

## Aufgabe U22 (geodätische Distanz, geodätische Merkmale, Wasserscheiden-Transformation)

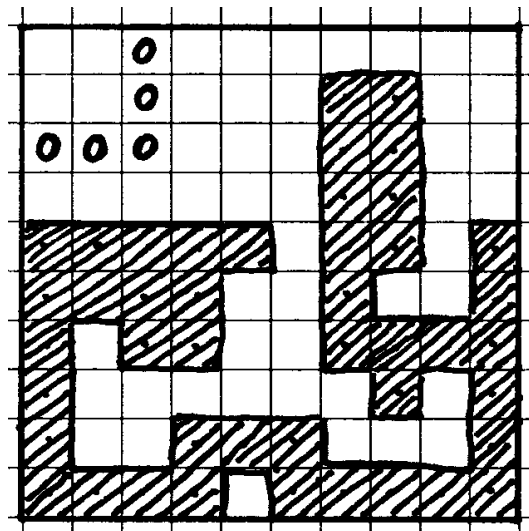
(a) Die geodätische Distanz  $d_A(p, q)$  zwischen 2 Bildpunkten  $p$  und  $q$  in der Bildpunkt-Teilmenge  $A(p, q \in A)$  ist die minimale Länge eines Pfades, der  $p$  und  $q$  verbindet (bzgl. der 8-Nachbarschaft) und ganz in  $A$  enthalten ist. (Wenn  $p$  und  $q$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $A$  liegen, wird  $d_A(p, q) = \infty$  gesetzt.) Die Menge  $A$  wird als geodätische Maske bezeichnet. Die Pfade minimaler Länge in  $A$  heißen geodätische Pfade.

Man zeige: Auf zusammenhängenden Mengen  $A$  ist  $d_A$  eine Metrik.

(b) Die geodätische Distanz zwischen einem Bildpunkt  $p \in A$  und einer Teilmenge ("Markermenge")  $M \subseteq A$  ist def. als

$$d_A(p, M) = \min\{d_A(p, m) \mid m \in M\}$$

Man bestimme für alle Pixel der folgenden geodätischen Maske  $A$  (nicht-schraffierter Bereich) die geodätische Distanz zur mit "0" markierten Menge.



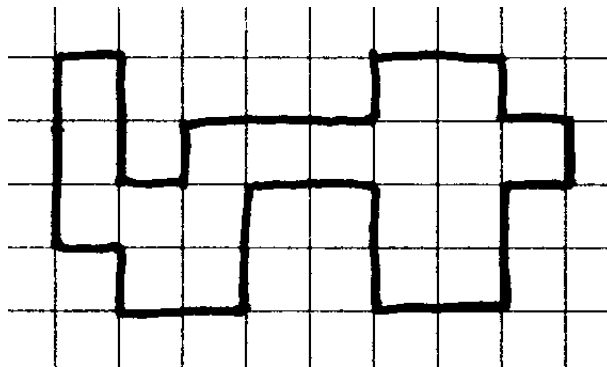
(c) Sei  $A$  eine Punktmenge. Die geodätische Länge  $L(A)$  ist die Länge des längsten geodätischen Weges, der in  $A$  enthalten ist. Die Ausbreitungsfunktion  $P_A$  auf  $A$  ist def. als

$$P_A(x) = \max\{d_A(x, y) \mid y \in A\},$$

also als die maximale Länge eines von  $x$  ausgehenden geodätischen Weges in  $A$ . Die geodätischen Endpunkte von  $A$  sind die lokalen Maxima der Ausbreitungsfunktion von  $A$ , das geodätische Zentrum von  $A$  das lokale Minimum seiner Ausbreitungsfunktion. (Beachte: Im Gegensatz zum Schwerpunkt gehört das geodätische Zentrum auch bei nichtkonvexem  $A$  stets zu  $A$ .) Der geodätische Radius ist der Wert der Ausbreitungsfunktion am geodätischen Zentrum. Der geodätische Formfaktor von  $A$  ist

$$\frac{\pi * L^2(A)}{4 * \text{Flaeche}(A)}$$

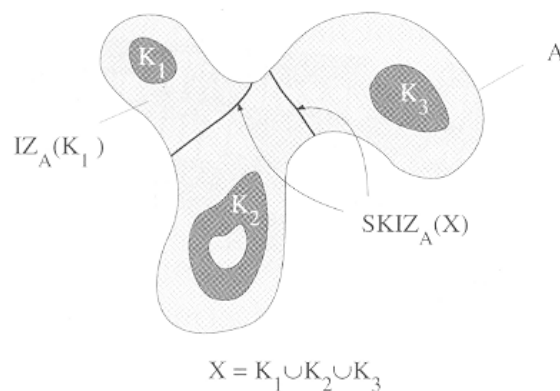
Man bestimme diese Merkmale an der folgenden Menge  $A$ .



