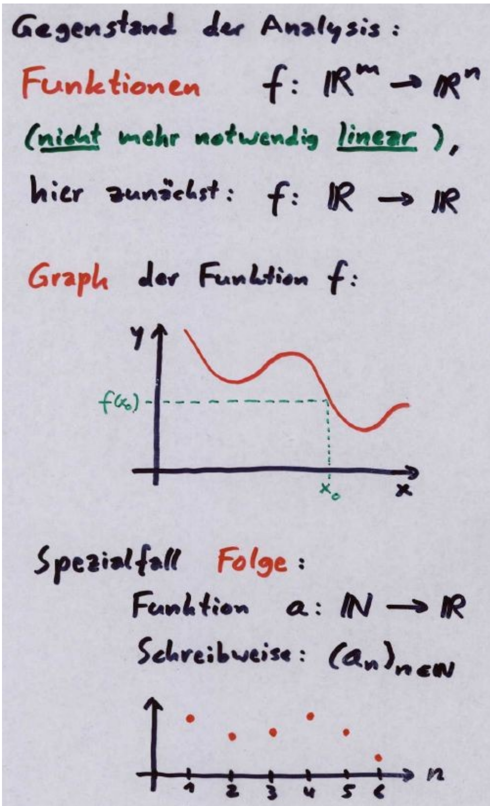
KAPITEL 3: GRUNDLAGEN DER DIFFERENTIALRECHNUNG

Neuere Methoden zur Beschreibung dynamischer Vorgänge in Waldökosystemen (Veränderung von Waldkomponenten) setzen als mathematisches Instrumentarium u.a. Grundlagen der Analysis voraus. Einige Beispiele, wie z.B. Wachstumsprozesse, lassen sich durch sogenannte differenzierbare Funktionen erfolgreich beschreiben. Und diese werden auch zu Prognosen von Wuchsleistungen der Bäume und Bestände, zur Beschreibung der Entwicklung von Populationen, zu Optimierungsaufgaben sowie zu Räuber-Beute-Modellen herangezogen. Viele Verfahren der mathematischen Physik haben bereits eine lange Tradition und aufgebaute Infrastruktur. In der Biologie dagegen und insbesondere im Forstwesen, das ja sozioökonomisch ausgerichtete Biozönosen zu steuern und zu regeln hat, halten sich seit langer Zeit konventionelle Methoden. Diese werden immer mehr durch moderne, leistungsfähigere und durch EDV-Technik unterstützte mathematisch-statistische Verfahren ersetzt. Um den Anschluss hieran zu erleichtern, ist es notwendig, sich mit den Grundlagen der Analysis (Differential- und Integralrechnung mit einer und mehreren Variablen sowie Differentialgleichungen) zu befassen.

Funktionen mit einer reellen Variablen

Hier spielt der Begriff der ***Funktion einer reellen Variablen*** eine wesentliche Rolle, der im 1. Kapitel behandelt wurde.

Zum Funktionsbegriff:



Definition 3.1: Eine Abbildung f einer Menge A in eine Menge B nennen wir ***reelle Funktion einer reellen Variablen***, falls $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Schreibweisen: (a) $f=\{(x,y) \in D(f) \times B(f) \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid V(x,y)\}$

(b) $f=\{(x,y) \in D(f) \times B(f) \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y=f(x)\}$

(c) $f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}; \quad x \in D(f) \subseteq \mathbb{R}; \quad y \in B(f) \subseteq \mathbb{R}$

(d) $y=f(x); \quad x \in D(f) \subseteq \mathbb{R}$

Abbildung 44

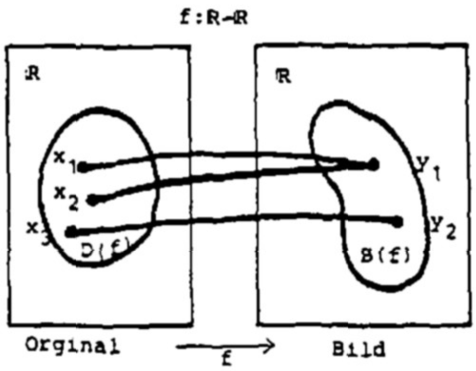
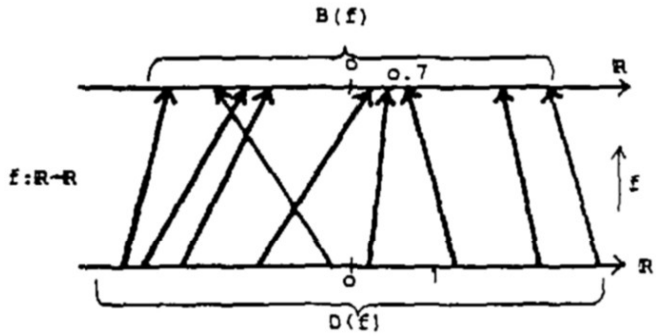


Abbildung 45



Definitionsbereich einer Funktion

Definition 3.2: Die Menge D(*f*) heißt ***Definitionsbereich*** der Funktion, das Element $x \in D(f)$ heißt ***Wert der unabhängigen Variablen*** (Original); $y \in B(f)$ heißt ***Wert der abhängigen Variablen*** (Bild).

