

Aufgabe U4

- (a) Wie lauten die Basismatrizen der diskreten Fouriertransformation im Falle $L = R = 2$, also für 2×2 -Matrizen?
(b) Man zeige, dass diese 4 Matrizen tatsächlich eine Orthonormalbasis bilden.
(c) Wie lautet die Fouriertransformierte der folgenden Matrix:

$$(f_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ?$$

Die Faltung

Gegeben seien eine Bildmatrix B und eine $L \times R$ -Matrix K ("Kern"). Die Faltung ist eine Verknüpfung $*$, definiert als

$$K * B = A = (a_{jk})$$

mit

$$a_{jk} = \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{R-1} k_{mn} \cdot b_{j-m, k-n} ,$$

wobei A das Format der Bildmatrix B hat.

Alternative Möglichkeiten der Randbehandlung:

- Elemente mit negativem Index = 0 setzen, oder
- Bildmatrix B in beide Richtungen zyklisch wiederholen.
- Verwendung modifizierter Filtermasken am Rand

Beispiel (mit Null-Rand):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontinuierliches Analogon (für Funktionen):

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) g(x - s, y - t) ds dt .$$

Aufgabe U5

Man beweise, dass für die Faltung von Matrizen das Kommutativ- und das Distributivgesetz gelten.