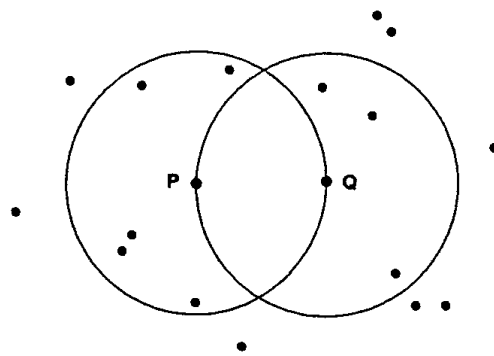


Aufgabe U20 (punktbasierte Segmentierung)

Es sei eine Menge von Punkten in der Ebene gegeben: $P = \{p_1; p_2; p_3; \dots p_N\}$. Ein *auf P definierter Graph* ist ein in die Ebene eingebetteter Graph mit Knotenmenge P , dessen Kanten Geradenstücken entsprechen, die je 2 Punkte aus P verbinden. Ein *minimaler aufspannender Baum* (minimal spanning tree, MST) ist ein auf P definierter Graph mit minimaler (euklidischer) Kantenlängensumme. Der *relative Nachbarschaftsgraph* (relative neighbourhood graph, RNG) ist ein auf P def. Graph, der genau dann eine Kante zwischen p und q hat, wenn p und q *relative Nachbarn* bzgl. P sind, d.h. für die euklidischen Abstände d gilt:

$$\forall r \in P: d(r, p) > d(p, q) \text{ oder } d(r, q) > d(p, q),$$

d.h. kein Punkt r liegt innerhalb des von p und q definierten Kreiszwieiecks.

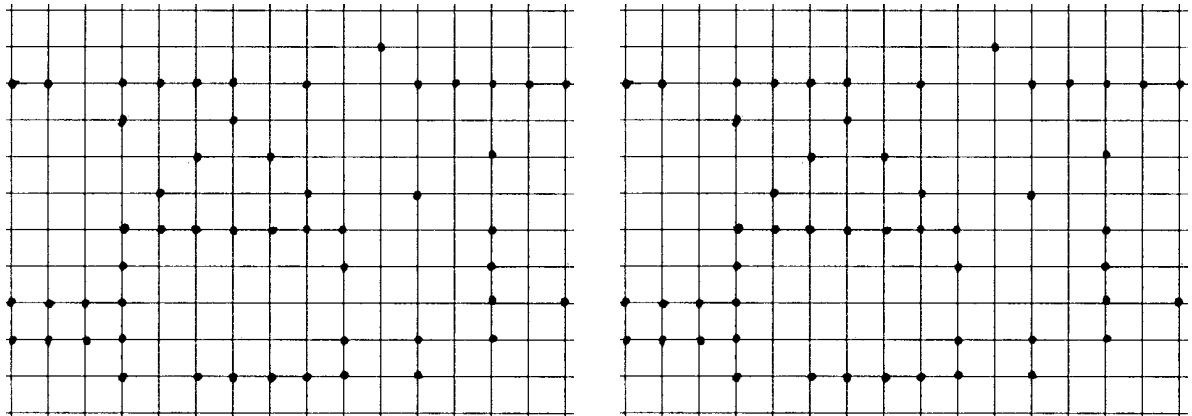


- "Greedy-Algorithmus" zur Bestimmung eines MST:
 - (1) Verbinde ein Punktepaar aus P mit kürzestem Abstand.
 - (2) Sei T die Menge der schon verbundenen Punkte. Suche einen Punkt p aus $P \setminus T$ und einen Punkt q aus T , so dass der Abstand unter allen solchen Punktepaaren am kürzesten ist, und verbinde p mit q .
 - (3) Wiederhole (2), bis keine isolierten Punkte mehr übrig sind.
- Algorithmus zur Bestimmung des RNG:

Prüfe für jede mögliche Kante pq , ob sie Kante des RNG ist. (Verfahren wird deutlich effizienter, wenn durch a-priori-Wissen feststeht, dass Kanten, deren Längen oberhalb

eines bestimmten Schwellenwertes liegen, nicht zum RNG gehören.)