Symbolisch: $D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid \exists_1 y\in\mathbb{R} \ \ mit \ \ (x,y)\in f\}$

Definition 3.3: Die Menge B(*f*) heißt ***Funktionsbereich*** oder Bildmenge der Funktion f.

Symbolisch: $B(f)=\{y\in\mathbb{R} \mid \exists x\in\mathbb{R} \ \ mit \ \ (x,y)\in f\}$

Darstellungsweisen:

Sind die Mengen D(*f*) und B(*f*) vorher bekannt, wird die Funktion nur mit Hilfe der Funktionsgleichung $y = f(x)$ beschrieben. Die Funktion kann in verschiedenen Formen angegeben werden, z.B. als

(a) sogenannte explizite Form der Funktionsgleichung mit $y = f(x)$, d.h. y wird aus x berechnet,

(b) sogenannte ***implizite Form*** der Funktionsgleichung mit $F(x , y) = 0$ (nur solche (x , y) sind zulässig, die diese Gleichung $F(x , y) = 0$ erfüllen).

(c) ***Funktionstabelle***

$\boldsymbol{x}$		x_1	x_2	x_3	...
$\boldsymbol{y}$		y_1	y_2	y_3	...

(d) ***Graph*** der Funktion f.

Definition 3.4: Die Menge der Punkte $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D(f) \wedge y = f(x)\}$ heißt ***Graph der Funktion f***.
Die Darstellung erfolgt gewöhnlich im kartesischen Koordinatensystem.

Abbildung 46

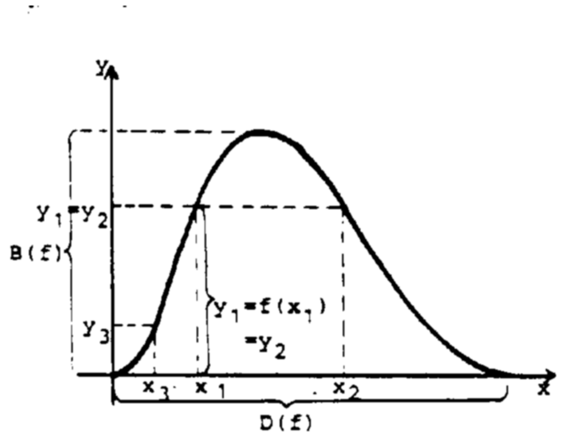


Abbildung 47

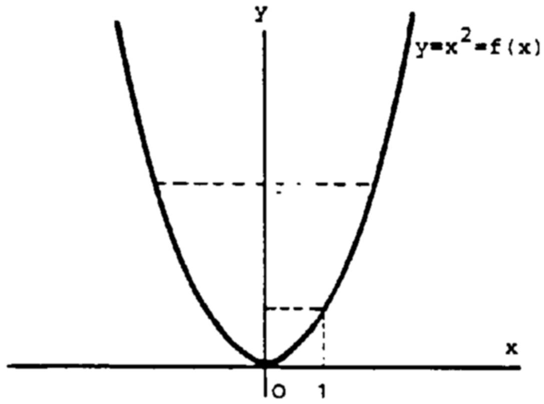
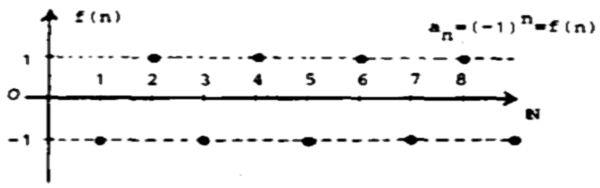


Abbildung 48



Beispiel 3.1: Der Graph von $y = x^2$ ist eine Parabel *(siehe Abb. 47)*. Der Definitionsbereich ist $D(f) = (-\infty, \infty)$, der Bildbereich $[0, \infty)$.

Folgen

Definition 3.5: Ist $D(f) = \mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen), so wird die Funktion $f(n) = a_n$ Folge genannt.

Schreibweise: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Die Werte a_n nennen wir Glieder der Folge, und n ist der Index des n-ten Gliedes.

Beispiel 3.2: Der Graph der Folge $(-1)^n$ ist die Menge der isolierten Punkte
$(1; -1), (2; 1), (3; -1), \ldots, (n, a_n), \ldots$ *(siehe Abb. 48)*.

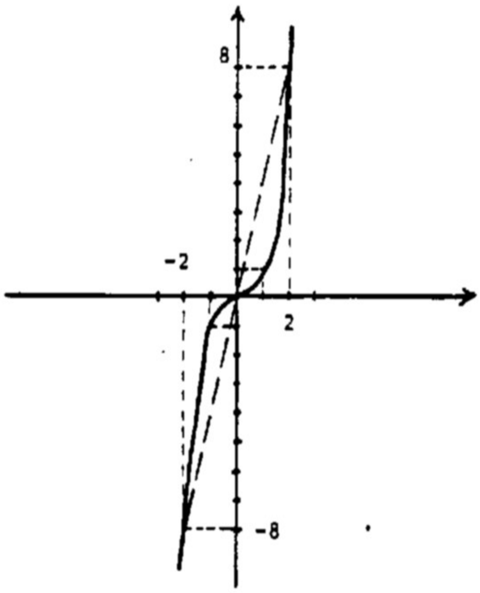
Gerade / ungerade Funktionen

Definition 3.6: Die Funktion f heißt
(a) ***gerade***, wenn $\forall x \in D(f)$ gilt: $f(-x) = f(x)$
(Der Graph einer geraden Fkt. ist symmetrisch zur y -Achse, z.B. $y = x^2$.)

