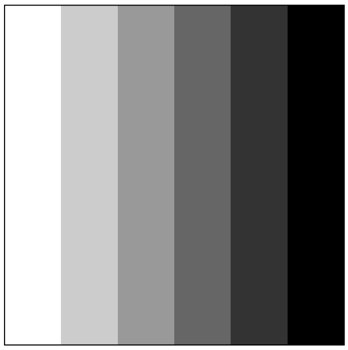
Aufgabe U9

Die folgende pgm-Datei definiert einen "Graukeil":

```
P2
6 6 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
```



Man wende hierauf die folgenden Faltungsmasken an (zentriert auf die Mitte der Maske, Matrixeinträge jenseits des Randes als 0 angenommen):

a) Die beiden Komponenten des Sobel-Operators:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) die Laplace-Maske:

$$h_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Man approximiere mittels a) Betrag und Richtung des Gradienten.

Aufgabe U10

Die partielle Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f(x, y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

kann im diskreten Fall durch $f(x+1, y) - f(x, y)$ oder durch $f(x, y) - f(x-1, y)$ approximiert werden. Man verifiziere damit die in der Vorlesung gegebene Maske $h_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ für die diskrete Version des Laplace-Operators $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Lösung 10

1. Ableitung nach x:
$f(x+1, y) - f(x, y)$
ergibt Maske $(-1\ 1)$

2. Ableitung nach x:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx [f(x+1,y) - f(x,y)] - [f(x,y) - f(x-1,y)] \;=\; f(x+1,y) - 2 * f(x,y) + f(x-1,y)$
ergibt Maske: $(1 \;\; -2 \;\; 1) = (0 \;\; -1 \;\; 1) - (-1 \;\; 1 \;\; 0)$

entsprechend für y:
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx [f(x,y-1) - f(x,y)] - [f(x,y) - f(x,y+1)] \;=\; f(x,y-1) - 2 * f(x,y) + f(x,y+1)$
ergibt Maske $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Laplace ist die Summe, also:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx -4 * f(x,y) + f(x-1,y) + f(x+1,y) + f(x,y-1) + f(x,y+1)$

Aufgabe U11

Man beweise: Für die Operationen $\mathbf{D}_B$ (Dilatation), $\mathbf{E}_B$ (Erosion) und $\mathbf{C}$ (Komplementbildung) auf Binärbildern gilt $\mathbf{E}_B \;=\; \mathbf{C}\mathbf{D}_B\mathbf{C}$.

Lösung U11

$A \oplus B = \{x | \exists a \in A : \exists b \in B : x = a + b\} = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ Minkowski-Summe
$A \ominus B = \{x | \forall b \in B : x + b \in A\}$
$B_x = B \oplus \{x\}$ um x verschobene Kopie von B

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{D}_B(X) & = & \{x | B_x \bigcap X \neq 0\} = \text{alle Punkte, für die } B \text{ an diesem Punkt verschoben } X \text{ trifft} \\ & = & \{x | \exists b \in B : x + b \in X\} \\ & = & X - b_1 \cup X - b_2 \cup X - \ldots B_i \in B \\ & = & \cup_{b \in B} X_{-b} \\ & = & \{x | x = a - b, a \in X, b \in B\} \\ & = & X \oplus \{-B\} \end{array}$$

$\mathbf{D}_B(X) = \bigcup_{b \in B} X_{-b}$
$\mathbf{E}_B(X) = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}\mathbf{D}_B\mathbf{C}(X) & = & \mathbf{C}(\bigcup_{b \in B}(\mathbf{C}(X)_{-b})) \\ & = & \bigcap_{b \in B} \mathbf{C}(\mathbf{C}(X)_{-b}) \\ & & \text{(Komplement einer Vereinigungsmenge ist Durchschnitt der Komplemente)} \\ & & \text{wegen: } \mathbf{C}(X_{-b}) = \mathbf{C}(X)_{-b} \\ & = & \bigcap_{b \in B} \mathbf{C}(\mathbf{C}(X_{-b})) \\ & = & \bigcap_{b \in B} X_{-b} \end{array}$$

Aufgabe U12

Man zeige: Die Öffnungsoperation $\mathbf{O}_B$ für Binärbilder ist a) monoton und b) anti-extensiv.

Monoton:
$X \subseteq Y \Longrightarrow \mathbf{D}_B(X) \subseteq \mathbf{D}_B(Y)$
wegen $\mathbf{E} = \mathbf{CDC}$ ist auch $\mathbf{E}$ monoton, damit auch $\mathbf{O} = \mathbf{DE}$
($\mathbf{C}$ ist antiton: $X \subseteq Y \Longrightarrow \mathbf{C}X \geq \mathbf{C}Y$)

d.h. wenn X in Y enthalten ist, dann ist auch $\mathbf{E}(X), \mathbf{D}(X), \mathbf{O}(X)$ in $\mathbf{E}(Y), \mathbf{D}(Y), \mathbf{O}(Y)$ enthalten

Anti-extensiv:
$X \supseteq \mathbf{O}_B(X)$, also $x \in \mathbf{O}_B(X) \Longrightarrow x \in X$
d.h. die Öffnung erzeugt keine neuen Pixel, kann aber welche entfernen

Lösung U12

a) monoton:
z.z.: $X \subseteq Y \Longrightarrow \mathbf{D}_B(X) \subseteq \mathbf{D}_B(Y)$
$\mathbf{D}_B(X) = \{x | \exists b \in B : x + b \in X\}$
$x + b \in X \subseteq Y \Longrightarrow x + b \in Y$
$x \in \mathbf{D}_B(X) \Longrightarrow x \in \mathbf{D}_B(Y)$
also $\mathbf{D}_B(X) \subseteq \mathbf{D}_B(Y)$
wegen $\mathbf{E} = \mathbf{CDC}$ und $X \subseteq Y \Longrightarrow \mathbf{C}X \supseteq \mathbf{C}Y$
folgt $\mathbf{E}_B(X) \subseteq \mathbf{E}_B(Y)$
$\mathbf{O}_B = \mathbf{D}_{-B}\mathbf{E}_B$ ist dann auch monoton

b) anti-extensiv:
$X \supseteq \mathbf{O}_B(X)$
z.z: $x \in \mathbf{O}_B(X) \Longrightarrow x \in X$

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{O}_B(X) &\Leftrightarrow x \in D_{-B}(E_B(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists b \in -B : x + b \in E_B(X) \\ &\Leftrightarrow \exists b \in B : x - b \in E_B(X) \\ &\Leftrightarrow \exists b \in B : \forall c \in B : (x - b) + c \in X \\ &\Leftrightarrow \exists b \in B : \forall c \in B : x + (c - b) \in X \end{aligned}$$

wähle $b = c$ bzw. $c = b \Longrightarrow \exists b \in B : x + (b - b) \in X$