

# Neuaufteilung polygonaler Oberflächen

Beke Junge

12. März 2013

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Neuaufteilung</b>	<b>2</b>
2.1	Wahl neuer Knoten für die Neuaufteilung . . . . .	2
2.2	Neuaufteilung mit gemeinsamer Kachelung . . . . .	5
2.2.1	Gemeinsame Kachelung . . . . .	5
2.2.2	Entfernen der alten Knoten . . . . .	6
2.2.3	Topologischer Konsistenztest . . . . .	7
2.2.4	Verbesserung der Dreiecksform . . . . .	8
2.2.5	Randbehandlung . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Approximation der Oberfläche</b>	<b>9</b>
3.1	Approximation der Oberflächenkrümmung . . . . .	11
3.2	Erhöhung der Knotenkonzentration . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Interpolation zwischen den Modellen</b>	<b>13</b>
4.1	Erstellung geschachtelter Detaillevel . . . . .	14
4.2	Interpolation zwischen den Modellen . . . . .	15
4.2.1	Polygon-Verfolgungs-Prozess . . . . .	15
4.2.2	Interpolation . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Ausblick</b>	<b>17</b>

## 1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung wird ein Algorithmus zur Neuaufteilung polygonaler Oberflächen vorgestellt. Dabei bezeichnet Neuaufteilung die Vereinfachung einer gegebenen polygonalen Oberfläche. Mit dem vorgestellten Algorithmus können verschieden detaillierte Modelle eines Eingabemodells erzeugt werden. In der Computergrafik gibt es

viele Gründe ein Objekt verschieden detailliert darzustellen. Häufig bedeckt ein Objekt in einer Bildszene nur einen kleinen Teil des Bildschirms. In diesem Fall ist es nicht notwendig ein hochdetailliertes Modell zu verwenden. Die Verwendung kleiner Modelle spart zudem Zeit, die für das Berechnen der Bildszenen benötigt wird. Dies ist besonders für interaktive Anwendungen wichtig.

Weitere Vorteile bei der Verwendung verschiedenen detaillierter Modelle eines Objekts sind die Vermeidung von Sampling-Problemen bei der Berechnung von Bildszenen und die Möglichkeit Modellmerkmale durch verschieden detaillierte Modelle zu verfolgen und somit zu extrahieren.

Da so unterschiedliche Objekte mithilfe polygonaler Oberflächen dargestellt werden können, ist es vielleicht unmöglich, dass ein Algorithmus alle Objekte gut vereinfachen kann. Der vorgestellte Algorithmus arbeitet am besten auf gekrümmten Oberflächen wie z. B. medizinischen Darstellungen und ist wenig für Objekte mit scharfen Kanten und Ecken, wie z. B. Gebäude geeignet.

Diese Arbeit folgt dem Text „Re-Tiling Polygonal Surfaces“ von Greg Turk [1]. Weitere Quellen sind im Literaturverzeichnis angegeben. Wenn nicht anders angegeben, sind die Abbildungen dem Haupttext entnommen oder sind an diesen angelehnt. Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut. In Abschnitt 2 wird der Algorithmus zur Neuaufteilung polygonaler Oberflächen beschrieben. Dieser besteht aus der Wahl neuer Knoten für die Neuaufteilung (2.1) und der Neuaufteilung mit gemeinsamer Kachelung (2.2). Um Oberflächen mithilfe dieses Algorithmus noch besser vereinfachen zu können, wird eine Approximation der Oberfläche benötigt. Diese Approximation und die Anpassung des Algorithmus werden in Abschnitt 3 vorgestellt. In Abschnitt 4 wird die Interpolation zwischen verschieden detaillierten Modellen eines Objekts betrachtet. Die Arbeit schließt mit Möglichkeiten den Algorithmus zu erweitern und anzuwenden.

## 2 Neuaufteilung

In diesem Abschnitt wird der Algorithmus zur Neuaufteilung von polygonalen Oberflächen vorgestellt. Der Algorithmus arbeitet auf einer gegebenen polygonalen Oberfläche und gibt eine vereinfachte, triangulierte Oberfläche mit einer vom Nutzer spezifizierten Anzahl von Knoten aus. An die Eingabeoberfläche wird nur die Bedingung gestellt, dass die Polygonkanten höchstens von zwei Polygonen geteilt werden. Sind diese Bedingungen erfüllt, garantiert der Algorithmus, dass das vereinfachte Ausgabemodell der gleichen Topologie und Geometrie folgt wie das Eingabemodell.

### 2.1 Wahl neuer Knoten für die Neuaufteilung

Um die Oberfläche zu vereinfachen und neu aufzuteilen, wird als erstes die Position der neuen Knoten auf der Ausgabeoberfläche bestimmt. Damit die ursprüngliche Oberfläche möglichst gut dargestellt wird, werden die neuen Positionen der Knoten in den Ebenen der Polygone der Eingangsoberfläche gewählt. Die Knoten werden auf der Oberfläche

mithilfe einer Relaxationsmethode gleichmäßig verteilt, um eine möglichst gleichmäßige Triangulierung der Ausgabeoberfläche zu erhalten. Der Algorithmus zur Wahl neuer Knoten besteht aus drei wesentlichen Schritten.

Als erstes werden  $n$  Knoten zufällig auf der Oberfläche verteilt. Für jeden der  $n$  Knoten wird zufällig und flächengewichtet ein Polygon auf der Oberfläche gewählt, in das der Knoten zufällig gesetzt wird. Dabei muss gewährleistet sein, dass die Wahrscheinlichkeit einen Knoten an eine bestimmte Position auf der Oberfläche zu setzen für jede Position identisch ist. Methoden um Knoten zufällig auf einer Oberfläche zu verteilen, werden in [3] beschrieben.

Sind  $n$  Knoten zufällig auf der Oberfläche verteilt, wird die Relaxationsmethode eingesetzt, die die Punkte solange verschiebt, bis diese gleichmäßig auf der Oberfläche verteilt sind. Dieses Verfahren ist ausführlich in [2] beschrieben. Die Relaxationsmethode realisiert die Neupositionierung der Knoten über Punktrückstoß. Das System der Knoten wird als physikalisches System betrachtet, bei dem zwischen den Knoten Rückstoßkräfte herrschen, sodass sich benachbarte Knoten gegenseitig abstoßen. Für diesen Algorithmus wird angenommen, dass die Rückstoßkraft zwischen den einzelnen Punkten mit Zunahme der Distanz linear abfallend ist, ab einem gewissen Abstand beeinflussen sich zwei Knoten nicht mehr. Dieser Abstand wird im Folgenden Rückstoßradius genannt. Im ersten Schritt der Relaxationsmethode werden für jeden neuen Knoten  $P$  auf der Oberfläche die Nachbarknoten bestimmt. Das Polygon, das den Knoten  $P$  enthält, wird mit  $A$  bezeichnet. Um die Rückstoßkräfte zu berechnen, die zwischen den einzelnen Nachbarknoten und  $P$  herrschen, werden die Nachbarknoten von  $P$  zunächst auf die Ebene, die  $A$  enthält, abgebildet.