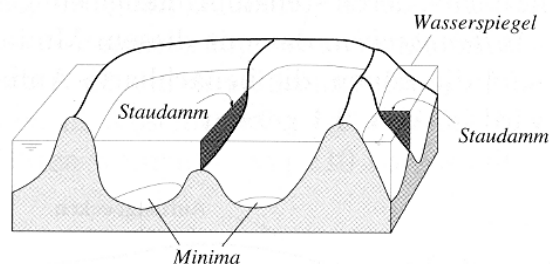
(d) Sei  $X$  eine Menge mit den Zusammenhangskomponenten  $K_i$ ,  $X \subseteq A$ . Die geodätische Einflusszone (influence zone)  $IZ_A(K_i)$  einer Zusammenhangskomponente von  $X$  in  $A$  ist die Menge aller Punkte von  $A$ , deren geodätische Distanz zu  $K_i$  kleiner als ihre geodätische Distanz zu jeder anderen Komponente von  $X$  ist:

$$IZ_A(K_i) = \{p \in A \mid \forall j \neq i : d_A(p, K_i) < d_A(p, K_j)\}.$$

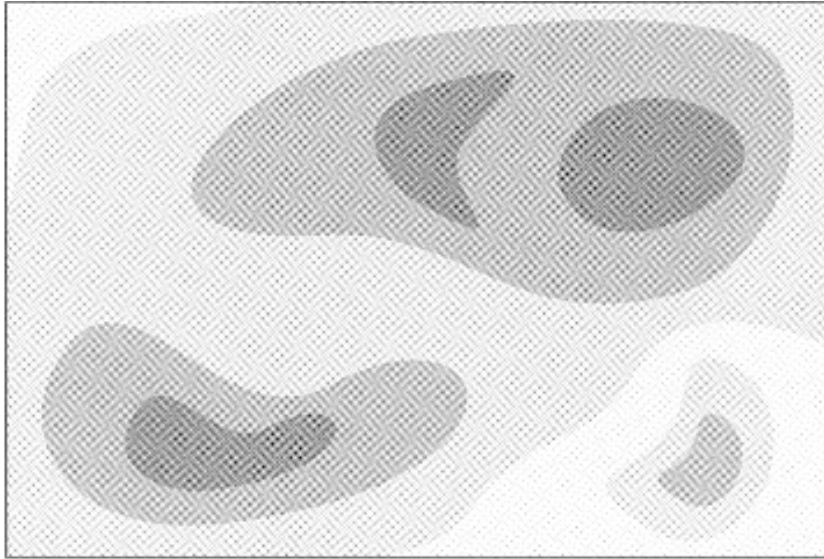
Die Grenzen der Einflusszonen bilden das geodätische Skelett durch Einflusszonen (SKIZ).



Die Wasserscheidentransformation (watershed transform) eines Grauwertbildes  $B$  verläuft anschaulich so, dass das "Grauwertgebirge"  $B$  von den lokalen Minima aus "geflutet" wird. An den Stellen, wo in diesem Flutungsprozess 2 Wasserbecken (catchment basins) zusammenstoßen, werden 1 Pixel-dünne Dämme errichtet.



Präziser: Beginnend mit der minimalen vorkommenden Graustufe  $h_{min}$  durchläuft  $h$  alle Graustufen in aufsteigender Folge.  $X_{h_{min}}$  hat als Komponenten die lokalen Minima von  $B$  mit Wert  $h_{min}$ .  $X_{h+1}$  besteht aus den geodätischen Einflusszonen der Komponenten von  $X_h$  in der Menge aller Bildpunkte mit Graustufe  $\leq h + 1$ , vereinigt mit denjenigen Bereichen mit Graustufe  $h + 1$  welche keine Komponenten von  $X_h$  einschließen (neu hinzukommende lokale Minima auf Höhe  $h + 1$ ). Die Grenzen zwischen den Einflusszonen, die nach maximaler Überflutung ( $X_{h_{max}}$ ) entstanden sind, bilden die Segmentierung von  $B$  durch Wasserscheiden (watershed segmentation). (Präziser Pseudocode eines effizienten Algorithmus bei Soille 1998, S. 247ff.). Man skizziere dieses Verfahren in folgendem Grauwertbild:



## Aufgabe U23 (Clusteranalyse)

In einem zweidimensionalen Merkmalsraum liege das unten stehende Punktmuster vor. Mit dem Minimum-Distanz-Algorithmus soll eine Clusterung der Punkte (Merkmalsvektoren) in 4 Cluster erzeugt werden:

1. 4 initiale Cluster-Repräsentanten sind vorgegeben worden (mit Kreis markierte Punkte),
2. jeder Punkt wird in dasjenige Cluster aufgenommen, dessen Repräsentant am nächsten liegt,
3. der Schwerpunkt jedes Clusters wird berechnet und wird zum neuen Repräsentanten.

(2) und (3) werden solange wiederholt, bis alle Cluster stabil sind.

Ist die entstehende Clusterung optimal?

(Schablonen für Aufg. U23)