(b) ***ungerade***, wenn $\forall x \in D(f)$ gilt: $f(-x) = -f(x)$

(Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch bezüglich (0, 0), z.B. $y = x^3$ *(Abb. 49)* oder $y = \sin x$.)

Abbildung 49



Beachte: Viele Funktionen sind weder gerade noch ungerade!

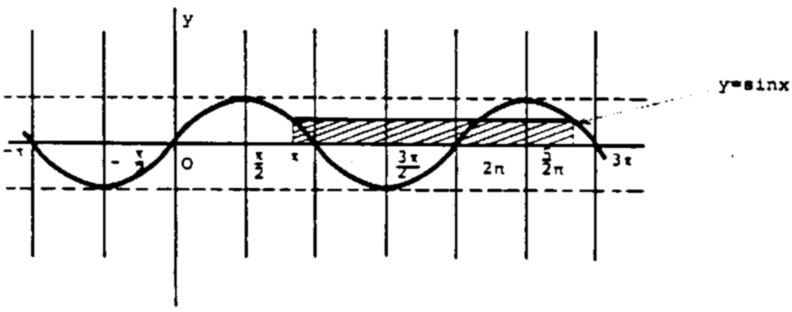
Beispiel 3.3: Die Funktion $y = \frac{\sin x}{x}$ ist eine gerade Funktion, da

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x) \quad .$$

Periodische Funktionen

Definition 3.7: Die Funktion f heißt ***periodisch*** in D (f), wenn es ein $p > 0$ gibt, so dass $\forall x \in D(f)$ gilt: $f(x+p) = f(x)$. Die Zahl ***p*** heißt die ***Periode*** der Funktion.

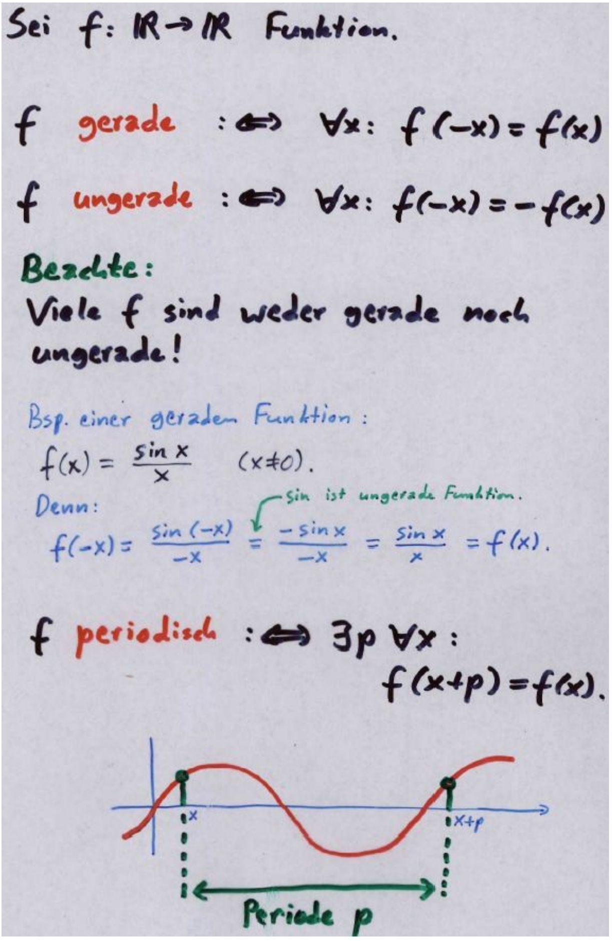
Abbildung 50

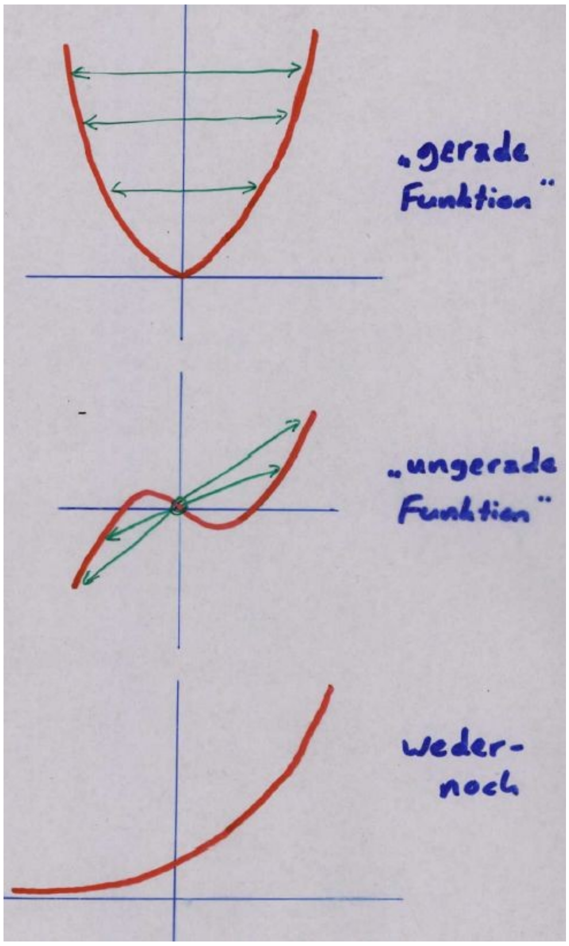


Beispiel 3.4: Die Funktion $y = \sin x$ ist periodisch in $(-\infty, +\infty)$ mit der Periode 2π, entsprechend 360° *(siehe Abb. 50).* Die Funktion $y = \operatorname{tg} x$ ist periodisch in