Für die Abbildung der Knoten auf die Ebene gibt es mehrere Möglichkeiten. Die vorgestellte Methode arbeitet mit einfachen Rotationen der Knoten über vorhandene Kanten. Eine weitere Möglichkeit ist die Berechnung von geodätischen Pfaden zwischen  $P$  und einem Nachbarknoten und der Faltung entlang dieses Pfades. Da die erste Methode wesentlich einfacher und kostengünstiger implementiert werden kann, wird nur diese vorgestellt. Um die Nachbarknoten von  $P$  auf die Ebene von  $A$  abzubilden, werden die folgenden Vorschriften befolgt:

- Liegt der Knoten auf  $A$ , bleibt er unverändert.
- Knoten, die auf Polygonen liegen, die eine Kante mit  $A$  teilen, werden über die gemeinsame Kante rotiert, bis sie in der Ebene von  $A$  liegen.
- Knoten, die auf nicht-benachbarten Polygonen liegen, werden zunächst über die nächste Kante von  $A$  rotiert, und danach auf die Ebene von  $A$  projiziert.

Nachdem alle Nachbarknoten auf die Ebene von  $A$  abgebildet sind, wird die Rückstoßkraft zwischen diesen Knoten und  $P$  bestimmt. Für jeden Knoten wird der Vektor  $S$  berechnet.  $S$  ist hier die Summe der Rückstoßkräfte zwischen  $P$  und seinen jeweiligen Nachbarn. Die neue Position von  $P$  berechnet sich durch

$$P' = P + kS,$$

wobei  $k$  ein kleiner Skalierungsfaktor ist. In den meisten Fällen wird  $P'$  auf  $A$  liegen. Liegt  $P'$  nicht auf  $A$ , liegt es in vielen Fällen nicht einmal auf der Oberfläche des betrachteten Objekts. In diesem Fall wird die Kante von  $A$ , über die  $P'$  vom Objekt geschoben wurde, berechnet und das Polygon  $B$  des Objekts, das diese Kante mit  $A$  teilt, gesucht. Der Knoten  $P'$  wird über die Kante so rotiert, dass er in der Ebene von  $B$  liegt. Dieser neue Knoten liegt nicht unbedingt in  $B$ , kann aber über mehrmalige Wiederholung der beschriebenen Schritte auf ein Polygon geschoben werden. Wird kein benachbartes Polygon  $B$  gefunden, wird der Knoten  $P'$  auf die nächste Position in  $A$  abgebildet. Mehrere Iterationen der Relaxationsmethode führen zu einer gleichmäßigen Verteilung der neuen Knoten. In Algorithmus 2.1 ist dieses Vorgehen zusammengefasst.

**Algorithmus 2.1.** *Relaxationsmethode*

$m$  =Anzahl Iteration

$n$  =Anzahl Knoten

**for**  $k := 1$  **to**  $m$  **do**

**for**  $l := 1$  **to**  $n$  **do**

- Berechne die Nachbarknoten von  $P_l$
- Bilde die Nachbarknoten von  $P_l$  auf die Ebene von  $A_l$  ab
- Berechne und speichere die Rückstoßkräfte zwischen den abgebildeten Knoten und  $P_l$

**end for**

**for**  $i := 1$  **to**  $n$  **do**

        Berechne die neue Position  $P'_i$ ;

**end for**

**end for**

In der Abbildung 1 sind die Ergebnisse der zufälligen Verteilung der neuen Knoten und der Relaxation dargestellt. Das erste Objekt stellt die Eingabeoberfläche dar, das zweite Objekt ist die Eingabeoberfläche, auf der zufällig die neuen Knoten verteilt sind. Das dritte Objekt zeigt die Eingabeoberfläche mit den Positionen der neuen Knoten nach 40 Iterationen der Relaxationsmethode.

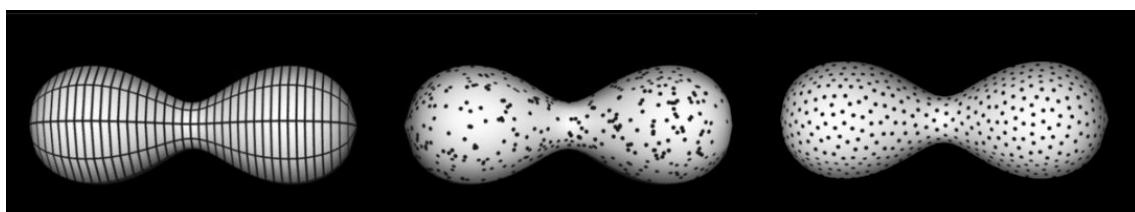


Abbildung 1: gleichmäßige Verteilung neuer Knoten auf einer Eingabeoberfläche nach [2]

## 2.2 Neuaufteilung mit gemeinsamer Kachelung

Nachdem die neuen Knoten auf der Oberfläche verteilt sind, muss die Oberfläche um diese Knoten neu aufgeteilt werden ohne die Topologie der Eingangsoberfläche zu verletzen. Diese Aufgabe ist bei komplexen Oberflächen schwierig, da leicht falsche Verbindungen eingeführt werden können. Es muss z. B. sichergestellt sein, dass der Algorithmus keine Regionen verbindet, die zwar nahe beieinander liegen, aber nicht verbunden sind (s.h. 2(a)) oder Blasen an der Oberfläche einführt (s.h. 2(b)).

Der folgende Algorithmus bestimmt die Neuaufteilung der Oberfläche ohne die Geometrie und Topologie der Eingangsoberfläche zu verletzen mithilfe eines lokalen Greedy-Algorithmus, der mit einem dreidimensionalen Maß arbeitet.



