Aufgabe U4

a) Wie lauten die Basismatrizen der diskreten Fouriertransformation im Falle L = R = 2, also für 2x2-Matrizen?

b) Man zeige, dass diese 4 Matrizen tatsächlich eine Orthonormalbasis bilden.

c) Wie lautet die Fouriertransformierte der folgenden Matrix: $f(_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?

Lösung

a) DFT – Basismatrizen allg. $B_{m,n} = (e^{2\pi i * (\frac{mj}{L} + \frac{nk}{R})})$ mit $j = 0, ..., L-1$, $k = 0, ..., R-1$

$$B_{0,0} = (e^{2\pi i \bullet 0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

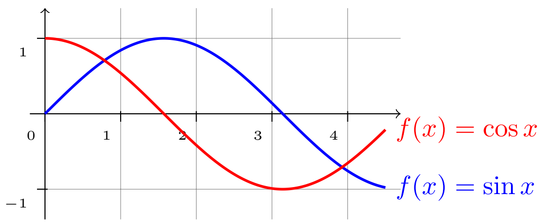
$$B_{0,1} = (e^{2\pi i \bullet (0 + k/2)}) = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 1 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $e^{i\pi} = cos(\pi) + i * sin(\pi) = -1 + i * 0$

$$B_{1,0} = (e^{2\pi i \bullet (j/2 + 0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{1,1} = (e^{2\pi i \bullet (j+k)/2)}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $e^{2i\pi} = cos(2\pi) + i * sin(2\pi) = 1$



b) Lineare Unabhängigkeit:

$$a \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + d \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a + b + c + d = 0 \\ a - b + c - d = 0 \\ a + b - c - d = 0 \\ a - b - c + d = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a + b = 0 \\ a - b = 0 \\ c + d = 0 \\ c - d = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{Bmatrix}$$

Wegen $dim(\mathbb{C}^{2x2}) = 4$ müssen die $B_{m,n}$ dann eine Basis bilden.

Orthonormal? Zu prüfen: $\langle B_{0,0}; B_{0,0} \rangle = \begin{cases} 0 & B \neq C \\ 1 & B = C \end{cases}$

$$\begin{aligned} \langle B_{0,0}; B_{0,0} \rangle &= \tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} B_{0,0}(j,h) \bullet \overline{B_{0,0}(j,h)} \\ &= \tfrac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

analog für die anderen $\langle B_{m,n}; B_{m,n} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle B_{0,0}; B_{0,1} \rangle &= \tfrac{1}{4} \textstyle\sum \sum B_{0,0}(j,h) \bullet \overline{B_{0,1}(j,h)} \\ &= \tfrac{1}{4}(1 * 1 + 1 * (-1) + 1 * 1 + 1 * (-1)) = 0 \end{aligned}$$

analog für die übrigen Kombinationen...

c) DFT von $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$g_{m,n} = \frac{1}{4} \bullet \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} f_{jk} \bullet e^{-2\pi i(\frac{j}{2}m + \frac{k}{2}n)}, \ m = 0; 1 \ n = 0; 1$$

$m = n = 0:$
$e^0 = 1$
$g_{0,0} = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4} = 2,5$, arithmetische Mittel von F, mittlere Intensität

$m = 0, n = 1:$
$g_{0,1} = \frac{1}{4}(1*1 + 2*(-1) + 3*1 + 4*(-1)) = -\frac{1}{2}$

$m = 1, n = 0:$
$g_{1,0} = \frac{1}{4}(1*1 + 2*1 + 3*(-1) + 4*(-1)) = -1$

$m = 1, n = 1:$
$g_{1,1} = \frac{1}{4}(1*1 + 2*(-1) + 3*(-1) + 4*1) = 0$

$$G = \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & -0,5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$