$$\mathbb{R} - \left\{ (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$ mit der Periode π. ($\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen.)

Zusammenfassung:



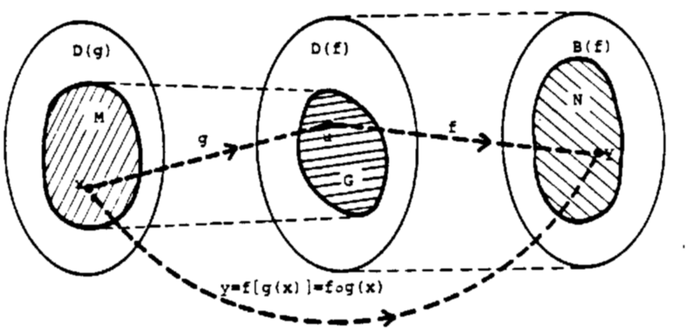


Geschachtelte Funktionen (Komposition, Verkettung)

Definition 3.8: Gegeben sei die Funktion $y = f(u)$ mit $u \in G \subseteq D(f)$ und die Funktion $u = g(x)$ mit $x \in M \subseteq D(g)$.

Es sei $\forall x \in M$ ein $u \in G$ definiert. Dann entspricht jedem $x \in M$ genau ein Wert $y \in N \subseteq B(f)$, der mit $y = f(g(x))$ oder $(f \circ g)(x)$ bezeichnet wird. Die Funktion ***g*** heißt die ***innere*** und ***f*** die ***äußere Komponente*** der geschachtelten Funktion $(f \circ g)$ *(siehe Abb. 51)*.

Abbildung 51



Beispiel 3.5: Für die Funktion $y = f(u) = u^4$ ist $D(f) = B(f) = (-\infty,\ \infty)$.
Für die Funktion $u = g(x) = \sin x$ ist $D(g) = (-\infty,\ \infty)$.
Für die Funktion $u = g(x)$ ist $B(g) = [-1,1] \subseteq D(f)$.
Daraus folgt, dass die Funktion $y = f(g(x)) = (\sin x)^4 = \sin^4 x$ auf $(-\infty,\ \infty)$ definiert ist.

Beispiel 3.6: (a) Für die Funktion $y = f(u) = e^{ku}$ ist $D(f) = (-\infty,\ \infty)$.

Für die Funktion $u = g(x) = \dfrac{1}{x^a}$, $a > 0$ reell, ist $D(y) = (0, \infty)$.

Für die Funktion $g(x)$ ist $B(g) = (0,\infty) \subseteq D(f)$.

Daraus folgt, dass die Funktion $y = f(g(x)) = e^{k \cdot \frac{1}{x^a}}$ auf $(-\infty,\ \infty)$ definiert ist.

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + x + 1 \\
g(x) &= x - 1 \\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x-1) \\
&= (x-1)^2 + (x-1) + 1 \\
&= x^2 - 2x + 1 + x - 1 + 1 \\
&= \underline{\underline{x^2 - x + 1}}
\end{aligned}
$$

Inverse Funktion

Für die Einführung der inversen Funktion ist der Begriff einer ***eineindeutigen Funktion*** von Bedeutung, und dieser entspricht dem der *injektiven* Abbildung im Spezialfall der Funktion von ℝ in ℝ.

Definition 3.9: Die Funktion f heißt ***eineindeutig*** (injektiv) in M, wenn
$\forall x_1, x_2 \in M:\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$ *(vergl. Def. 1.13)*

Abbildung 52

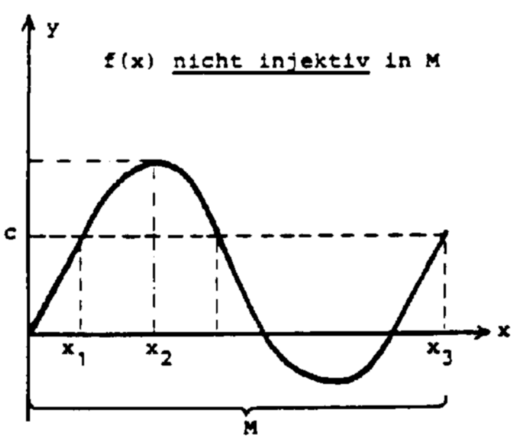
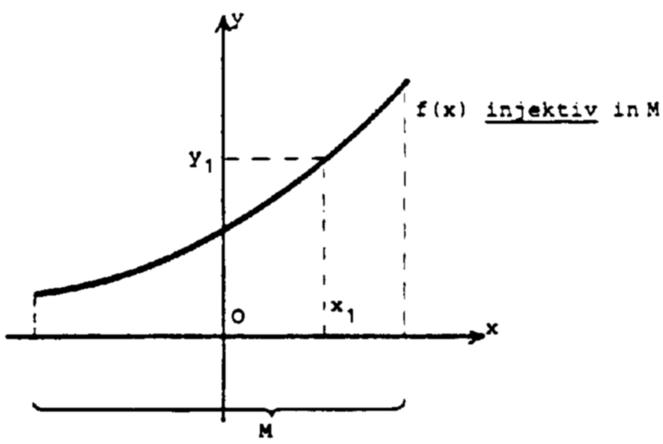