Abbildung 2: a) Verbindung von Regionen, die nicht verbunden sein dürfen, b) Entstehung von Blasen bei inkorrektter Verbindung von Knoten

### 2.2.1 Gemeinsame Kachelung

Ein wichtiger Zwischenschritt für die Neuaufteilung der Oberfläche ist die gemeinsame Kachelung. Bei der gemeinsamen Kachelung wird eine triangulierte Oberfläche erzeugt, die sowohl die alten als auch die neuen Knoten enthält. Um diese gemeinsame Kachelung zu erstellen, wird jedes Polygon mit den darin enthaltenen neuen Knoten durch eine Menge von Dreiecken ersetzt. Diese Dreiecke liegen in der gleichen Ebene wie das Polygon und decken es vollständig ab. Bei der Triangulierung müssen die neuen Knoten mit einbezogen werden und die Kanten des Polygons erhalten bleiben. In Abbildung 3 ist eine gemeinsame Kachelung für das Beispiel eines Quadrats mit nur einem neuen Knoten im Inneren und vier Ursprungsknoten abgebildet.

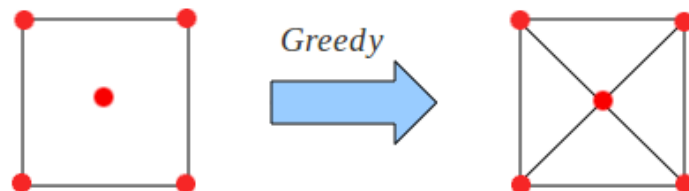


Abbildung 3: gemeinsame Kachelung eines Quadrats

In diesem Schritt wird ein Greedy-Algorithmus für die Triangulierung genutzt. Andere Triangulierungsalgorithmen können auch verwendet werden.

In diesem Schritt ist es nicht möglich, die Eingabeoberfläche zu verändern und falsch darzustellen, da die Form der Polygone nicht verändert wird.

### 2.2.2 Entfernen der alten Knoten

Nachdem die gemeinsam gekachelte Oberfläche vorliegt, müssen die alten Knoten entfernt und die Oberfläche neu trianguliert werden. Hierbei ist wichtig, dass die Topologie des Objekts durch die Entfernung nicht verletzt wird. Die erneute Triangulierung wird wiederum mit einem Greedy-Algorithmus erzeugt.

Wenn der Knoten  $R$  entfernt werden soll, werden zunächst alle Knoten betrachtet, die ein Dreieck mit  $R$  teilen. Diese Knotenmenge wird mit  $V$  bezeichnet. Die Menge aller Dreiecke, die  $R$  enthalten, wird mit  $T$  bezeichnet.

Die Nachbarknoten aus  $V$  werden auf die Tangentialebene der Oberfläche an  $R$  projiziert, um dort die Zugehörigkeiten der Knoten für die neue Triangulierung zu berechnen. Bevor die Region trianguliert wird, werden Tests durchgeführt, ob die betrachtete Region ohne den Knoten  $R$  trianguliert werden kann, ohne die Topologie zu verletzen. Diese topologischen Konsistenztests werden in Abschnitt 2.2.3 beschrieben. Besteht die Region die Konsistenztests, wird sie mit Greedy trianguliert. Dabei ist zu beachten, dass die Kanten in  $T$ , die nicht  $R$  enthalten, erhalten bleiben müssen. Diese bilden die Randkanten der Region. Aus diesem Grund dürfen auch keine Kanten außerhalb eingeführt werden. Die Abbildung 4 zeigt die Entfernung des Knotens  $R$ . Die Menge der Nachbarknoten ist  $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  und die Menge der Dreiecke  $T = \{ABR, BCR, CDR, DER, EFR, FGR, GAR\}$ . In diesem Fall müssen die Kanten  $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA$  nach der Entfernung von  $R$  erhalten bleiben. Da die Konsistenztests bestanden werden, wird die Region neu trianguliert. Das Ergebnis ist auf der rechten Seite der Abbildung 4 zu sehen.

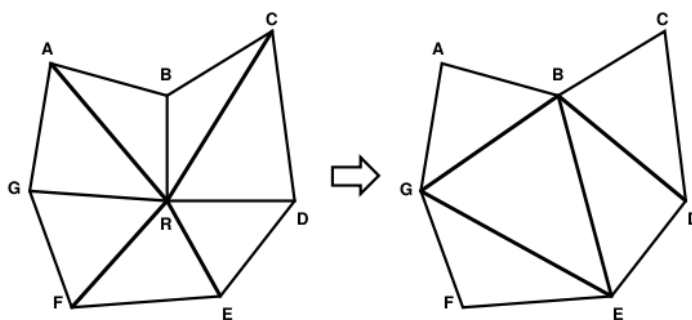


Abbildung 4: Beispiel: Entfernung eines Knoten

Mit diesem Verfahren werden alle alten Knoten, die die Konsistenztests bestehen, entfernt.

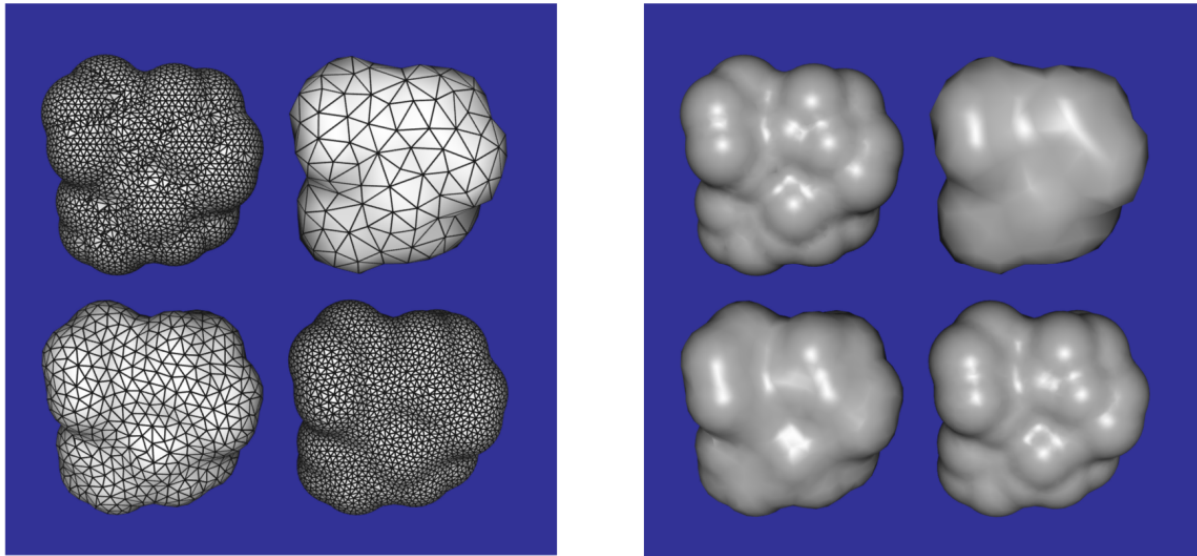


Abbildung 5: Neuaufteilungen eines molekularen Modells und ihre Phong Shadings. Oben links ist das Originalmodell abgebildet, die anderen Abbildungen sind Neuaufteilungen

