



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN

---

## **Seminar „Computergrafik“**

Prof. Dr. Winfried Kurth  
Lehrstuhl Computergrafik und Ökologische Informatik  
Abteilung Ökoinformatik, Biometrie und Waldwachstum  
Georg-August-Universität Göttingen  
Winter 2013/2014

Dokumentation zum Vortrag

### **Das $L_1$ -Medialskelett einer Punktwolke**

**Christian Neuenroth**

Christian Neuenroth  
Matrikelnummer: 20978308  
Waldisstraße 11a  
37242 Bad Sooden-Allendorf

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	$L_1$ -Medialskelett . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Algorithmus</b>	<b>3</b>
2.1	Übersicht . . . . .	3
2.2	Regularisierung . . . . .	3
2.3	Operatorgleichung . . . . .	6
2.3.1	Projektion . . . . .	6
2.3.2	Fixpunktiteration . . . . .	7
2.4	Iterative Kontraktion . . . . .	9
2.4.1	Grünfärbung . . . . .	10
2.4.2	Blaufärbung . . . . .	11
2.4.3	Weitere Regeln . . . . .	11
2.5	Verbesserungen . . . . .	13
2.5.1	Dichtebasierte Gewichtung . . . . .	13
2.5.2	Rezentrierung . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>15</b>
3.1	Vergleich zu ROSA . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>V</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>VI</b>



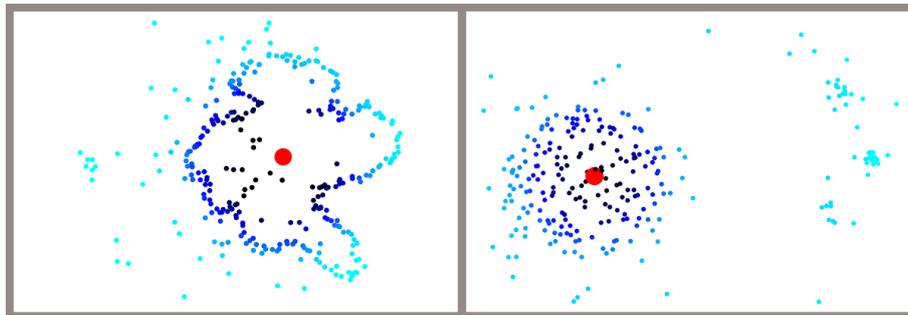
# 1 Einleitung

Diese Ausarbeitung zum Thema „Das  $L_1$ -Medialskelett einer Punktwolke“ im Seminar „Computergrafik“ orientiert sich an dem Paper [HWCO<sup>+</sup>13]. Falls nicht anders angegeben, so stammen alle Erkenntnisse und Grafiken aus diesem Paper oder der Website der Autoren.

## 1.1 $L_1$ -Medialskelett

Wir führen das  $L_1$ -Medialskelett als Linien-Skelettdarstellung für 3D Punktwolken ein.

Der  $L_1$ -Median ist ein robuster globaler Mittelpunkt von beliebigen Mengen von Punkten. Siehe dazu Abbildung 1.1.



**Abbildung 1.1:** Mediane zweier Punktmengen

Durch eine Lokalisation des  $L_1$ -Medians ist es somit möglich ein eindimensionales Linien-Skelett von geometrischen Formen zu erhalten. Im Folgenden wird eine lokalisierte Variante des  $L_1$ -Medians mit konditioneller Regularisierung eingeführt.

## 1 Einleitung

---

**Definition 1.1** ( $L_1$ -Medianskelett):

Gegeben sei ein unorganisiertes und unorientiertes Set von Punkten  $Q = \{q_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^3$ . Wir definieren das  $L_1$ -Medianskelett als Punkte  $MS = \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^3$ , sodass

$$MS = \operatorname{argmin}_X \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \theta(\|x_i - q_j\|) + R(X), \quad (1.1)$$

wobei  $\theta(r) = e^{-r^2/(h/2)^2}$  eine schnell fallende, glatte Funktion mit Supportradius  $h$  ist und  $h$  die Größe der lokalen Nachbarschaft definiert.

Analysieren wir das  $L_1$ -Medianskelett.

$$\operatorname{argmin}_X \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \theta(\|x_i - q_j\|) + R(X)$$

**Anmerkung:**

Der erste Term ist die Definition des lokalisierten  $L_1$ -Medians. Der zweite Term, die Regularisierung, sorgt dafür, dass Clusterbildung innerhalb der Menge  $X$  verhindert wird. Die einzelnen Punkte in  $X$  werden durch die Regularisierung „auseinander gedrückt“. Insgesamt erreichen wir hiermit, dass es keinen einzelnen Punkt (globaler Median) sondern mehrere lokale Punkte existieren, die ein Linien-Skelett beschreiben.

Die Vorteile dieses Ansatzes gegenüber anderen aktuellen Methoden sind zum Einem die sehr geringen Anforderungen an die Input-Daten. Diese Methode kann direkt auf Rohdaten von 3D Scannern angewendet werden. Zum Anderen werden wir in der späteren Analyse sehen, dass das  $L_1$ -Medianskelett zum Großteil bessere Ergebnisse liefert als der Algorithmus ROSA [TZCO09] und zudem auch noch eine wesentlich schnellere Rechenzeit ausweist.

## 2 Algorithmus

In diesem Kapitel wird ein Algorithmus präsentiert, der mit Hilfe des  $L_1$ -Medialskelettes von beliebigen Punktwolken  $Q$  ein eindimensionales Linien-Skelett von der  $Q$  zugrundeliegenden geometrischen Form berechnet.

