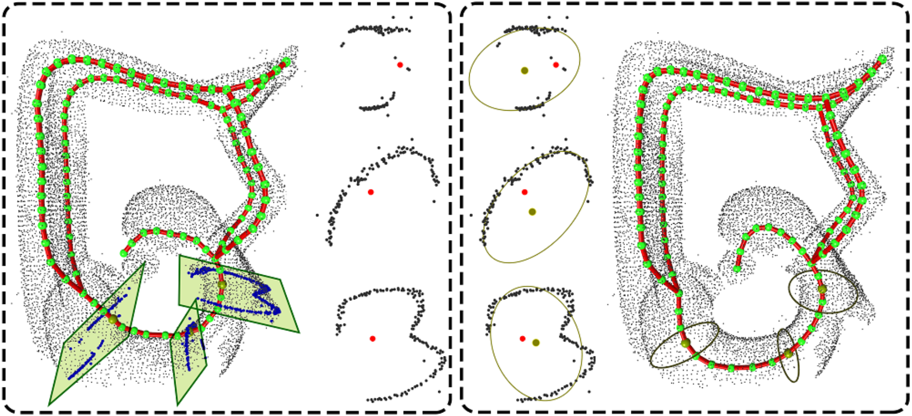


Abbildung: Skeleton Rezentrierung mit Elipsen

3 Ergebnisse
- Rekonstruktionen
- Vergleich zu ROSA

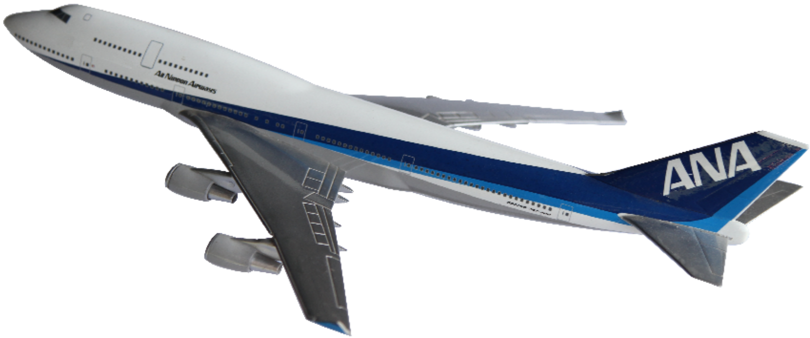
Parameter

Parameter	μ	h_0	Δh	h_d	K
Standardwert	$0,35$	$2d_{bb}/\sqrt[3]{\lvert J\rvert}$	$h_0/2$	$h_0/2$	5

Objekt 1

Objekt 2

Objekt 3



Objekt 4

Laufzeit

Plattform: Intel Core i7-2700K @ 3,50GHz, 8GB DDR3 RAM

L_1-Medialskelett: $|Q| = 100.000$, 60 Sekunden

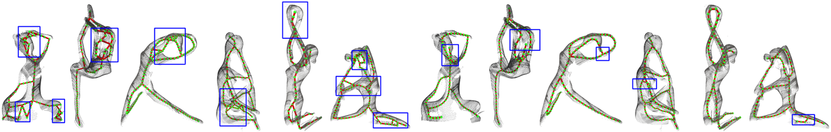
ROSA: $|Q| = 10.000$, 300 Sekunden

Modelvergleich

(a) Objekt (b) Scan

Abbildung: 3D Objekt mit Scan

Modelvergleich



(a) ROSA (b) L_1-Medialskelett

Abbildung: Skelettrekonstruktion