Aufgabe U18 (Konturapproximation)

a) Durch eine gegebene Menge von Konturpunkten soll eine optimal angepasste Kurve 2. Ordnung gelegt werden. (Optimalität i. Sinne kleinster Fehlerquadrate.) Man skizziere den Rechenweg zur Ermittlung der Kurvengleichung.

b) Eine komplette, geschlossene Objektkontur soll auf diese Weise durch eine Ellipse approximiert werden. Wie berechnet man Mittelpunkt und Hauptachsen-Richtungen der Ellipse und die Längen ihrer beiden Halbachsen? (Rechenweg)

Aufgabe U19 (Konturapproximation 2)

Die Methode der Polynominterpolation (Stützstellenpolynom), kann in vielen Fällen, beispielsweise bei fehlerbehaftete Ausgangswerten, zu einer zu starken Krümmung des berechneten Graphen führen.

Der Forderung nach minimaler Deformationsenergie entspricht mathematisch eine „minimale Krümmung“ des Graphen. Dies erreichen wir, wenn wir den Graphen stückweise aus ganzrationalen Funktionsgraphen zusammensetzen, was uns zur Spline-Interpolation bringt.

Bei der Spline-Interpolation wird ein stückweises Polynom s vom Hochstgrad n gesucht, das die Interpolationsaufgabe löst und gewisse Glattheitseigenschaften besitzt (mehrfache Differenzierbarkeit auf $[a, b]$).

Wichtige Spezialfälle: Stückweise lineare Interpolation (n = 1) und kubische Spline-Interpolation (n = 3).

Kubische Spline-Interpolation

Ein kubischer Spline s ist aus Polynomen 3. Grades zusammengesetzt. $n + 1$ Stützstellen definieren n Teilintervalle, so dass insgesamt $4n$ Polynomkoeffizienten zu bestimmen sind.
Dazu kann man bei kubischen Splines die folgenden Interpolations- und Glattheitsbedingungen stellen:

Interpolation:	$s(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \dots, n :$	$n + 1$ Bedingungen
Stetigkeit:	$s_l(x_i) = s_r(x_i),\ i = 1, 2, \dots, n - 1 :$	$n - 1$ Bedingungen
Differenzierbarkeit:	$s_l'(x_i) = s_r'(x_i),\ i = 1, 2, \dots, n - 1 :$	$n - 1$ Bedingungen
Zweimalige Differenzierbarkeit:	$s_l''(x_i) = s_r''(x_i),\ i = 1, 2, \dots, n - 1 :$	$n - 1$ Bedingungen

Insgesamt erhält man so $4n - 2$ Bedingungen. Für die 2 fehlenden Bedingungen kann man eine der folgenden Randbedingungen stellen:

a)	$s'(x_0) = \alpha,\ s'(x_n) = \beta :$	vollständige Randbedingung (eingespannter Spline),
b)	$s''(x_0) = 0,\ s''(x_n) = 0 :$	natürliche Randbedingungen,
c)	$s'(x_0) = s'(x_n),\ s''(x_0) = s''(x_n) :$	periodische Randbedingungen,
d)	$s_l'''(x_1) = s_r'''(x_1),\ s_l'''(x_{n-1}) = s_r'''(x_{n-1}) :$	not-a-knot Spline

Wenn die in Fall a) benötigten Werte α und β nicht vorliegen, verwendet man die Fälle b) und c) in der Regel dann, wenn sie für das zugrundeliegende Anwendungsproblem sachgerecht sind. Hat man keine physikalische Information über die Randbedingungen, empfiehlt sich der Ansatz d).

Satz 1 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz): Die obigen Interpolations- und Glattheitsbedingungen definieren jeweils genau einen kubischen Spline.

Berechnen Sie für die gegebenen Stützwerte $\{(-1,1),\ (0,0),\ (1,3)\}$ mit der natürlichen Randbedingung $s''(-1)=0,\ s''(1)=0$ den kubischen Spline.

Aufgabe U20 (Kanten in Multi-Merkmalsbildern)

Ein Bild sei nicht durch eine skalare Grauwertfunktion gegeben, sondern durch eine vektorwertige Funktion

$$\vec{m} = (x,y) = \begin{pmatrix} m_1(x,y) \\ m_2(x,y) \\ \vdots \\ m_M(x,y) \end{pmatrix}$$

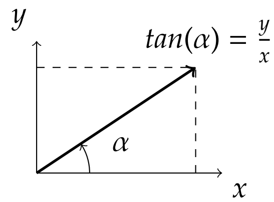
(z.B. Multispektralbild). Es sei hier der Fall zweier kontinuierlicher Variablen x, y angenommen. Man bestimme zu einem gegebenen Punkt (x_0, y_0) diejenige Richtung α (Winkel zur X-Achse), in der sich $\vec{m}$ am stärksten ändert (als Maß der Änderung soll der Betrag der Richtungsableitung dienen):

a) allgemein,

b) für $\vec{m}(x,y) = (2xy;1;1)^T, (x_0;y_0) = (1;2)$.

Lösung U20

a) normalisierter Richtungsvektor $\vec{n}$ mit Richtung α in der xy-Ebene:



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung von $\vec{m}$ bzgl. $\vec{n}$:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) * \frac{\partial m_1}{\partial x} + sin(\alpha) * \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ cos(\alpha) * \frac{\partial m_2}{\partial x} + sin(\alpha) * \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \vdots \\ cos(\alpha) * \frac{\partial M}{\partial x} + sin(\alpha) * \frac{\partial M}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial y} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix} = J * \vec{n}$$

J Jakobimatrix (Funktionalmatrix von $\vec{m}(x,y)$ $\langle a, b \rangle$ = Skalarprodukt

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\| = \|J * \vec{n}\|^2 = \langle J * \vec{n}, J * \vec{n} \rangle = (J * \vec{n})^T * (J * \vec{n}) = \vec{n}^T * J^T * J * \vec{n} = \vec{n}^T * M * \vec{n}$$

mit

$$M = J^T \bullet J = \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{2x} & \dots & m_{Mx} \\ m_{1y} & m_{2y} & \dots & m_{My} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{1y} \\ \vdots & \vdots \\ m_{Mx} & m_{My} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} m_{ix}^2 & \sum_{i=1}^{M} m_{ix} m_{iy} \\ \sum_{i=1}^{M} m_{ix} m_{iy} & \sum_{i=1}^{M} m_{iy}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

M ist symmetrisch

$$\left\|\frac{\partial\vec{m}}{\partial\vec{n}}\right\|^2 = (cos(\alpha)\ sin(\alpha)) \bullet \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix} = A\,cos^2(\alpha) + 2Bcos(\alpha)sin(\alpha) + Csin^2(\alpha)$$

$$f(\alpha) := \left\|\frac{\partial\vec{m}}{\partial\vec{n}}\right\|^2 = \vec{n}^T * M * \vec{n} \quad \rightarrow \ \text{MAX}$$

Extremmaproblem unter Nebenbedingung $||\vec{n}||^2 = \vec{n}^T * \vec{n} = 1$, äquivalent zu Extremmaproblem ohne Nebenbedingung:

$R(\vec{x}) := \frac{\vec{x}^T M * \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} \rightarrow$ Max (wegen $R(\vec{x}) = R(c \bullet \vec{x})$ für $c \neq 0$)

$R(\vec{x})$ heißt Rayleight-Quotient.

Aus der Lin. Algebra: Die Extremwerte von R sind die Eigenwerte von M, die Eigenvektoren von M lösen die Extremwertanfgabe.
Eigenwerte (EW) von M:

$$det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = (A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}$$

b) Zahlenbeispiel

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \frac{\partial m_3}{\partial x} & \frac{\partial m_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2y & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y^2 & 4xy \\ 4xy & 4x^2 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $x_0 = 1,\ y_0 = 2: \ M = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

EW: $\lambda_{1,2} = \frac{20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right) + 64} = 10 \pm \sqrt{100} = 10 \pm 10 \quad \rightarrow \ \lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = 0$

Eigenvektoren zu $\lambda_2: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Kern(M): \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu λ_1 : muss orthogonal zu $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sein, also $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Probe: $\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = 20 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normiert:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix} \ \alpha_1 = arctan(2), \ \ \vec{n_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \ \alpha_2 = arctan(-1/2)$$

$(M - \lambda I)\vec{x_\lambda} = 0 \quad ||\vec{n}||^2 = (2,1)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 4 + 1 = 5$

Wo ist das Max. derRichtungsableitung? $\rightarrow$ bei $\vec{n_1}$ (Wert 20)

Probe:

$\left\|\frac{\partial\vec{m}}{\partial\vec{n_1}}\right\|^2 = 16cos^2(\alpha_1) + 2 * 8 * cos(\alpha_1)sin(\alpha_1) + 4sin^2(\alpha_1) = \frac{16*4}{5} + \frac{32}{5} + \frac{4}{5} = \frac{100}{5} = 20$