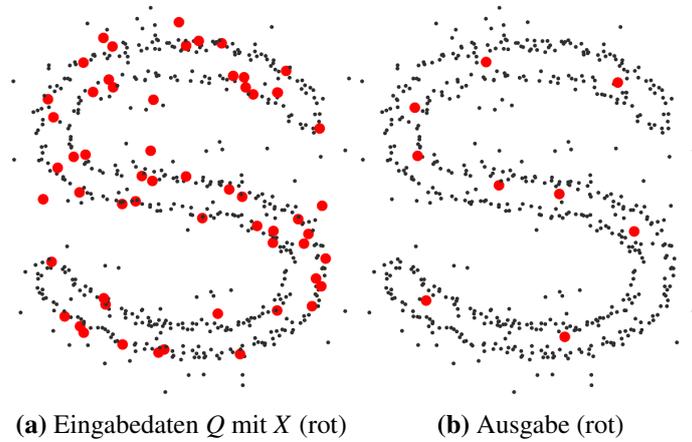
### 2.1 Übersicht

Die Eingabe für den Algorithmus ist eine unorganisierte Menge an Punkten  $Q = \{q_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^3$ . Typischerweise ist diese Menge unorientiert, ungleich verteilt und enthält Ausreißer und Messfehler. Als Ausgabe erhalten wir ein Linien-Skelett, welches ein eindimensionales lokales Zentrum der  $Q$  zugrundeliegenden geometrischen Form beschreibt. Die Hauptschritte sind wie folgt:

- Es wird eine zufällige Teilmenge von Punkten  $X \subset Q$  ausgewählt.
- Jeder dieser Punkte wird iterativ projiziert und somit neu im Zentrum seiner lokalen Nachbarschaft ausgerichtet.
- Die Größe der lokalen Nachbarschaft wird schrittweise reduziert um auch feinere Strukturen abbilden zu können.
- Wenn die Eingabedaten stark verzerrt sind, so ist es auch das Ergebnis des Algorithmus. Daher wird in dem Abschnitt 2.5 auf weitere Verbesserungen eingegangen.

### 2.2 Regularisierung

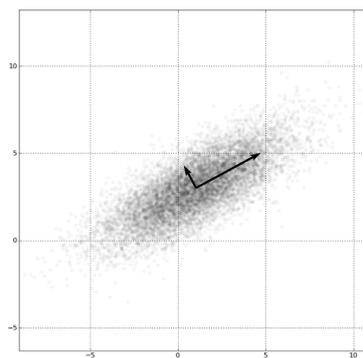
In der Definition 1.1 haben wir eine Regularisierung eingeführt welche verhindern soll, dass wir als Lösung des argmin Operators eine Menge erhalten, die nur aus einem oder sehr wenigen verschiedenen Punkten besteht. Siehe dazu Abbildung 2.1.



**Abbildung 2.1:** Beispiel für  $L_1$ -Medialskelett ohne Regularisierung

Wir benutzen für die Regularisierung eine Modifikation der Hauptkomponentenanalyse [Li09]. Die Hauptkomponentenanalyse, auch bekannt als Hauptachsentransformation oder Singulärwertzerlegung oder englisch Principal Component Analysis (PCA) ist ein Verfahren der multivariaten Statistik. Dieses dient dazu, umfangreiche Datensätze zu strukturieren, zu vereinfachen und zu veranschaulichen, indem eine Vielzahl statistischer Variablen durch eine geringere Zahl möglichst aussagekräftiger Linearkombinationen, den sogenannten „Hauptkomponenten“ angenähert werden.

In Abbildung 2.2 ist ein Beispiel in dem zu einer Menge von Punkten die zwei Haupteffekte, die dieser Menge zugrunde liegen, angegeben sind.



**Abbildung 2.2:** Hauptkomponentenanalyse [Wik14]

Wir benutzen nun die klassisch gewichtete Hauptkomponentenanalyse um die Zweige unseres Skelettes zu erkennen. Dazu benötigen wir die gewichtete Covarianzmatrix.

**Definition 2.1** (gewichtete Covarianzmatrix):

Sei  $X \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^3$ . Für jeden Punkt  $x_i$  ist die gewichtete Covarianzmatrix definiert durch

$$C_i = \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \theta(\|x_i - x_{i'}\|) (x_i - x_{i'}) (x_i - x_{i'})^T.$$

Für jeden Punkt  $x_i$  berechnen wir die gewichtete Covarianzmatrix, sowie die Eigenwerte  $\lambda_i^0 \leq \lambda_i^1 \leq \lambda_i^2$  der Eigenvektoren  $v_i^0 \leq v_i^1 \leq v_i^2$ . Diese Eigenvektoren bilden eine Orthonormalbasis, die sogenannten Hauptkomponenten. Mit den Eigenvektoren definieren wir den Bündelungsgrad (directionality degree).

**Definition 2.2** (Bündelungsgrad):

Sei  $X \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^3$ . Für jeden Punkt  $x_i$  seien  $\lambda_i^0 \leq \lambda_i^1 \leq \lambda_i^2$  die Eigenwerte der gewichteten Covarianzmatrix  $C_i$ . Der Bündelungsgrad für jedes  $x_i$  ist definiert durch

$$\sigma_i = \sigma(x_i) = \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^0 + \lambda_i^1 + \lambda_i^2}.$$

**Anmerkung:**

Je näher  $\sigma_i$  an 1 ist, desto kleiner sind  $\lambda_i^0$  und  $\lambda_i^1$  in Relation zu  $\lambda_i^2$  und desto näher liegen die Punkte um  $x_i$  entlang eines Pfades.

Mithilfe des Bündelungsgrades definieren wir unsere Regularisierung, die sogenannte Abstoßungskraft.

**Definition 2.3** (Abstoßungskraft):

Sei  $X \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^3$ . Die konditionale Regularisierung (Abstoßungskraft) ist definiert durch

$$R(X) = \sum_{i \in I} \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{\theta(\|x_i - x_{i'}\|)}{\sigma_i \|x_i - x_{i'}\|},$$

wobei  $\{\gamma_i\}_{i \in I}$  wählbare balancierungs Konstanten sind.

### 2.3 Operatorgleichung

Nun stellt sich die Fragen, wie wir das  $L_1$ -Medialskelett von einer beliebigen Menge  $Q = \{q_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^3$  effizient bestimmen.

Hierzu wird in [HWC0<sup>+</sup>13] und [LCOLTE07] eine Projektion definiert, zu derer das  $L_1$ -Medialskelett ein Fixpunkt ist. Anschließend wird durch Fixpunktiteration das  $L_1$ -Medialskelett bestimmt. Dieses Verfahren werden wir in diesem Abschnitt aufgreifen.