In Abbildung 5 sind links verschiedene Neuaufteilungen eines molekularen Modells abgebildet und rechts ihre Phong Shadings. Oben links befindet sich das Originalmodell mit 3675 Knoten, die anderen Modelle sind unterschiedlich detaillierte Neuaufteilungen. Das Modell oben rechts hat 201, das Modell unten links 801 und das Modell unten rechts 3676 Knoten. Das detaillierteste Modell hat mehr Knoten als das ursprüngliche Modell. Wie man an der Abbildung erkennt, hat dieses Modell gleichmäßigere Dreiecke als das Ursprungsmodell. Dies zeigt, wie erfolgreich der Algorithmus die Knoten gleichmäßig auf der Oberfläche verteilt.

### 2.2.3 Topologischer Konsistenztest

Der topologische Konsistenztest stellt sicher, dass der Knoten  $R$  entfernt werden kann, ohne die Topologie und Geometrie der Eingabeoberfläche zu verletzen. Der topologische Konsistenztest besteht aus zwei Teilen.

Der erste Test stellt sicher, dass die Umgebung von  $R$  nicht gefaltet wird, wenn  $R$  entfernt wird. Dafür werden zunächst die Kanten aus  $T$ , die nicht  $R$  enthalten, auf die Tangentialebene an  $R$  projiziert. Wenn sich die projizierten Kanten nur in ihren Endpunkten schneiden, kann mit dem zweiten Test fortgefahren werden.

Ansonsten werden die Kanten auf weitere Ebenen projiziert und ihre Schnittpunkte berechnet. In [1] werden weitere 13 Ebenen verwendet. Wird unter diesen Ebenen eine Ebene gefunden, in der sich die Kanten nur in ihren Endpunkten schneiden, kann mit dem zweiten Test fortgefahren werden. Wird keine Ebene gefunden, darf der Knoten  $R$  nicht entfernt werden.

Der zweite Test stellt sicher, dass die Region um  $R$  nicht mit einer Region vor oder hinter

dieser Region verbunden wird, wenn diese Regionen im ursprünglichen Modell unverbunden sind. Um diese Situation zu vermeiden, werden die verschiedenen Triangulierungsmöglichkeiten bei Entfernung von  $R$  berechnet. Treten dabei Situationen auf, die die Topologie der Oberfläche verändern, wird der Knoten beibehalten.

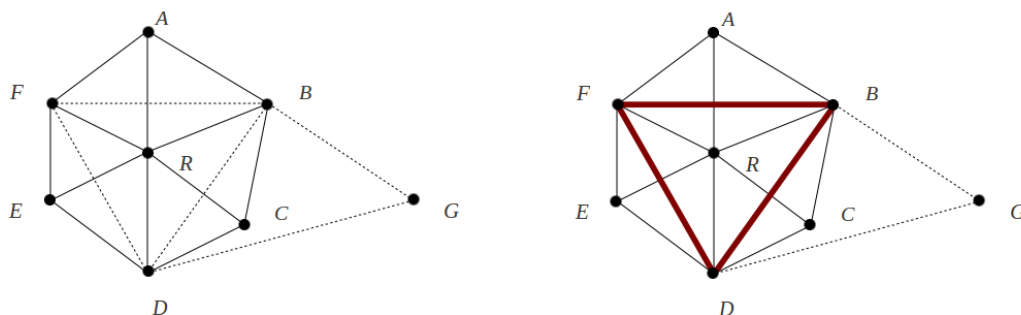


Abbildung 6: Situationen, die der zweite Test verhindert

In Abbildung 6 ist eine Situation abgebildet, in der der Knoten  $R$  nicht entfernt werden darf. Die betrachtete Region ist durchgezogen dargestellt, die gestrichelten Linien stellen eine Region dahinter dar. Die Region um  $R$  darf nicht mit der gestrichelten Region verbunden werden. Wird  $R$  entfernt, sind die neuen Kanten der Triangulierung  $BD$ ,  $DF$ ,  $FB$ . Diese sind in der rechten Abbildung in rot dargestellt. In diesem Fall wird die vordere mit der hinteren Region verbunden. Außerdem werden die neuen Kanten von drei Polygonen geteilt. Insgesamt verändert die Entfernung von  $R$  die Topologie der Oberfläche, aus diesem Grund muss der Knoten  $R$  beibehalten werden.

Werden beide Tests bestanden, kann der Knoten entfernt und die Umgebung neu trianguliert werden. Bei vielen Oberflächen können die meisten Knoten problemlos entfernt werden.

#### 2.2.4 Verbesserung der Dreiecksform

Nachdem alle alten Knoten entfernt sind, kann es vorkommen, dass noch nicht alle Dreiecke gleichmäßig geformt sind. In diesem Fall kann ein Verbesserungsschritt eingeführt werden. Wenn es möglich ist, trianguliert dieser mit Greedy die Umgebung aller Knoten neu, um eine gleichmäßigere Dreiecksform zu erreichen. Es wird nur neu trianguliert, wenn zuvor die topologischen Konsistenztests bestanden wurden.

In Abbildung 7 ist ein Verbesserungsschritt abgebildet. Die Region um den Knoten  $Q$  wird lokal neu trianguliert. In [1] werden ein bis zwei Verbesserungsdurchgänge für die gesamte Oberfläche vorgeschlagen.