- (a) Man zeige, dass der Greedy-Algorithmus tatsächlich einen MST erzeugt.
- (b) Man wende den Algorithmus an, um den MST und den RNG des folgenden Punktmusters zu bestimmen.



Anmerkung: Es gilt

$$P \subseteq MST \subseteq RNG \subseteq DT,$$

dabei ist DT die Delaunay-Triangulierung von P (siehe Skript zur Computergrafik, Kapitel 8c).

Aufgabe U21 (geodätische Distanz, geodätische Merkmale, Wasserscheiden-Transformation)

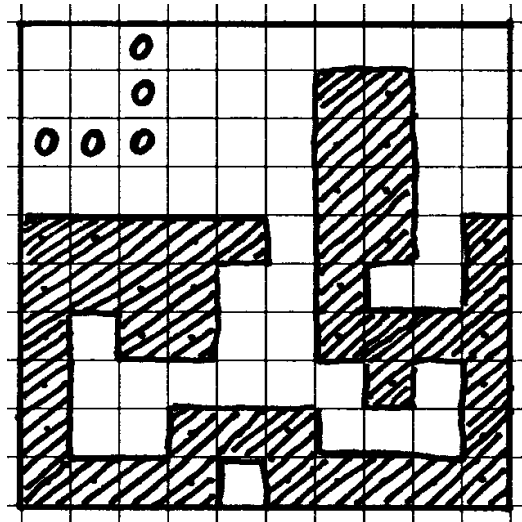
- (a) Die *geodätische Distanz* $d_A(p, q)$ zwischen 2 Bildpunkten p und q in der Bildpunkt-Teilmenge A ($p, q \in A$) ist die minimale Länge eines Pfades, der p und q verbindet (bzgl. der 8-Nachbarschaft) und ganz in A enthalten ist. (Wenn p und q in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von A liegen, wird $d_A(p, q) = \infty$ gesetzt.) Die Menge A wird als *geodätische Maske* bezeichnet. Die Pfade minimaler Länge in A heißen *geodätische Pfade*.

Man zeige: Auf zusammenhängenden Mengen A ist d_A eine Metrik.

- (b) Die geodätische Distanz zwischen einem Bildpunkt $p \in A$ und einer Teilmenge ("Markermenge") $M \subseteq A$ ist def. als

$$d_A(p, M) = \min \{ d_A(p, m) \mid m \in M \}.$$

Man bestimme für alle Pixel der folgenden geodätischen Maske A (nicht-schraffierter Bereich) die geodätische Distanz zur mit "0" markierten Menge.



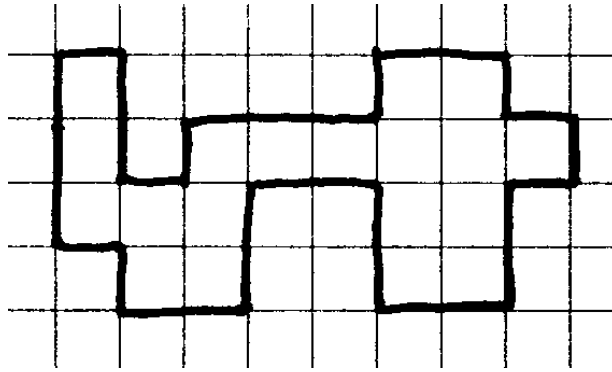
- (c) Sei A eine Punktmenge. Die *geodätische Länge* $L(A)$ ist die Länge des längsten geodätischen Weges, der in A enthalten ist. Die *Ausbreitungsfunktion* P_A auf A ist def. als