#### 2.3.1 Projektion

**Definition 2.4** (Lokal Optimaler Projektionsoperator):

Sei  $C = \{c_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^3$  eine beliebige Punktmenge. Wir definieren den Projektionsoperator  $G$  durch

$$G(C) = \operatorname{argmin}_{X=\{x_i\}_{i \in I}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \theta(\|c_i - q_j\|) + \sum_{i \in I} \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{\theta(\|c_i - c_{i'}\|)}{\sigma_i \|c_i - x_{i'}\|}.$$

**Lemma 2.5:**

Sei  $MS$  das  $L_1$ -Medialskelett und  $G$  unser Lokal Optimaler Projektionsoperator. Dann gilt

$$MS = G(MS).$$

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus der Definition des  $L_1$ -Medialskeletts,

$$MS = \operatorname{argmin}_X \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \theta(\|x_i - q_j\|) + \sum_{i \in I} \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{\theta(\|x_i - x_{i'}\|)}{\sigma_i \|x_i - x_{i'}\|}.$$

□

### 2.3.2 Fixpunktiteration

Im Folgenden werden wir die Fixpunktiteration zur Bestimmung des  $L_1$ -Medianskeletts herleiten. Wir werden an dieser Stelle nur auf die Ideen und wichtigen Erkenntnisse eingehen. Für alle technischen Details z.B. für Konvergenzraten der Iteration sei auf [LCOLTE07] und [HWCO<sup>+</sup>13] verwiesen.

**Satz 2.6** (Fixpunktgleichung):

Sei  $MS = \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^3$  das  $L_1$ -Medianskelett und  $G$  unser Lokal Optimaler Projektionsoperator. Dann gilt

$$\sum_{j \in J} (x_i - q_j) \frac{\theta(\|x_i - q_j\|)}{\|x_i - q_j\|} - \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} (x_i - x_{i'}) \frac{\theta(\|x_i - x_{i'}\|)}{\sigma_i \|x_i - x_{i'}\|^2} = 0 \quad \forall i \in I \quad (2.1)$$

*Beweis.* Sei  $C = \{c_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^3$  eine beliebige Punktmenge. Dann erfüllt  $Y = G(C)$  die folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} \nabla_X|_{X=Y} \left( \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \|x_i - q_j\| \theta(\|c_i - q_j\|) + \sum_{i \in I} \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{\theta(\|c_i - c_{i'}\|)}{\sigma_i \|c_i - c_{i'}\|} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (y_i - q_j) \frac{\theta(\|c_i - q_j\|)}{\|y_i - q_j\|} - \sum_{i \in I} \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} (c_i - y_{i'}) \frac{\theta(\|c_i - c_{i'}\|)}{\sigma_i \|c_i - y_{i'}\|^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{j \in J} (y_i - q_j) \frac{\theta(\|c_i - q_j\|)}{\|y_i - q_j\|} - \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} (c_i - y_{i'}) \frac{\theta(\|c_i - c_{i'}\|)}{\sigma_i \|c_i - y_{i'}\|^2} &= 0 \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Einsetzen von  $C = Y = MS$  liefert die Behauptung. □

Mit der Fixpunktgleichung können wir nun eine Iterationsvorschrift angeben.

**Satz 2.7** (Iteration):

Sei  $X^k = \{x_i^k\}_{i \in I}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  der aktuelle Zustand,  $X^0 =$  zufällige Teilmenge von  $Q$ . Dann finden wir mit folgender Iterationsvorschrift eine Lösung  $MS$  von  $Y = G(Y)$ .

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &= \frac{\sum_{j \in J} q_j \alpha_{ij}^k}{\sum_{j \in J} \alpha_{ij}^k} + \mu \sigma(x_i^k) \frac{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} (x_i^k - x_{i'}^k) \beta_{i'i}^k}{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \beta_{i'i}^k} \\ \text{mit } \alpha_{ij}^k &= \frac{\theta(\|x_i^k - q_j\|)}{\|x_i^k - q_j\|}, \beta_{i'i}^k = \frac{\theta(\|x_i^k - x_{i'}^k\|)}{\|x_i^k - x_{i'}^k\|^2}, \mu \in [0, 1/2) \end{aligned}$$

## 2 Algorithmus

---

*Beweis.* Wir definieren

$$\alpha_{ij} = \frac{\theta(\|x_i - q_j\|)}{\|x_i - q_j\|}, \quad \beta_{i' i'} = \frac{\theta(\|x_i - x_{i'}\|)}{\|x_i - x_{i'}\|^2}.$$

Unsere Balancierungs-Konstanten wählen wir so, dass

$$\mu = \frac{\gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \beta_{i' i'}}{\sigma_i^2 \sum_{j \in J} \alpha_{ij}} \quad \forall i \in I \text{ für ein } \mu \in [0, 1/2).$$

Wir werden mit diesen Definitionen die Fixpunktgleichung aus Satz 2.6 weiter umformen.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} (x_i - q_j) \frac{\theta(\|x_i - q_j\|)}{\|x_i - q_j\|} - \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{(x_i - x_{i'}) \theta(\|x_i - x_{i'}\|)}{\sigma_i \|x_i - x_{i'}\|^2} &= 0 \quad \forall i \in I \\ \Leftrightarrow \sum_{j \in J} (x_i - q_j) \alpha_{ij} - \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{(x_i - x_{i'}) \beta_{i' i'}}{\sigma_i} &= 0 \quad \forall i \in I \\ \Leftrightarrow x_i \sum_{j \in J} \alpha_{ij} = \sum_{j \in J} q_j \alpha_{ij} + \gamma_i \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \frac{(x_i - x_{i'}) \beta_{i' i'}}{\sigma_i} &\quad \forall i \in I \\ \Leftrightarrow x_i = \frac{\sum_{j \in J} q_j \alpha_{ij}}{\sum_{j \in J} \alpha_{ij}} + \gamma_i \frac{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} (x_i - x_{i'}) \beta_{i' i'}}{\sigma_i \sum_{j \in J} \alpha_{ij}} &\quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Definition von  $\mu$  einsetzen erhalten wir

$$x_i = \frac{\sum_{j \in J} q_j \alpha_{ij}}{\sum_{j \in J} \alpha_{ij}} + \mu \sigma_i \frac{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} (x_i - x_{i'}) \beta_{i' i'}}{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \beta_{i' i'}} \quad \forall i \in I. \quad (2.2)$$

Eine hinreichende Bedingung an die Gleichung 2.2 ist, dass  $0 \leq \mu \sigma_i \leq 1/2$ . Dies erreichen wir, wenn  $\mu \in [0, 1/2)$ . Wenn wir nun eine Fixpunktiteration anwenden zeigen wir die Behauptung. Für weitere technische Details sei auf [LCOLTE07] und [HWCO<sup>+</sup>13] verwiesen. □

Bevor wir die nächsten Schritte des Algorithmus weiter definieren sei schon mal auf Abbildung 2.3 verwiesen, in der die Ergebnisse für verschiedene Wahlen von  $\mu$  dargestellt sind. Hierbei stimmt die Fixpunktiteration mit  $\mu = 0$  mit der Fixpunktiteration ohne Regularisierung überein. Im folgenden wird für  $\mu$  der Wert 0,35 angenommen.

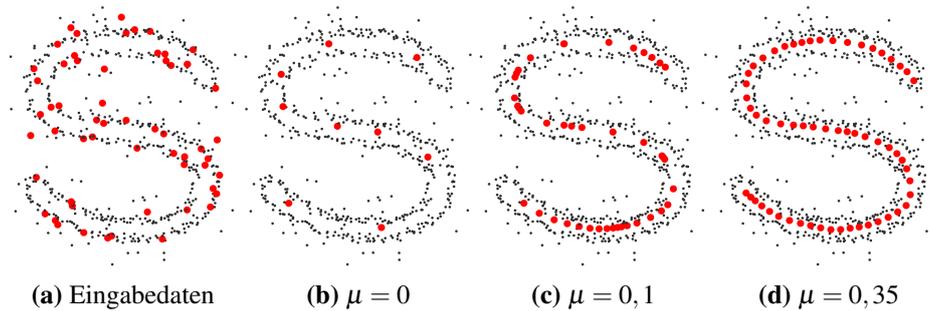


Abbildung 2.3: Beispiel für  $L_1$ -Medialskelett mit verschiedenen  $\mu$ .

## 2.4 Iterative Kontraktion

Nun haben wir eine Fixpunktiteration und könnten so das  $L_1$ -Medialskelett bestimmen. Allerdings haben wir in der Funktion  $\theta$  einen weiteren Parameter  $h$ . Dieser definiert die Größe unserer lokalen Nachbarschaft. Daher müssen wir uns auch hier Gedanken machen, wie  $h$  gewählt werden soll. In Abbildung 2.4 sind einige Beispiele für die Wahl von  $h$ . Hierbei sei  $h_0 = 2d_{bb}/\sqrt[3]{|J|}$  mit  $d_{bb}$  als Diagonale von  $Q$ 's Einhüllender Box.

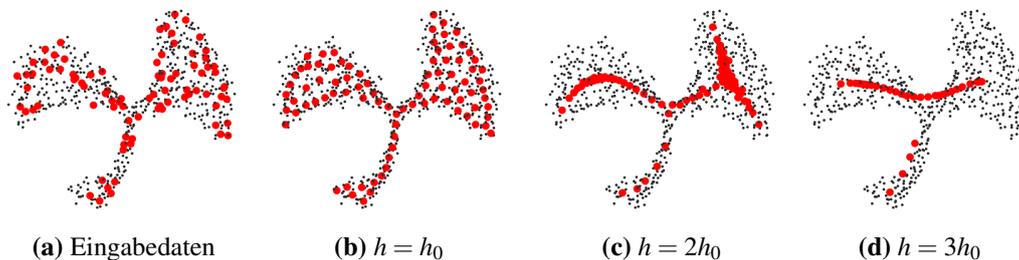


Abbildung 2.4: Ausgabe mit verschiedenen  $h$

Wie aus Abbildung 2.4 ersichtlich wird, kann ein festes  $h$  nicht für alle Formen ideal sein! Daher färben wir nach einer Fixpunktiteration die Punkte grün, blau oder rot und wiederholen anschließend die Fixpunktiteration mit größeren  $h$ , aber lassen die grün gefärbten Punkte fix. Hierzu definieren wir

$$h_{i+1} = h_i + 0,5h_0 \text{ für } i = 0, 1, \dots$$

und wählen wir für die  $i$ -te Fixpunktiteration  $h_i$  als Größe der lokalen Nachbarschaft. In den folgenden drei Abschnitten definieren wir die Regeln zum Färben.

## 2 Algorithmus

---

### 2.4.1 Grünfärbung

Wir suchen in den noch zu färbenden Punkten Zweige mit geringer Krümmung. Dazu benötigen wir noch folgende Definition.

**Definition 2.8** (Geglättetes  $\sigma$ ):

$$\sigma^K(x_i) = \sum_{j \in Knn(i)} \sigma(x_j) / K$$

wobei  $Knn(i)$  die  $K$  nächsten Nachbarn von  $x_i$  sind, wobei  $x_i \in Knn(i)$ .

**Anmerkung:**

Man sieht leicht ein, dass

$$\sigma^1(x_i) = \sigma(x_i) \quad \forall i \in I.$$

Für unsere Grünfärbung kommen nur Punkte  $x_i$  in Frage für die gilt  $\sigma^K(x_0) > 0,9$ . Alle anderen Punkte färben wir rot und betrachten sie nicht mehr in der Grünfärbephase. Um Zweige zu finden benötigen wir einen Startpunkt, die Saat. Die Saat ist der Punkt mit dem höchsten  $\sigma^K$ . Wenn wir keine Saat finden, so beginnen wir mit der Blaufärbung. Wenn wir eine Saat  $x_0$  haben so versuchen wir nun von diesem Punkt aus einen Zweig mit geringer Krümmung gemäß Definition 2.9 zu finden.

**Definition 2.9** (Zweigidentifikation / Bilden eines Zweiges um  $x_0$ ):

Sei  $domPCA$  der Eigenvektor der gewichteten Covarianzmatrix  $C_0$  von  $x_0$  mit dem größten Eigenwert. Der zweite Punkt eines Zweig um  $x_0$  ist definiert durch

$$x_1 = \operatorname{argmax}_{y \in Knn(0)} \cos(\angle(domPCA, \vec{x_0 y})) \quad (2.3)$$

Falls es keinen Punkt gibt, der Gleichung 2.3 erfüllt, so färbe  $x_0$  rot und beginne mit einer neuen Saat.

