Aufgabe U8

Gegeben sei die eindimensionale Faltungsmaske $F = \left(\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\right)$. (Randbehandlung: Nullfortsetzung)

a) Man zeige: Es gibt keine faltungsinverse Maske G der Länge 7, für die also $F \bullet G = I = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$ (= Einheitsfilter) erfüllt ist.

b) Man bestimme eine Faltungsmaske F^+ der Länge 7, die die Summe der Abweichungsquadrate zwischen $F \bullet F^+$ und I minimiert ("Pseudoinverse zu F").

Lösung

a) Beweis durch Widerspruch:
Annahme: Es gibt faltungsinverse Maske $G = (g_0\ g_1\ g_2\ g_3\ g_4\ g_5\ g_6)$
Es soll gelten: $F \bullet G = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$
$\left(\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\right) \bullet (g_0\ g_1\ g_2\ g_3\ g_4\ g_5\ g_6) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$
$\Leftrightarrow$
$\frac{1}{4} * g_0 = 0$
$\frac{1}{2} * g_0 + \frac{1}{4} * g_1 = 0$
$\frac{1}{4} * g_0 + \frac{1}{2} * g_1 + \frac{1}{4} * g_2 = 0$
...
in Matrixschreibweise (als lineares Gleichungssystem LGS):

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \bullet G = rechteSeite \quad \rightarrow \quad A_{erw} = (A|rechteSeite)$

LGS lösbar $\Leftrightarrow Rang(A) = Rang(A_{erw})$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{erweitern\ mit\ 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementare Zeilenoperationen verändern nicht den Rang.

$$\dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$0 = 4$ Wiederspruch! $Rang(A) = 7 < Rang(A_{erw}) = 8 \rightarrow$ LGS ist nicht lösbar

b) Faltungsmaske F^+ der Länge 7, die die Abweichungsquadrate zwischen $F \bullet F^+$ und I minimiert.

$\Longrightarrow$ Ausgleichsrechnung numerische Mathematik
$Ax = b$ soll für x so gelöst werden, dass $min(\|b - Ax\|^2)$ für $x \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad A^T A x = A^T b$$
$$\Longrightarrow \quad x = (A^T A)^{-1} A^T b$$
$$\Longrightarrow \quad x = F^+ = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -24 \\ 40 \\ -24 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ausführlich:
Wir können annehmen das F^+ symmetrisch aufgebaut ist (Vorteil: weniger Unbekannte)

Ansatz: $F \bullet F^+ = X \approx I$, $\approx$ Summe der Abweichungsquadrate minimieren!
$F^+ = (g_0\ g_1\ g_2\ g_3\ g_4\ g_5\ g_6) = (d\ c\ b\ a\ b\ c\ d)$

$$\frac{1}{4}\,(1\ 2\ 1) \bullet (d\ c\ b\ a\ b\ c\ d) \;=\; \frac{1}{4} \begin{pmatrix} d \\ 2d + c \\ d + 2c + b \\ c + 2b + a \\ 2b + 2a \\ a + 2b + c \\ b + 2c + d \\ c + 2d \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S(a,\, b,\, c,\, d) &= 2d^2 + 2(2d + c)^2 + 2(d + 2c + b)^2 + 2(c + 2b + a)^2 + (2b + 2a - 4)^2 \\ &= 12d^2 + 12c^2 + 16cd + 4bd + 16bc + 4ac + 14b^2 + 6a^2 + 16ab - 16a - 16b + 16 \\ &= 6a^2 + 14b^2 + 12c^2 + 12d^2 + 16ab + 4ac + 16bc + 4bd + 16cd - 16a - 16b + 16 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\frac{\partial S}{\partial a}(a,\,b,\,c,\,d) &=& 12a+16b+4c-16\\ \frac{\partial S}{\partial b}(a,\,b,\,c,\,d) &=& 16a+28b+16c+4d-16\\ \frac{\partial S}{\partial c}(a,\,b,\,c,\,d) &=& 4a+16b+24c+16d\\ \frac{\partial S}{\partial d}(a,\,b,\,c,\,d) &=& 4b+16c+24d\end{array}\right\} = 0 \text{ Extremwertaufgabe!}$$

LGS ist eindeutig lösbar.

$$\begin{pmatrix}3&4&1&0\\4&7&4&1\\1&4&6&4\\0&1&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}$$

LGS lösen $\Longrightarrow (a,\,b,\,c,\,d) = (\frac{40}{9},\,\frac{-8}{3},\,\frac{4}{3},\,\frac{-4}{9},) = \frac{1}{9}(40,\,-24,\,12,\,-4)$
also
$F^+ = \frac{1}{9}(-4,\,12,\,-24,\,40,\,-24,\,12,\,-4)$

$$\begin{array}{rcl}F\bullet F^+ &=& \left(\frac{1}{4}\;\frac{1}{2}\;\frac{1}{4}\right)\bullet\frac{1}{9}(-4,\,12,\,-24,\,40,\,-24,\,12,\,-4)\\ &=& \frac{1}{9}(-1,\,-2+3,\,-1+6-6,\ldots)\\ &=& \frac{1}{9}(-1,\,1,\,-1,\,8,\,-1,\,1,\,-1)\\ &=& (-0,11;\,0,11;\,-0,11;\,0,11;\,0,89;\,0,11;\,-0,11;\,0,11;\,-0,11)\text{ Näherung an }I\end{array}$$