$$P_A(x) = \max \{ d_A(x, y) \mid y \in A \},$$

also als die maximale Länge eines von x ausgehenden geodätischen Weges in A . Die *geodätischen Endpunkte* von A sind die lokalen Maxima der Ausbreitungsfunktion von A , das *geodätische Zentrum* von A das lokale Minimum seiner Ausbreitungsfunktion. (Beachte: Im Gegensatz zum Schwerpunkt gehört das geodätische Zentrum auch bei nichtkonvexem A stets zu A .) Der *geodätische Radius* ist der Wert der Ausbreitungsfunktion am geodätischen Zentrum. Der *geodätische Formfaktor* von A ist

$$\frac{\pi \cdot L^2(A)}{4 \cdot \text{Fläche}(A)}$$

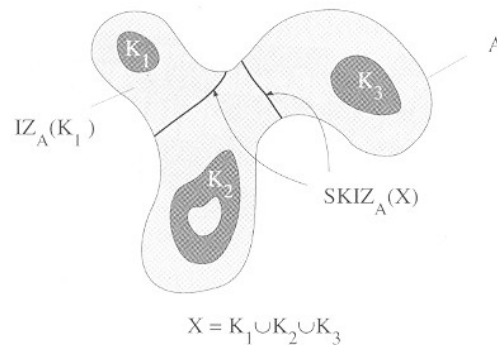
Man bestimme diese Merkmale an der folgenden Menge A .



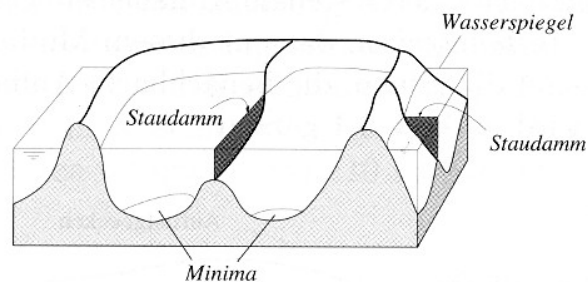
(d) Sei X eine Menge mit den Zusammenhangskomponenten K_i , $X \subseteq A$. Die *geodätische Einflusszone* (influence zone) $IZ_A(K_i)$ einer Zusammenhangskomponente von X in A ist die Menge aller Punkte von A , deren geodätische Distanz zu K_i kleiner als ihre geodätische Distanz zu jeder anderen Komponente von X ist:

$$IZ_A(K_i) = \{ p \in A \mid j \neq i: d_A(p, K_i) < d_A(p, K_j) \}.$$

Die Grenzen der Einflusszonen bilden das *geodätische Skelett durch Einflusszonen (SKIZ)*.



Die *Wasserscheidentransformation* (watershed transform) eines Grauwertbildes B verläuft anschaulich so, dass das "Grauwertgebirge" B von den lokalen Minima aus "geflutet" wird. An den Stellen, wo in diesem Flutungsprozess 2 Wasserbecken (*catchment basins*) zusammenstoßen, werden 1 Pixel-dünne Dämme errichtet.



Präziser: Beginnend mit der minimalen vorkommenden Graustufe h_{\min} durchläuft h alle Graustufen in aufsteigender Folge. $X_{h_{\min}}$ hat als Komponenten die lokalen Minima von B mit Wert h_{\min} . X_{h+1} besteht aus den geodätischen Einflusszonen der Komponenten von X_h in der Menge aller Bildpunkte mit Graustufe $\leq h+1$, vereinigt mit denjenigen Bereichen mit Graustufe $h+1$ welche keine Komponenten von X_h einschließen (neu hinzukommende lokale Minima auf Höhe $h+1$). Die Grenzen zwischen den Einflusszonen, die nach maximaler Überflutung ($X_{h_{\max}}$) entstanden sind, bilden die *Segmentierung von B durch Wasserscheiden* (watershed segmentation). (Präziser Pseudocode eines effizienten Algorithmus bei Soille 1998, S. 247ff.). Man skizziere dieses Verfahren in folgendem Grauwertbild:

