Aufgabe U13

Granulometrie: Formalismus der mathematischen Morphologie zur Analyse von Größenverteilungen,

- ermöglicht Extraktion von gewissen Gestaltinformationen ohne vorheriges Segmentieren
- Analogie zum Frequenzspektrum der linearen Bildanalyse.

Es sei $G = (g_a)$, $a \geq 0$, eine Familie von Transformationen von Binärbildern. G heißt Granulometrie genau dann, wenn gilt:

- $\forall a \geq 0 : g_a$ ist monoton und anti-extensiv

  und

- $\forall a, b \geq 0 : g_a g_b = g_b g_a = g_{max(a,b)}$ mit $g_x = O_{x \bullet B}$ (Absorptionseigenschaft).

Man zeige:
Wenn B konvex ist, bilden die Öffnungen $\mathbf{O}_{a \bullet B}$ $(a \geq 0)$ eine Granulometrie.

Lösung U13

$O_{a \bullet B}$ monoton und anti-extensiv, klar nach Aufgabe U12.

Nach zu zeigen: Absorptionseigenschaft

$\forall a, b \geq 0 : g_a g_b = g_b g_a = g_{max(a,b)}, (g_x = O_{x \bullet B})$

Sei o.B.d.A $a \geq b$
z.z.:

1. $O_{a \bullet B} O_{b \bullet B} = O_{a \bullet B}$
2. $O_{b \bullet B} O_{a \bullet B} = O_{a \bullet B}$

zunächst der Fall $b = 0$:

$D_{\{0\}}(X) = \bigcup_{b \in \{0\}} X_{-b} = X_0 = X$
$E_{\{0\}}(X) = \bigcup_{b \in \{0\}} X_{-b} = X_0 = X$

also $D_{\{0\}} = E_{\{0\}} = O_{\{0\}} = I$ (identische Abbildung)
$O_{a \bullet B} O_{o \bullet B} = O_{a \bullet B} I = O_{a \bullet B}$, ebenso für (2).

Sei jetzt $b > 0$:

$a \geq b > 0$, es ist $0 \leq \frac{b}{a} \leq 1$ und $0 \leq 1 - \frac{b}{a} < 1$

Sei $k > 0$, wir charakterisieren die Elemente von $O_{k \bullet B}(X)$: vgl. U12(b). Beweis

$$\begin{aligned} X \in O_{k \bullet B}(X) &\Leftrightarrow \exists c \in k \bullet B \forall d \in k \bullet B : x + (d - c) \in X \\ &\Leftrightarrow \exists \tfrac{c}{k} \in B \forall \tfrac{d}{k} \in B : x + (d - c) \in X \\ &\Leftrightarrow \exists e \in B \forall f \in B : x + k(f - e) \in X \end{aligned}$$

(1)
i) z.z.: $O_{a\bullet B}O_{b\bullet B} \subseteq O_{a\bullet B}$, o.B.d.A. $a \geq b$
$x \in O_{a\bullet B}(O_{b\bullet B}(x)) \Leftrightarrow \exists e \in B \forall f \in B \exists c \in B \forall d \in \mathbf{B} : x + a(f-e) + b(d-c) \in X \qquad (*)$

Setze speziell $d = c$ (wenn es für alle $b \in B$ gilt, dann auch für c - monoton und anti-extensiv):

$(*) \Rightarrow X + a(f-e) \in X \Rightarrow x \in O_{a\bullet B}(X)$
ii) z.z.: $O_{a\bullet B}O_{b\bullet B} \supseteq O_{a\bullet B}$

$x \in O_{a\bullet B}(x) \Leftrightarrow \exists e \in B \forall f \in \mathbf{B} : x + a(f-e) \in X \qquad (\#)$

z.z: $\forall f \in \mathbf{B} \exists c \in \mathbf{B} \forall d \in: \mathbf{B} : x + a(f-e) + b(d-c) \in X$

wähle $c = f$:

$$\begin{aligned} x + a(f-e) + b(d-f) &= x + a(1 \bullet f - \tfrac{b}{a}f + \tfrac{b}{a}d - e) \\ &= x + a((1 - \tfrac{b}{a})f + \tfrac{b}{a}d - e) \end{aligned}$$

Konvexkombination von f und d!

$f, d \in B \Rightarrow f' \in B$, da $\mathbf{B}$ konvex
für 1) $x + a(f' - e) \in X$, wegen (#)
(2) geht analog

Aufgabe U14 (Granulometrische Kurven)

Man verwendet 3 Arten von Kurven:

1. Anzahl $p(a)$ der Zusammenhangskomponenten (Partikel) von $g_a X$, aufgetragen gegen a;
2. $A(g_a X)$, aufgetragen gegen a;
3. $A(g_{a-1}X) - A(g_a X)$, aufgetragen gegen a ("Musterspektrum von X", pattern spectrum).

Dabei ist $A(Z)$ die Fläche von Z (oder ein anderes Maß).

g_a sei nun die Öffnung $\mathbf{O}_{aB}$ mit aB als Liniensegment der Länge a ($a = 1; 2; 3; 4; 5; 6$). Man zeichne die 3 Kurven für das folgende 1D-Binärbild:
0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1

Aufgabe U15

Man führe für folgendes Grauwertbild die Haar-Wavelettransformation durch (Standardzerlegung):

0	0	0	2
3	1	8	8
1	3	8	8
0	8	8	8