

Aufgabe U4

- (a) Wie lauten die Basismatrizen der diskreten Fouriertransformation im Falle $L = R = 2$, also für 2×2 -Matrizen?
(b) Man zeige, dass diese 4 Matrizen tatsächlich eine Orthonormalbasis bilden.
(c) Wie lautet die Fouriertransformierte der folgenden Matrix:

$$(f_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ?$$

Die Faltung

Gegeben seien eine Bildmatrix B und eine $L \times R$ -Matrix K ("Kern"). Die Faltung ist eine Verknüpfung $*$, definiert als

$$K * B = A = (a_{jk})$$

mit

$$a_{jk} = \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{R-1} k_{mn} \cdot b_{j-m, k-n} ,$$

wobei A das Format der Bildmatrix B hat.

Alternative Möglichkeiten der Randbehandlung:

- Elemente mit negativem Index = 0 setzen, oder
- Bildmatrix B in beide Richtungen zyklisch wiederholen.
- Verwendung modifizierter Filtermasken am Rand

Beispiel (mit Null-Rand):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontinuierliches Analogon (für Funktionen):

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) g(x - s, y - t) ds dt .$$

Aufgabe U5

Man beweise, dass für die Faltung von Matrizen das Kommutativ- und das Distributivgesetz gelten.

Aufgabe U6

(a) Man falte die folgende Matrix mit dem Kern $K = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(Mittelwert-Filter):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Man wende den Mittelwertfilter aus Teil (a) auf folgende periodische Strukturen an:

$$\begin{array}{cccccccc} & & \vdots & & & & \vdots & \\ \dots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ & & \vdots & & & & \vdots & \end{array}$$

Man diskutiere an diesen Beispielen die Eignung als Tiefpassfilter.

Aufgabe U7

Günstigere Eigenschaften als der Mittelwertfilter hat der

Binomialfilter. 1-dimensionale Form: $B_n = \frac{1}{2^n} \left(\binom{n}{k} \right)_{k=0, \dots, n}$, 2-dim.

Form: $B_m^T \cdot B_n$ (Matrixprodukt). Man berechne den Binomialfilter $B_2^T \cdot B_3$ und wende ihn auf die beiden periodischen Muster aus Aufgabe U6(b) an.

Aufgabe U8

Gegeben sei die eindimensionale Faltungsmaske

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- (a) Man zeige: Es gibt keine faltungsinverse Maske G der Länge 7, für die also $F * G = I = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ (= Einheitsfilter) erfüllt ist.
- (b) Man bestimme eine Faltungsmaske F^+ der Länge 7, die die Summe der Abweichungsquadrate zwischen $F * F^+$ und I minimiert ("Pseudoinverse zu F ").