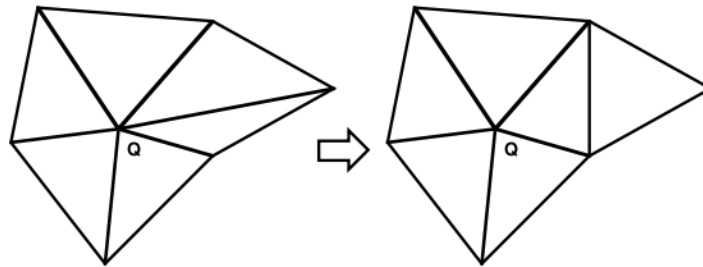


Abbildung 7: Verbesserung der Dreiecksform

### 2.2.5 Randbehandlung

Die in den vorherigen Abschnitten beschriebene Algorithmen können nur bei Polygonoberflächen eingesetzt werden, bei denen alle Kanten von zwei Polygonen geteilt werden. Um eine Oberfläche vollständig neu aufzuteilen, müssen auch die Randpolygone der Oberfläche behandelt werden. Ein Randpolygon ist ein Polygon mit Kanten, die zu keinem anderen Polygon gehören. Für Randpolygone müssen die Schritte gemeinsame Kachelung, Entfernung der alten Knoten und Verbesserung der Dreiecksform angepasst werden.

Liegt einer der neuen Knoten auf einer Randkante, muss dieser im Arbeitsschritt 2.2.1 in den Rand des Polygons eingepasst werden. Das bedeutet dieser Knoten muss Endpunkt zweier Randkanten werden.

Soll der Randknoten  $R$  entfernt werden, müssen folgende Regeln beachtet werden:

- Wenn  $R$  zwei Randkanten eines Polygons verbindet, wird  $R$  nicht entfernt.
- Verbindet  $R$  mehr als zwei Randkanten, wird  $R$  nicht entfernt.
- Verbindet  $R$  zwei Randkanten verschiedener Polygone, so wird  $R$  entfernt.

Die Abbildung 8 zeigt beispielhaft die Entfernung eines Randknoten.

Werden alle Arbeitsschritte der Neuaufteilung in Abschnitt 2 ausgeführt, wird eine vereinfachte Ausgabeoberfläche berechnet. In Abbildung 9 sind die Zwischenschritte der Neuaufteilung einer polygonalen Oberfläche abgebildet. Oben links ist das originale Modell abgebildet. Dieses Modell besteht aus 1513 Knoten. Oben rechts zeigt die Abbildung 400 Knoten gleichmäßig über die Oberfläche verteilt. Unten links ist die gemeinsame Kachelung der Originalknoten und der neuen Knoten abgebildet. Die Abbildung unten rechts zeigt die Neuaufteilung des Objekts mit 400 Knoten.

## 3 Approximation der Oberfläche

Die in Abschnitt 2 beschriebene Neuaufteilung liefert eine gleichmäßig triangulierte Ausgabeoberfläche. Um eine Oberfläche mit sehr unterschiedlich gekrümmten Regionen

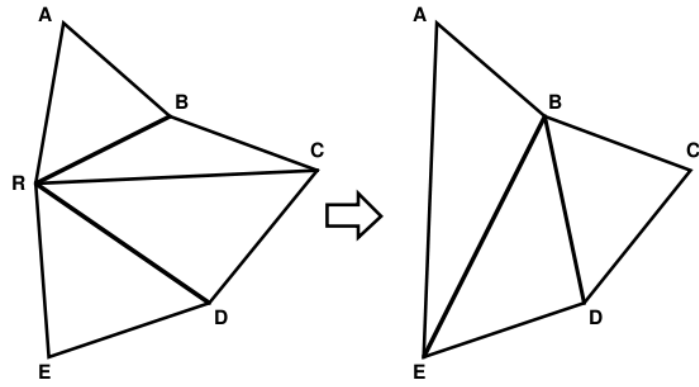


Abbildung 8: Entfernung eines Randknoten

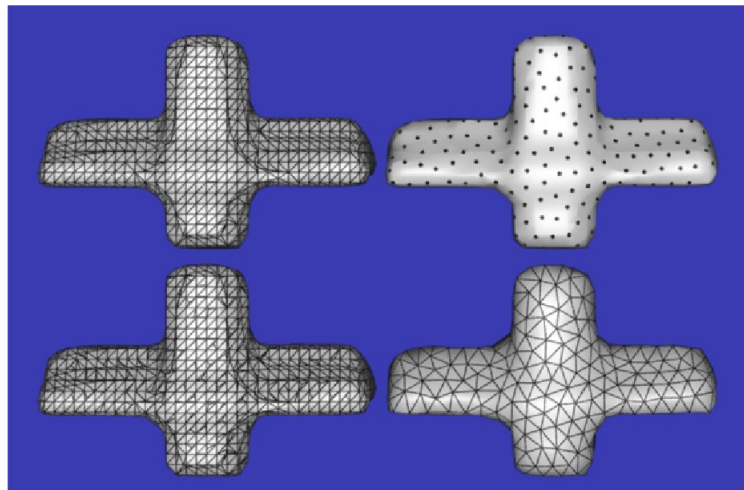


Abbildung 9: Neuaufteilung eines Objekts

neu aufzuteilen, ist es sinnvoll die Knotenkonzentration in den stark gekrümmten Bereichen zu erhöhen, um diese besser darstellen zu können.

Um zu entscheiden, in welchen Regionen die Knotenkonzentration erhöht werden soll, wird ein Maß für die Krümmung eines Objektes benötigt. Da diese Information häufig nicht vorhanden ist, muss die Oberflächenkrümmung mithilfe des Polygonmodells approximiert werden.

### 3.1 Approximation der Oberflächenkrümmung

Um die Krümmung der Oberfläche zu approximieren, wird die Hauptkrümmung an jedem Knoten des Modells approximiert. Anschaulich wird die größte Kugel gesucht, die, an der stärker gekrümmten Seite der Oberfläche angelegt, nicht von dieser abgestoßen wird.

Abbildung 10 zeigt die hier genutzte Approximation der Hauptkrümmung am Knoten  $P$  im zweidimensionalen Fall. Für die Approximation der Hauptkrümmung am Knoten  $P$  werden nur die beiden angrenzenden Kanten mit ihren Knoten, in diesem Fall  $AP$  und  $PB$ , benötigt.

Nun wird der Kreis berechnet, der zu  $AP$  und  $PB$  tangential ist und die Kante  $AP$  in  $|P - A|/2$  berührt. Der Radius dieses Kreises ist das Maß für die Hauptkrümmung. Je kleiner der Radius desto größer die Krümmung. Der Kreisradius kann über einfache Trigonometrie berechnet werden:

$$r = \tan \theta |P - A|/2.$$

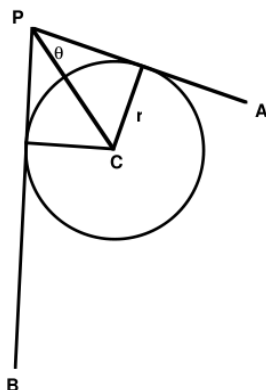


Abbildung 10: Approximation der Oberflächenkrümmung im zweidimensionalen Fall

Diese Annäherung kann auch für den dreidimensionalen Fall genutzt werden. Dabei wird die Kante  $PC$  durch die Oberflächennormale  $N$  am Knoten  $P$  ersetzt. Das dreidimensionale Problem der Oberflächenapproximation wird auf das zweidimensionale Problem zurückgeführt. Es werden alle Kanten zwischen den Nachbarknoten  $Q_i$  und  $P$  in

Form des normalisierten Vektors  $|P - Q_i|$ , der parallel zu diesen Kanten liegt, betrachtet. Nun berechnet man für jede Kante  $PQ_i$  den Winkel  $\theta_i = \arccos(N \cdot V)$  und den Radius  $r_i = \tan \theta_i |P - Q_i|/2$ . Die maximale Hauptkrümmung für den Knoten  $P$  ist  $r = \min_i r_i$ . Die Abbildung 11 veranschaulicht diese Annäherung in der Umgebung des Knoten  $P$ .

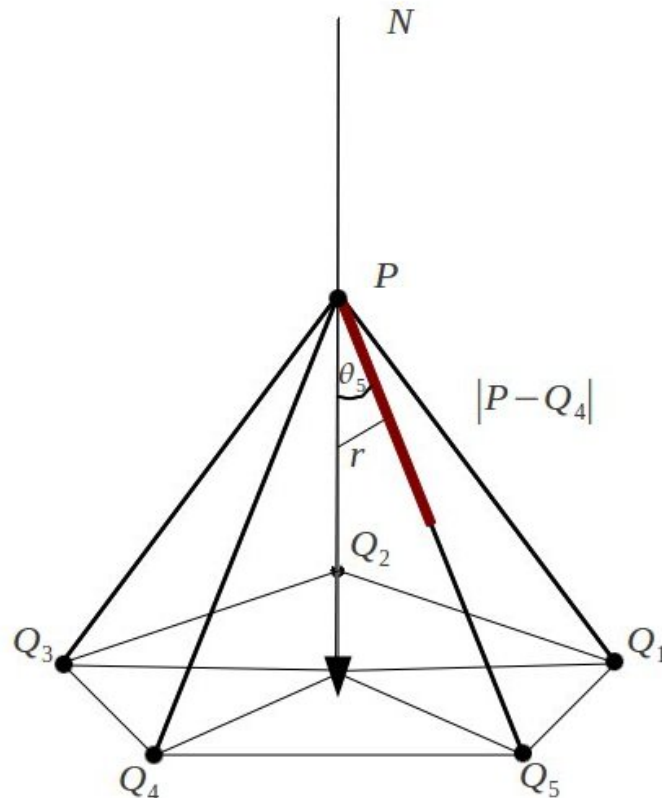


Abbildung 11: Approximation der Hauptkrümmung im dreidimensionalen Fall

Berechnet man diesen Wert für jeden Knoten der Oberfläche, können diese Werte in der Nachbarschaft dieser Knoten stark schwanken. Eine bessere Approximation entsteht durch Mittelung der Krümmungen der Nachbarknoten für den Knoten  $P$ . Dieser Wert wird für jeden Knoten gespeichert.

### 3.2 Erhöhung der Knotenkonzentration

Um die Knotenkonzentration in gekrümmten Regionen der Oberfläche zu erhöhen, wird mithilfe der gespeicherten Hauptkrümmungsapproximationen die Knotenverteilung im ersten Schritt (2.1) modifiziert. Für jedes Polygon wird sowohl die Fläche als auch die

Oberflächenkrümmung an seinen Knoten gespeichert. Da die Knotenverteilung flächengewichtet ist, wird der Wert der Fläche eines gekrümmten Polygons einfach erhöht, z. B. verdoppelt. Damit die Knotenkonzentration in den gekrümmten Flächen auch nach dem Einsatz der Relaxationsmethode höher ist als in flachen Regionen, müssen Knoten in gekrümmten Flächen ihre Nachbarn weniger rückstoßen, als in flachen Regionen. Da in gekrümmten Regionen der gespeicherte Radius kleiner ist als in flachen Regionen, wird dieser Wert als Rückstoßradius genutzt, wenn zwei Knoten dicht beieinander liegen. Da für neu positionierte Knoten noch keine Oberflächenapproximation vorhanden ist, wird diese als gewichteter Mittelwert aus den Oberflächenapproximationen der Knoten des zugehörigen Polygons berechnet.

Die Abbildung 12 zeigt den Unterschied zwischen den verschiedenen Möglichkeiten der Neuaufteilung eines Objekts. Das obere Modell zeigt die Neuaufteilung wie in Abschnitt 2 beschrieben, das untere Modell die Neukachelung des gleichen Objekts mit gleicher Knotenanzahl mit Erhöhung der Knotenkonzentration in gekrümmten Regionen. Wie man an der Abbildung erkennt, kann das Objekt in den gekrümmten Regionen mit der Erhöhung der Knotenkonzentration besser repräsentiert werden.

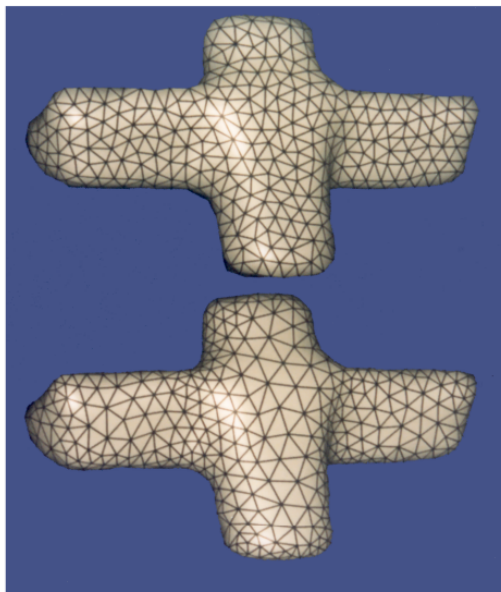


Abbildung 12: Oben: Neuaufteilung nach Abschnitt 2, unten: Neuaufteilung mit Erhöhung der Punktkonzentration

## 4 Interpolation zwischen den Modellen

In computergrafischen Anwendungen werden häufig verschieden detaillierte Modelle eines Objekts benötigt. In vielen Anwendungen ist es notwendig, dass zwischen diesen Modellen glatt interpoliert werden kann.

## 4.1 Erstellung geschachtelter Detaillevel

Häufig ist ein Modell eines Objekts vorhanden, von dem verschiedene, detailärmere Modelle benötigt werden. Dabei sollen die Knoten in den detailärmeren Modellen auch in den hochdetaillierten Modellen vorhanden sein. Das Verfahren zur Erstellung geschachtelter Detaillevel wird anhand eines Beispiels illustriert. Sollen drei verschiedene Detaillevel eines Modells mit  $x < y < z$  Knoten erstellt werden, wird zunächst das Modell mit den wenigsten Knoten erstellt. Dafür werden  $x$  Knoten über die beschriebene Neuaufteilung (s. h. Abschnitt 2) auf der Oberfläche verteilt und die Oberfläche trianguliert. Um das Modell mit  $y$  Knoten zu erstellen, werden die  $x$  Knoten des ersten Modells festgehalten, die restlichen  $y - x$  Knoten werden auf der Oberfläche verteilt und die Oberfläche wird trianguliert. Für das Modell mit den meisten Knoten werden die  $y$  Knoten aus dem mittleren Modell festgehalten. Anschließend werden  $z - y$  Knoten auf der Oberfläche verteilt und die Oberfläche wird mithilfe der Neuaufteilung trianguliert.

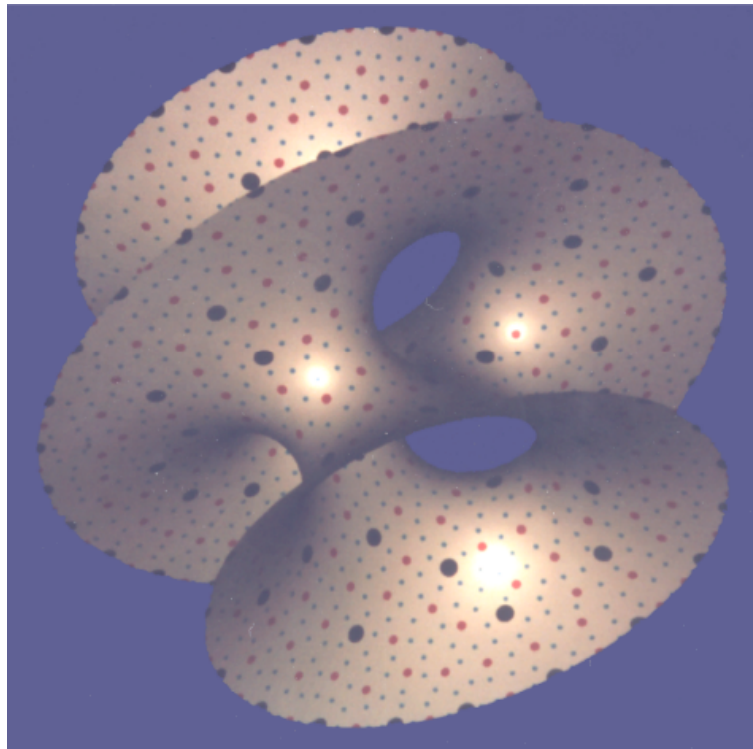


Abbildung 13: Erstellung geschachtelter Detaillevel

Mit diesem Vorgehen können beliebige Detaillevel eines detaillierten Modells erstellt werden.

In Abbildung 13 sind drei geschachtelte Modelle eines Objekts dargestellt. Die blauen Knoten sind die Knoten des detailärmsten Modells, die roten und die blauen die Knoten des mittleren Modells, und die blauen, die roten und die grünen Knoten sind die Knoten des hochdetaillierten Modells.

## 4.2 Interpolation zwischen den Modellen

Die Interpolation zwischen einem detailarmen Modell  $L$  und einem hochdetaillierten Modell  $H$  eines Objekts besteht aus zwei Schritten.

Dabei bezeichnet  $\mathcal{H}$  die Menge der Dreiecke in  $H$ ,  $\mathcal{L}$  die Menge der Dreiecke in  $L$ .

Um zwischen verschiedenen detaillierten Modellen zu interpolieren, wird vom hochdetaillierten Modell auf das detailarme Modell geschlossen, um eine Abbildung zwischen den Modellen zu finden.

Als erstes muss für jeden Knoten  $V \in H$  ein Dreieck in  $L$  gefunden werden, auf das der Knoten abgebildet werden kann. Ist ein solches Dreieck für jeden Knoten gefunden, wird jedes Dreieck  $T \in H$  entlang der Kanten aus  $L$ , die  $T$  schneiden, geteilt.

Diese Abbildung der Knoten auf die Dreiecke wird über den Polygon-Verfolgungs-Prozess berechnet.

### 4.2.1 Polygon-Verfolgungs-Prozess

Als erstes wird jedes Dreieck aus  $\mathcal{H}$  mit einer Liste von Polygonfragmenten initialisiert. Zunächst enthält diese Liste nur eine Kopie des Originaldreiecks. Jedes Dreieck erhält zudem eine Liste mit Knoten, die auf dieses Dreieck abgebildet werden.

Alle nachfolgenden Operationen werden in einer Ebene ausgeführt. Nun wird jeder Knoten in  $H$ , der nicht in  $L$  enthalten ist, entfernt und die umliegende Region wird neu trianguliert. Änderungen, die während dieses Prozesses auftreten, werden in den Listen gespeichert. Das Verfahren wird anhand der Abbildung 14 veranschaulicht. Die im folgenden beschriebenen Schritte werden für jeden Knoten, der in  $H$ , aber nicht in  $L$  ist, durchgeführt. In Abbildung 14 ist eine geschachtelte, unterschiedlich detaillierte Region eines Objekts dargestellt.

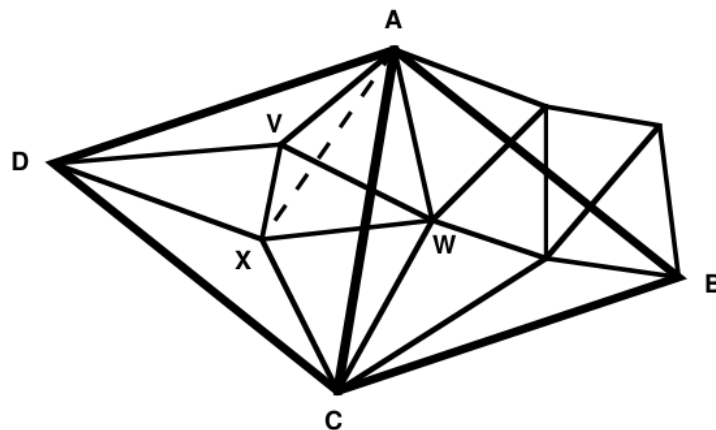


Abbildung 14: Geschachtelte, unterschiedlich detaillierte Region eines Objekts

$A, B, C$  und  $D$  gehören zu  $L$  und werden durch die dicken Kanten verbunden. Die dünnen Kanten gehören zum hochdetaillierten Modell.  $V, X, W$  sind nur im

hochdetaillierten Modell  $H$  vorhanden. Es wird nun die Abbildung von  $V$  auf ein Dreieck aus  $\mathcal{L}$  bestimmt. Wenn  $V$  gelöscht wird, wird das Polygon  $ADXW$  durch die gestrichelte Kante  $AX$  trianguliert. Diese Kante teilt die Dreiecke  $AWV$  und  $VWX$  in zwei Teile. In der Polygonfragmentliste des neuen Dreiecks  $AWX$  werden diese Teildreiecke gespeichert. Für das Dreieck  $AXD$  werden  $AVD$ ,  $VXD$  und die zwei neuen Teildreiecke gespeichert. Nun wird berechnet, ob  $V$  auf das Dreieck  $AWX$  oder  $AXD$  abgebildet wird. In diesem Fall wird  $V$  auf  $AXD$  abgebildet.

#### 4.2.2 Interpolation

Wenn der Polygon-Verfolgungs-Prozess für alle Knoten aus  $H$  ausgeführt wurde, ist für jedes Polygonfragment eine Liste vorhanden. In dieser Liste ist gespeichert, welches die Ursprungsdreiecke des Polygonfragments sind und welche Position dieses Fragment auf  $L$  annimmt.

Mithilfe dieser Listen kann die Interpolation der Knoten zwischen den Modellen  $H$  und  $L$  berechnet werden. Auf der einen Seite der Interpolation liegen alle Knoten auf  $L$ . Das interpolierte Modell hat die gleiche Form wie  $L$ . Auf der anderen Seite der Interpolation kann das hochdetaillierte Modell  $H$  erreicht werden. Um eine glatte Interpolation ohne Sprünge und Unstetigkeiten zu erhalten, reicht eine lineare Interpolation zwischen  $H$  und  $L$  über die gespeicherten Informationen.

In Abbildung 15 ist die glatte Interpolation zwischen unterschiedlichen Detailleveln eines Modells abgebildet.

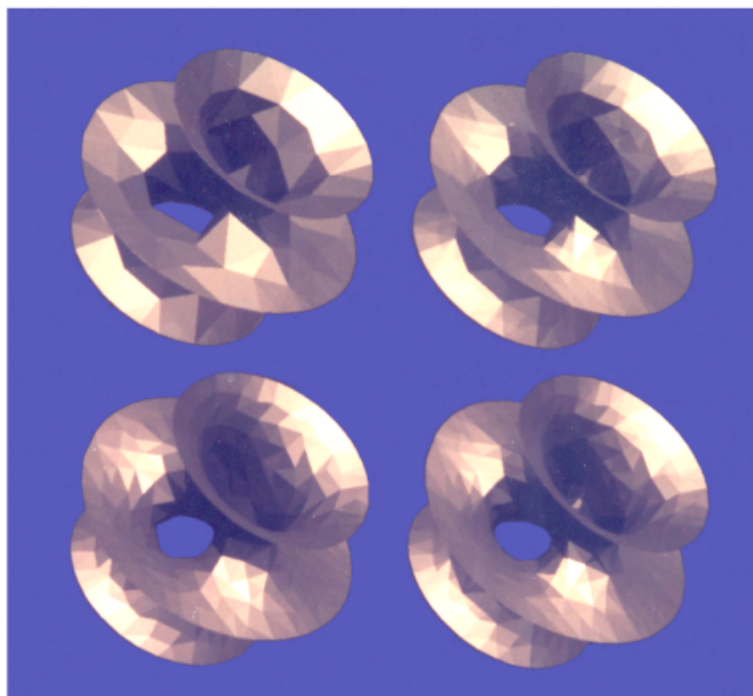


Abbildung 15: Glatte Interpolation zwischen unterschiedlichen Detailleveln



Insgesamt ermöglicht das beschriebene Verfahren einen nahtlosen Übergang zwischen verschiedenen Detailleveln in vielen Anwendungen.

## 5 Ausblick

Greg Turk beschreibt in seiner Arbeit mehrere Möglichkeiten, die Neuaufteilung zu erweitern. Eine Möglichkeit, den Algorithmus zu erweitern, besteht in der Nutzung der Richtung der minimalen und maximalen Hauptkrümmung an jedem Knoten. Diese Informationen könnten bei der Steuerung der Neuaufteilung, z. B. durch Änderung des Punktrückstoß, hinzugezogen werden und die Wahl der Kanten bei der Triangulierung steuern. Außerdem soll untersucht werden, ob es bessere Möglichkeiten gibt, die Oberfläche zu approximieren, und ob ein Maß gefunden werden kann, das die Güte der Approximation misst. Wird ein solches Maß gefunden, könnte dieses Maß auch den Neuaufteilungsprozess steuern.

Ein weiterer Forschungsgegenstand soll die Erkennung von Merkmalen der Objekte sein. Diese sollen detektiert werden und unwichtige Merkmale möglicherweise ab einem gewissen Detaillevel entfernt werden.

In der Praxis soll dieser Algorithmus in der Planung von Bestrahlungstherapien eingesetzt werden.

## Literatur

- [1] GREG TURK, Re-Tiling Polygonal Surfaces, Computer Graphics, Vol. 26, No. 2, S.55-64, SIGGRAPH, 1992.
- [2] GREG TURK, Generating Textures on Arbitrary Surfaces Using Reaction-Diffusion, Computer Graphics, Vol. 25, No. 4, S. 289-298, SIGGRAPH, 1991.
- [3] GREG TURK, Generating Random Points in Triangles, Graphic Gems, S. 24-28, Academic Press, 1990.