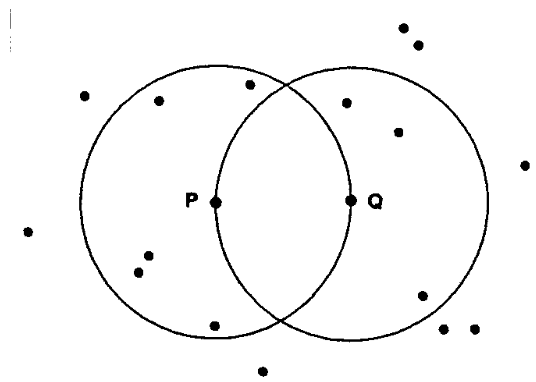
$\left\|\frac{\partial\vec{m}}{\partial\vec{n_2}}\right\|^2 = \frac{16}{5} + 2 * 8 * \frac{-2}{5} + 4 * \frac{4}{5} = 0$

Aufgabe U21 (punktbasierte Segmentierung)

Es sei eine Menge von Punkten in der Ebene gegeben: $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}$. Ein auf P definierter Graph ist ein in die Ebene eingebetteter Graph mit Knotenmenge P, dessen Kanten Geradenstücken entsprechen, die je 2 Punkte aus P verbinden. Ein minimaler aufspannender Baum (minimal spanning tree, MST) ist ein auf P definierter Graph mit minimaler (euklidischer) Kantenlängensumme. Der relative Nachbarschaftsgraph (relative neighbourhood graph, RNG) ist ein auf P def. Graph, der genau dann eine Kante zwischen p und q hat, wenn p und q relative Nachbarn bzgl. P sind, d.h. für die euklidischen Abstände d gilt:

$$\forall r \in P : d(r,p) > d(p,q) \text{ oder } d(r,q) > d(p,q),$$

d.h. kein Punkt r liegt innerhalb des von p und q definierten Kreiszweiecks.



- "Greedy-Algorithmus" zur Bestimmung eines MST:

  1. Verbinde ein Punktepaar aus P mit kürzestem Abstand.

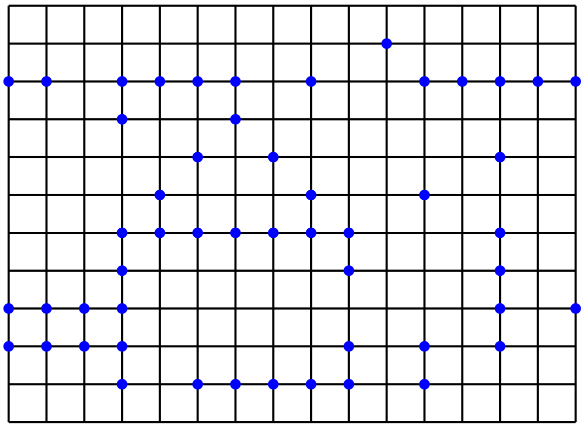
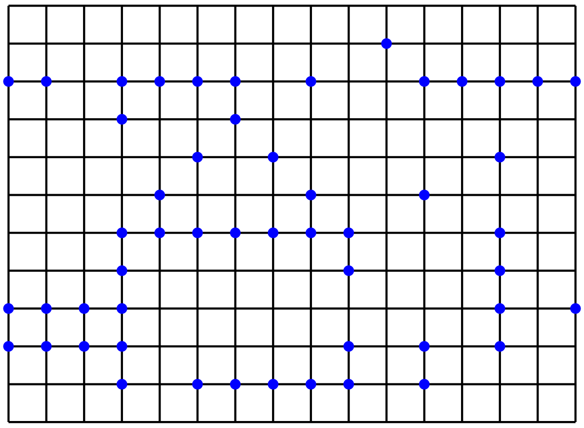
  2. Sei T die Menge der schon verbundenen Punkte. Suche einen Punkt p aus $P \backslash T$ und einen Punkt q aus T, so dass der Abstand unter allen solchen Punktepaaren am kürzesten ist, und verbinde p mit q.

  3. Wiederhole (2), bis keine isolierten Punkte mehr übrig sind.

- Algorithmus zur Bestimmung des RNG:
  Prüfe für jede mögliche Kante pq, ob sie Kante des RNG ist. (*Verfahren wird deutlich effizienter, wenn durch a-priori-Wissen feststeht, dass Kanten, deren Längen oberhalb eines bestimmten Schwellenwertes liegen, nicht zum RNG gehören.*)

a) Man zeige, dass der Greedy-Algorithmus tatsächlich einen MST erzeugt.

b) Man wende den Algorithmus an, um den MST und den RNG des folgenden Punktmusters zu bestimmen.

Anmerkung: Es gilt $P \subseteq MST \subseteq RNG \subseteq DT$, dabei ist DT die Delaunay-Triangulierung von P (siehe Skript zur Computergrafik, Kapitel 8c).