Seien nun  $x_{i-1}, x_i$  in unserem Zweig. Dann erweitern wir den Zweig um

$$x_{i+1} = \operatorname{argmax}_{y \in Knn(i)} \cos(\angle(x_{i-1} \vec{x_i}, \vec{x_i y})) \quad (2.4)$$

wenn gilt

$$\cos(\angle(x_{i-1} \vec{x_i}, \vec{x_i x_{i+1}})) \geq 0,9. \quad (2.5)$$

Äquivalent erweitern wir den Zweig in die andere Richtung. Dies machen wir solange, bis es keine Punkte in der lokalen Nachbarschaft (Radius  $h$ ) mehr gibt, die die Bedingung 2.5 erfüllen.

Wenn nun die Länge des Zweiges kleiner als fünf ist, so färben wir alle Punkte rot, ansonsten grün.

### 2.4.2 Blaufärbung

Zu jedem Endpunkt  $e$  eines Zweiges suchen wir einen Brückenpunkt  $b$  aus der Menge aller Punkten und färben diesen blau, wenn er existiert.

**Definition 2.10** (Brückenpunkt):

$$b = \operatorname{argmin} \left\{ \|e - b\| \mid \angle(\text{Zweigrichtung}, \vec{eb}) < 90^\circ, \|e - b\| < h \right\} \quad (2.6)$$

Diese Brückenpunkte sollen sicherstellen, dass unser  $L_1$ -Medialskelett nicht durch die Fixierung grüne Punkte in Gruppen zerfällt.

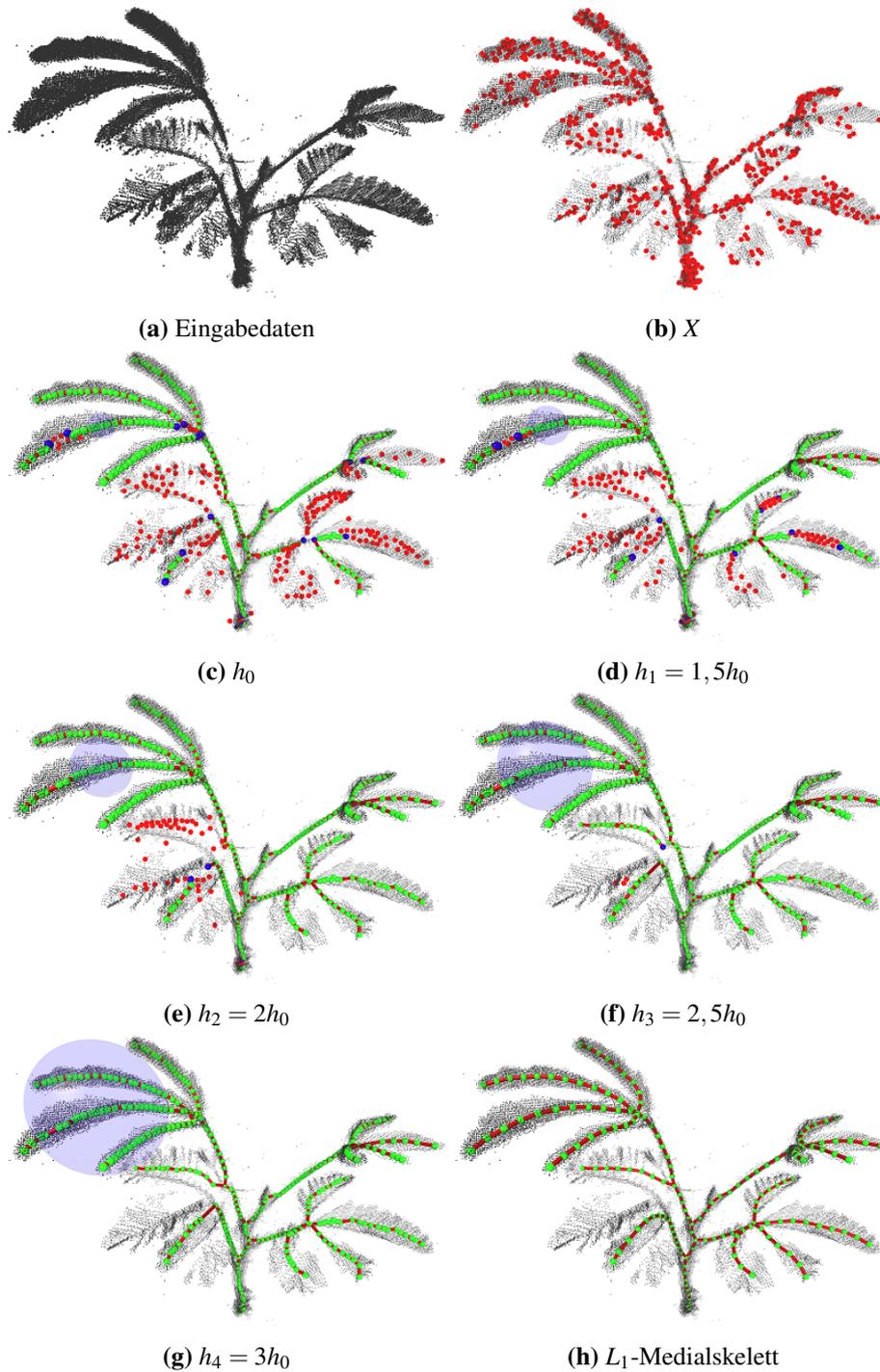
### 2.4.3 Weitere Regeln

Weiterhin benutzen wir die folgenden Regeln.

- Zwei oder mehr Brückenpunkte in einer lokale Nachbarschaft werden auf einen Punkt kontrahiert und grün gefärbt.
- Rote Punkte werden entfernt, wenn sie nah an aber nicht entlang eines Zweiges liegen oder wenn es keine Punkte in deren Nachbarschaft gibt.
- Nachdem alle Punkte grün sind, wird down-sampling und Glätten durchgeführt.

Für weitere Details sei auch hier wieder auf [LCOLTE07] und [HWCO<sup>+</sup>13] verwiesen.

Auch wenn wir, wie in Abbildung 2.5 zu sehen, mit unserem bisherigen Erkenntnissen gute Resultate erzielen können, so gibt es doch noch Spezialfälle die wir nicht gut rekonstruieren können. Dazu finden wir im nächsten Abschnitt zwei Verbesserungen für den Algorithmus.



**Abbildung 2.5:** Iterative Kontraktion und Zweigidentifikation mit steigender Nachbarschaftsgröße  $h_0$  bis  $h_4$  (blauer Ball).  $X$  ist eine zufällige Auswahl von 5% der Eingabedaten.

## 2.5 Verbesserungen

In diesen Abschnitt werden kurz zwei Möglichkeiten angegeben, das Ergebnis der iterativen Kontraktion weiter zu verbessern.

### 2.5.1 Dichtebasierte Gewichtung

Wenn die Eingabedaten sich in irgendwelchen Bereichen häufen, dann werden sich auch die Punkte des  $L_1$ -Medianskelett in diesen Bereichen häufen. Daher kann es passieren, dass wir das eigentliche Skelett nicht rekonstruieren können. Eine Möglichkeit mit diesem Fällern umzugehen ist das Einführen von dichtebasierten Gewichten in der Iterationsvorschrift. Dazu beachte man die Definitionen 2.11 und 2.12. Das Ergebnis können wir in Abbildung 2.6 betrachten.

**Definition 2.11** (Dichte):

Gegeben sei ein unorganisiertes und unorientiertes Set von Punkten  $Q = \{q_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^3$ . Für jedes  $j \in J$  definieren wir die Dichte durch

$$d_j = 1 + \sum_{j' \in J \setminus \{j\}} \theta(\|q_j - q_{j'}\|)$$

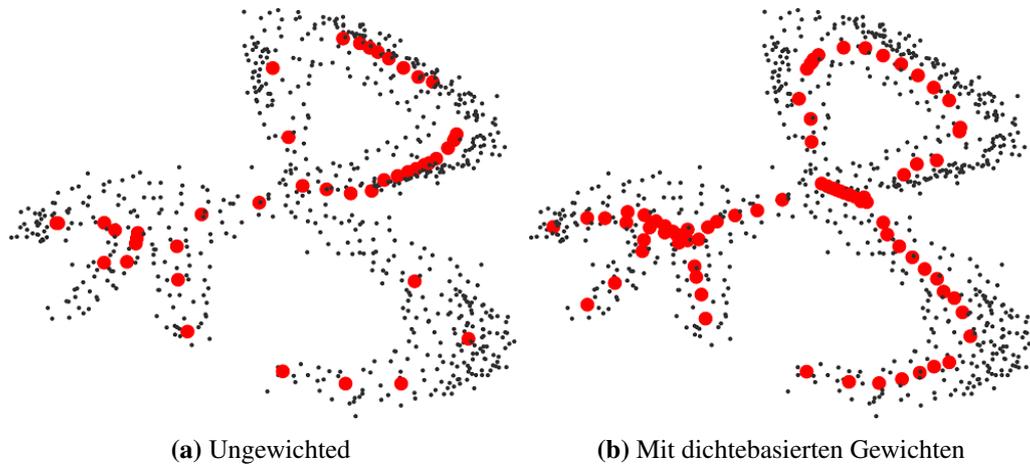
mit  $\theta(r) = e^{-r^2/(h_d/2)^2}$ ,  $h_d = h_0/2$ .

**Definition 2.12** (Iterationsvorschrift):

Sei  $X^k = \{x_i^k\}_{i \in I}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  der aktuelle Zustand,  $X^0 =$  zufällige Teilmenge von  $Q$  und  $\{d_j\}_{j \in J}$  Dichten gemäß Definition 2.11. Dann finden wir mit folgender Iterationsvorschrift eine Lösung  $MS$  von  $Y = G(Y)$ .

$$x_i^{k+1} = \frac{\sum_{j \in J} q_j \alpha_{ij}^k / d_j}{\sum_{j \in J} \alpha_{ij}^k / d_j} + \mu \sigma(x_i^k) \frac{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} (x_i^k - x_{i'}^k) \beta_{ii'}^k}{\sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \beta_{ii'}^k}$$

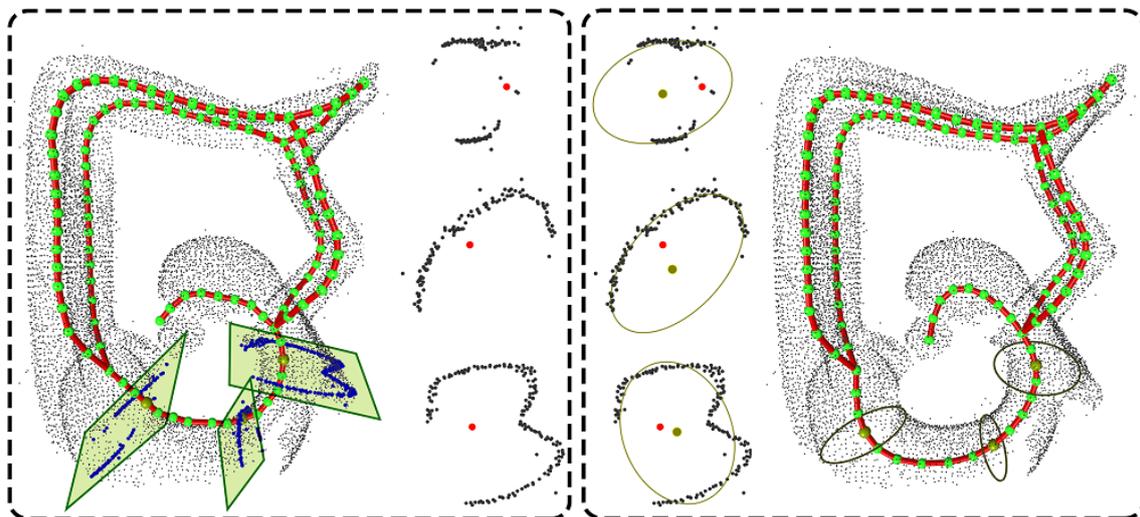
mit  $\alpha_{ij}^k = \frac{\theta(\|x_i^k - q_j\|)}{\|x_i^k - q_j\|}$ ,  $\beta_{ii'}^k = \frac{\theta(\|x_i^k - x_{i'}^k\|)}{\|x_i^k - x_{i'}^k\|^2}$ ,  $\mu \in [0, 1/2)$



**Abbildung 2.6:** Beispiel dichtebasierter Gewichtung

### 2.5.2 Rezentrierung

Durch die Konstruktion geht das  $L_1$ -Medialskelett durch den Median der lokalen Nachbarschaft der Eingabedaten. Für sehr viele natürliche Formen gilt, dass die Querschnitte ellipsenförmig sind. In diesem Fall kann am Anschluss noch ein Rezentrierungs-Schritt durchgeführt werden. Dazu sei auf [Abbildung 2.7](#) verwiesen.



**Abbildung 2.7:**  $L_1$ -Medialskelett: Rezentrierung mit Ellipsen

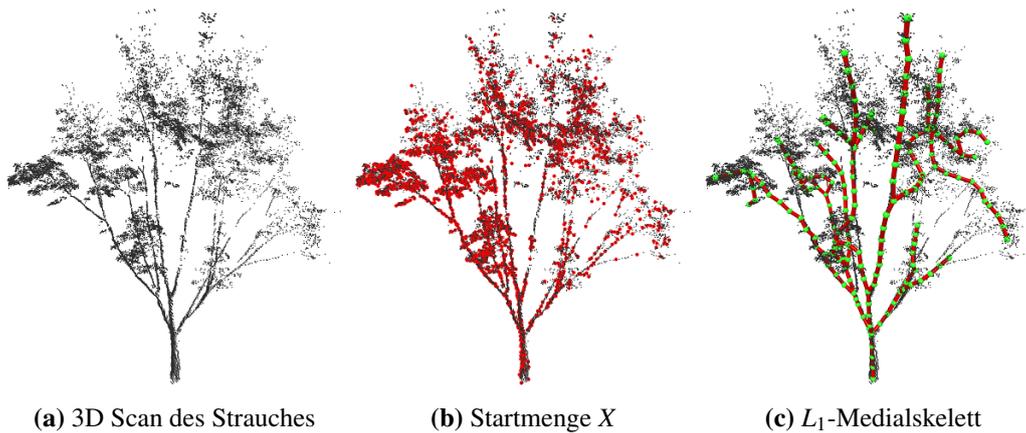
### 3 Ergebnisse

In diesem Kapitel soll ein kurzer Vergleich zu dem ROSA Algorithmus gegeben werden, welcher in [TZCO09] präsentiert wurde. Dazu ist in Tabelle 3.1 angegeben, wie die Parameter für die Iterative Kontraktion gesetzt sind.

Parameter	$\mu$	$h_0$	$\Delta h$	$h_d$	$K$
Standardwert	0,35	$2d_{bb}/\sqrt[3]{ J }$	$h_0/2$	$h_0/2$	5

**Tabelle 3.1:** Standardwerte der einzelnen Parameter

In der Abbildung 3.1 kann man erkennen, dass nicht alle Objekte topologisch korrekt rekonstruiert werden. Allerdings werden wir im nächsten Abschnitt sehen, dass wir bessere Ergebnisse erzielen als der Algorithmus ROSA von [TZCO09].



**Abbildung 3.1:** Skelettrekonstruktion eines Strauches

### 3.1 Vergleich zu ROSA

An dieser Stelle soll ein kurzer Vergleich des  $L_1$ -Medialskelett zu den Ergebnissen des ROSA Algorithmus gegeben werden. Dazu ist in Tabelle 3.2 angegeben, auf welchem Computer die beiden Algorithmen ausgeführt wurden und wie lange sie jeweils benötigt haben.

Plattform: Intel Core i7-2700K @ 3,50GHz, 8GB DDR3 RAM

$L_1$ -Medialskelett:  $|Q| = 100.000$ , 60 Sekunden

ROSA:  $|Q| = 10.000$ , 300 Sekunden

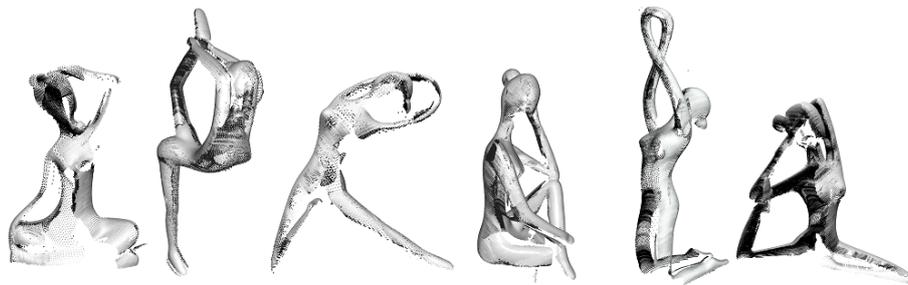
**Tabelle 3.2:** Laufzeitvergleich

In den Abbildungen 3.2 und 3.3 sehen wir das  $L_1$ -Medialskelett und die Rekonstruktion von ROSA von 3D Statuen. In der Abbildung 3.4 ist die Rekonstruktion eines Flugzeugmodells mit ROSA, als auch das  $L_1$ -Medialskelett des Modells angegeben.

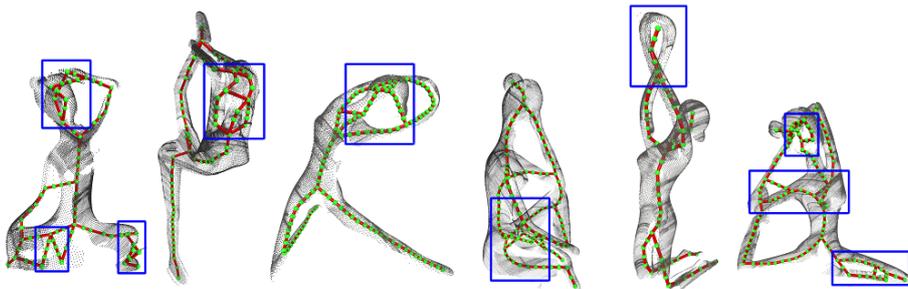


(a) 3D Objekte

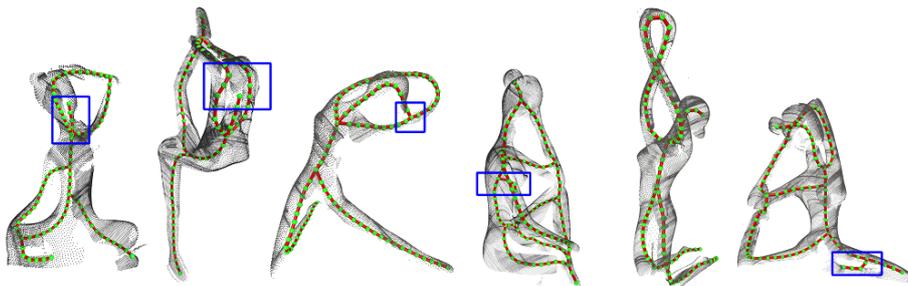
**Abbildung 3.2:** Mehrere 3D Objekt



(a) 3D Scan der Objekte

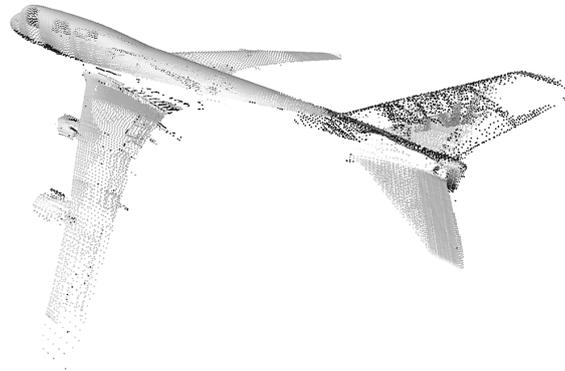


(b) Rekonstruktion von ROSA

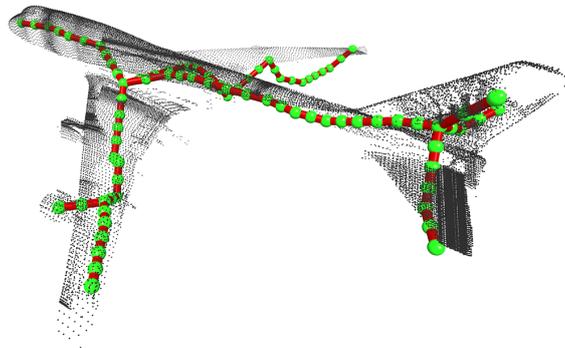


(c)  $L_1$ -Medialskelett

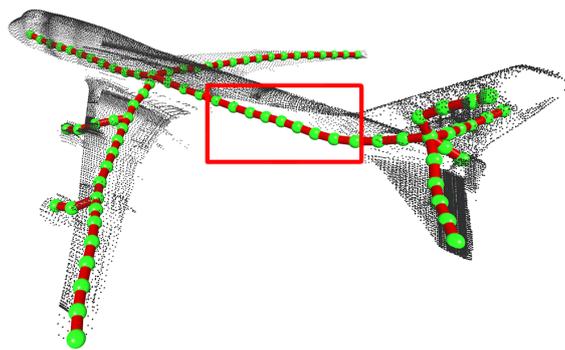
**Abbildung 3.3:** Skelettrekonstruktion der Objekte aus Abbildung 3.2



(a) 3D Scan eines Flugzeugmodells



(b) Rekonstruktion von ROSA



(c)  $L_1$ -Medialskelett

**Abbildung 3.4:** Skelettrekonstruktion eines Flugzeugmodells

## 4 Zusammenfassung

In dieser Ausarbeitung wurde das  $L_1$ -Medialskelett als Linien-Skelettdarstellung für 3D Punktwolken eingeführt. Durch eine Lokalisation des  $L_1$ -Medians mit Regularisierung ist es gelungen ein eindimensionales Linien-Skelett,  $L_1$ -Medialskelett von geometrischen Formen zu erhalten.

Die Vorteile dieses Ansatzes gegenüber anderen aktuellen Methoden sind zum einem die sehr geringen Anforderungen an die Input-Daten. Diese Methode kann direkt auf Rohdaten von 3D Scannern angewendet werden. Weiterhin haben wir gesehen, dass das  $L_1$ -Medialskelett zum Großteil bessere Ergebnisse liefert als der Algorithmus ROSA [TZCO09] und zudem eine wesentlich schnellere Rechenzeit ausweist.

Insgesamt verdient das  $L_1$ -Medialskelett die Bezeichnung „State of the Art“ Methode. Allerdings muss man auch eingestehen, dass nicht alle Objekte topologisch korrekt rekonstruiert werden.

Für weitere Informationen sei auf [HWCO<sup>+</sup>13] verwiesen.

# Literaturverzeichnis

- [HWCO<sup>+</sup>13] HUANG, H. ; WU, S. ; COHEN-OR, D. ; GONG, M. ; ZHANG, H. ; LI, G. ; B.CHEN: L1-Medial Skeleton of Point Cloud. In: *ACM Transactions on Graphics* 32 (2013), 65:1–65:8. [http://web.siat.ac.cn/~huihuang/Skeleton/Skeleton\\_page.html](http://web.siat.ac.cn/~huihuang/Skeleton/Skeleton_page.html)
- [LCOLTE07] LIPMAN, Yaron ; COHEN-OR, Daniel ; LEVIN, David ; TAL-EZER, Hillel: Parameterization-free Projection for Geometry Reconstruction. In: *ACM Trans. Graph.* 26 (2007), Juli, Nr. 3. <http://dx.doi.org/10.1145/1276377.1276405>. – DOI 10.1145/1276377.1276405. – ISSN 0730–0301
- [Li09] LI, James X.: *A layman's introduction to principal component analysis*. <http://www.youtube.com/watch?v=BfTMmoDFXyE>. Version: September 2009
- [TZCO09] TAGLIASACCHI, Andrea ; ZHANG, Hao ; COHEN-OR, Daniel: Curve Skeleton Extraction from Incomplete Point Cloud. In: *ACM Transactions on Graphics (Special Issue of SIGGRAPH)* 28 (2009), Nr. 3, S. Article 71, 9 pages
- [Wik14] *Principal Component Analysis*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Principal\\_component\\_analysis](http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis). Version: Januar 2014