Abbildung 53



Definition 3.10: Ist f in $M \subseteq D(f)$ injektiv, und bildet f die Menge M auf $N \subseteq B(f)$ ab, d.h. $f: M \to N$, dann wird die Funktion, die jedem $y \in N$ die Zahl $x \in M$ mit $f(x) = y$ zuordnet, die ***inverse Funktion*** zur Funktion f genannt und mit f^{-1} bezeichnet, $x = f^{-1}(y)$, also $f^{-1}: N \to M$. (Sie wird daher auch Umkehrfunktion genannt.)

Für Definitionsbereich und Bildbereich der Funktion f^{-1} gilt:

(a) $D(f^{-1}) = B(f)$ (Die Bezeichnung der Variablen wird dann aber vertauscht, damit die unabhängige Variable immer mit x und die abhängige einheitlich mit y bezeichnet wird.)

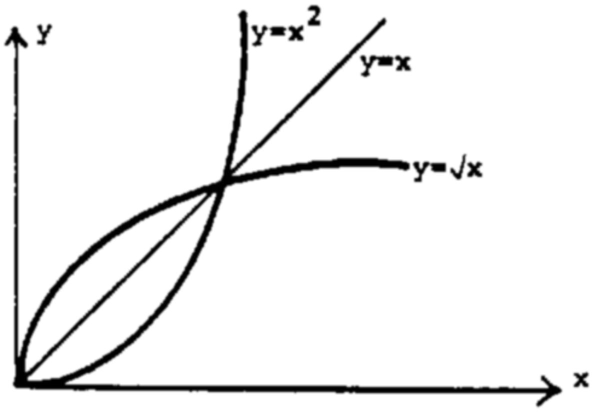
(b) $B(f^{-1}) = D(f)$.

Den Graphen der inversen Funktion $y = f^{-1}(x)$ erhalten wir aus dem Graphen der Funktion $y = f(x)$ durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden, der Geraden $y = x$ (Vertauschen von x und y, *siehe Abb. 54*).

Beispiel 3.7: $y = f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$. Die inverse Funktion f^{-1} zu f wird durch Auflösen nach x erhalten als $x = \sqrt{y}$. Nach Vertauschung der Variablen ergibt sich die zu $y = f(x) = x^2$ symmetrisch verlaufende Funktion $y = \sqrt{x}$, wobei die Gerade $y = x$ die Symmetrieachse darstellt.

Graphen von $y = x^2$ und der inversen Funktion $y = \sqrt{x}$:

Abbildung 54



$D_x(f) = [0, \infty)$; $B_y(f) = [0, \infty)$

$B_y(f^{-1}) = [0, \infty)$; $D_x(f^{-1}) = [0, \infty)$

Beispiel 3.8: (a) Zur Funktion $y = \sin\, x$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $y \in [-1,1]$ ist die inverse Funktion definiert: $y = \arcsin\, x$, $x \in [-1,1]$ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Zur allgemeinen Exponentialfunktion $y = a^x$; $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (0, \infty)$ ist die inverse Funktion definiert: $y = \log_a x$, $x \in (0, \infty)$; $y \in (-\infty, \infty)$ *(gelesen: Logarithmus von x zur Basis a).*

Es gilt $f(f^{-1}(x)) = x$; $f^{-1}(f(x)) = x$;
z.B.: $\ln e^x = x$; $\arcsin \sin x = x$.

Beispiel 3.9: Bestimmen Sie D(*f*) zur Funktion *f*, bestimmen Sie f^{-1} zu f:
$y = f(x) = 1 + \ln(x+2)$; $x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2.$

$D(f) = (-2, \infty)$; $B(f) = (-\infty, \infty)$;
$f^{-1}(x)$: $\ln(x+2) = y - 1 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = e^{y-1} \quad \Rightarrow \quad x = e^{y-1} - 2$

Vertauschung der Bezeichnung für die Variablen ergibt: $y = e^{x-1} - 2 = f^{-1}(x)$.

Beispiel 3.10: $y = 4\arcsin\sqrt{1-x^2}$; $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \Rightarrow 0 \le 1-x^2 \le 1 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow$
$-1 \le x \le 1$, $x^2 \ge 0$ gilt immer;

$$f^{-1}(x):\quad \sqrt{1-x^2} = \sin\left(\frac{y}{4}\right) \Rightarrow 1-x^2 = \sin^2\left(\frac{y}{4}\right) \Rightarrow$$

$$x^2 = 1-\sin^2\left(\frac{y}{4}\right) \Rightarrow x = \sqrt{1-\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)} = \cos\frac{y}{4} .$$

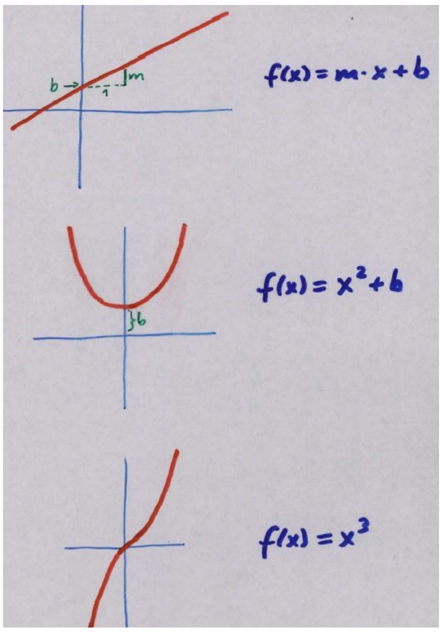
Änderung der Variablenbezeichnung: $y = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$.

Beispiel:
Umkehrfunktion

gegeben: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{2} \quad (x > -1)$

$$y = \frac{1}{2}\ln(x+1)$$
$$2y = \ln(x+1)$$
$$e^{2y} = x+1$$
$$x = e^{2y} - 1$$
$$f^{-1}(x) = e^{2x} - 1$$

Grundlegende Funktionen (Übersicht)



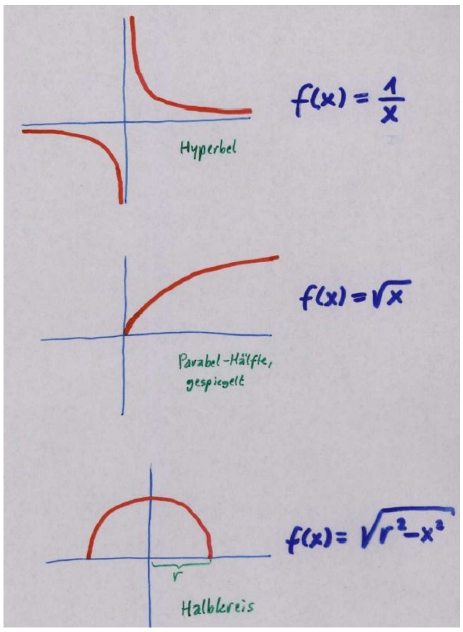
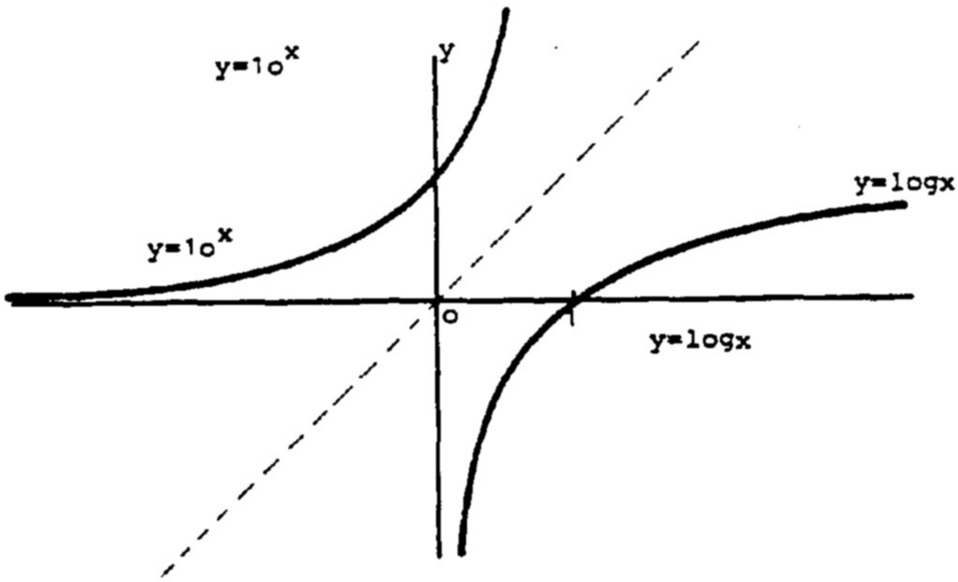


Tabelle der Elementarfunktionen

Name der Funktion	**Einfache Form $f(x)$**	**Definitionsbereich**	**Bild-bereich**	**Form der geschachtelten Fkt.**	**Beispiele**
Konstante	$y = c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{c\}$		$y = 9$
Lineare Funktion	$y = mx + b$ $m, b \in \mathbb{R}$ $m \neq 0$.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y = m \cdot f(x) + b$	$y = -x + 42$
Potenzfunktion	$y = x^n$ $n \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$y = (f(x))^n$	$y = \sin^3 x$; $y = \sqrt{\log\ x}$ $= (\log x)^{\frac{1}{2}}$
Exponential-funktion	$y = e^x$, $y = a^x,\ a > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = e^{f(x)}$ $y = a^{f(x)}$	$y = e^{x^2}$ $y = 3^{\cos x}$
Logarithmus-Funktion	$y = \log_a x$, $a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$y = \log_a f(x)$	$y = \log_3 \operatorname{tg} x$
Trigonometrische Funktionen	$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{R} - \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$	$[-1, 1]$ $[-1, 1]$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$y = \sin\ f(x)$ $y = \cos\ f(x)$ $y = \operatorname{tg}\ f(x)$ $y = \operatorname{cotg}\ f(x)$	$y = \sin x^5$ $y = \cos 2x$ $y = \operatorname{tg} x/2$ $y = \operatorname{cotg}\,(x^2+1)$
Zyklometrische Funktionen	$y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \operatorname{arctg} x$ $y = \operatorname{arccotg} x$	$[-1, 1]$ $[-1, 1]$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $[0, \pi]$ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $[0, \pi]$	$y = \arcsin f(x)$ $y = \arccos f(x)$ $y = \operatorname{arctg} f(x)$ $y = \operatorname{arccotg} f(x)$	$y = \arcsin \frac{1}{x}$ $y = \arccos 4x$ $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$ $y = \operatorname{arccotg}(-2x)$

Abbildung 55



Ähnliche Form hat $y = e^x$ bzw. die Umkehrfunktion dazu, $y = \ln x$.

Abbildung 56

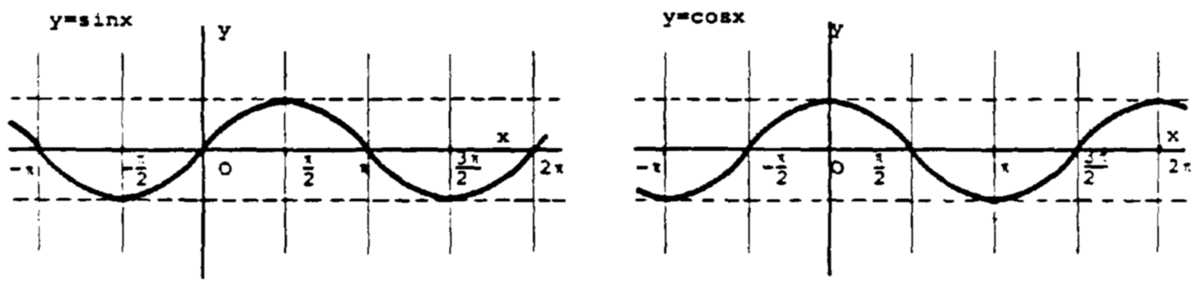


Abbildung 57

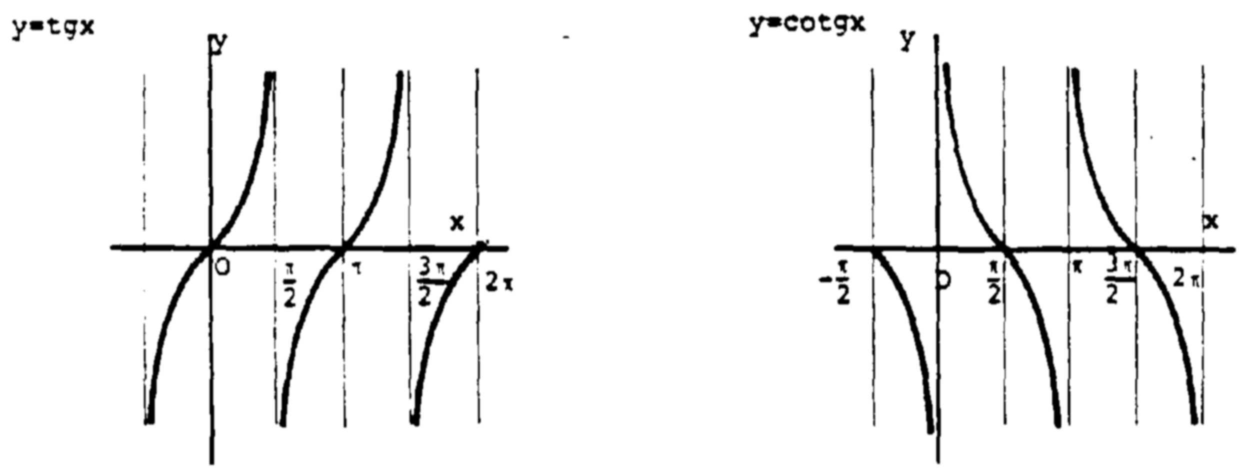
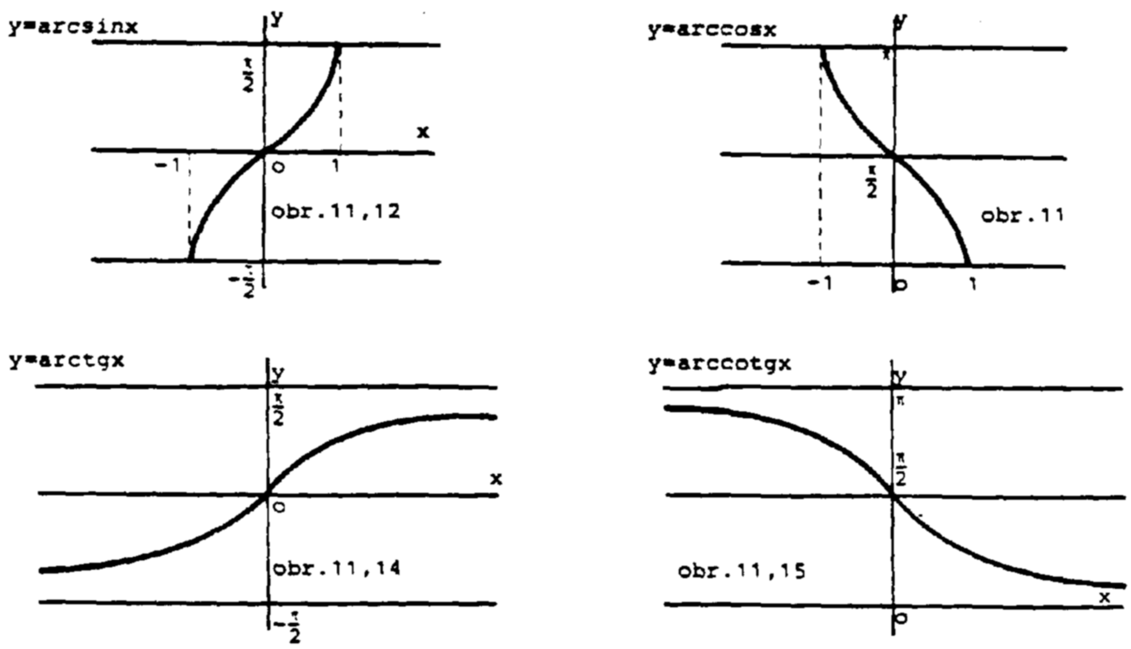


Abbildung 58



Zu den trigonometrischen Funktionen

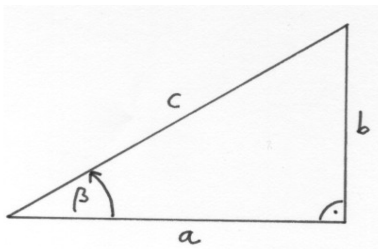


Abbildung 59

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad tg\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \qquad cotg\,\beta = \frac{a}{b} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{1}{tg\,\beta}$$

Gradmaß − Bogenmaß:

$\pi = 180°$ ⇒ Umrechnungsfaktor: $x_{\text{Bogenmaß}} = x_{\text{Gradmaß}} \cdot \dfrac{\pi}{180}$ bzw. $x_{\text{Gradmaß}} = x_{\text{Bogenmaß}} \cdot \dfrac{180}{\pi}$

<u>Merke:</u>

$\sin 0° = \cos 90° = 0$ $\qquad$ $\sin 90° = \cos 0° = 1$

$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\qquad$ $tg\,45° = 1$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Grenzwert einer Funktion

An dieser Stelle werden sich die Definitionen und Eigenschaften von Umgebungen von Punkten $a \in \mathbb{R}$ als sinnvoll erweisen.

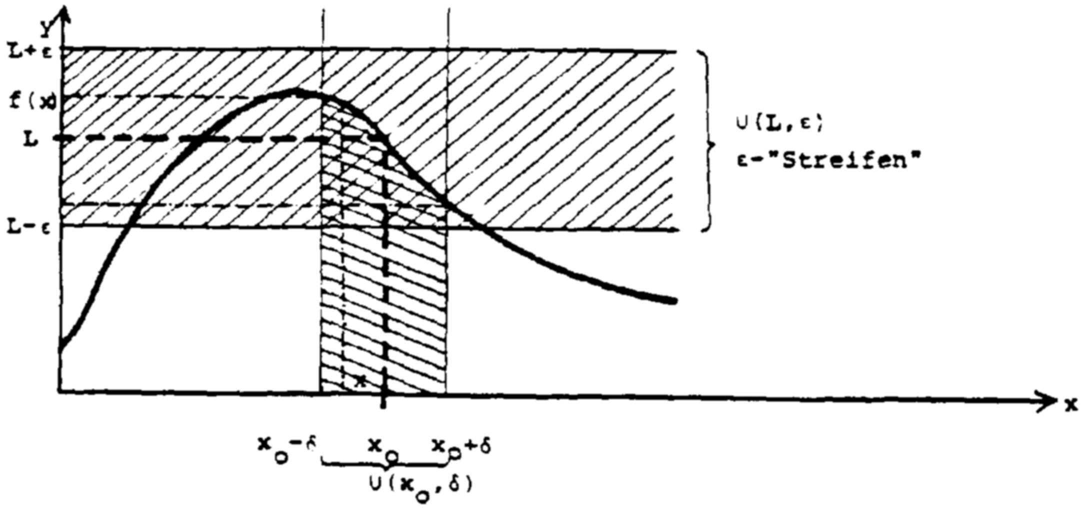
Bezeichnungen:

$U(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}$ heißt ***δ-Umgebung*** von a;
$U_{\cdot}(a, \delta) = U(a, \delta) - \{a\}$ heißt ***punktierte δ-Umgebung*** von a;
$U^{+}(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le a+\delta\}$ heißt ***rechte δ-Umgebung*** von a;
$U^{+}_{\cdot}(a, \delta) = U^{+}(a, \delta) - \{a\}$ heißt ***rechte punktierte δ-Umgebung*** von a.
Analog wird die linke Umgebung $U^{-}(a, \delta)$, $U^{-}_{\cdot}(a, \delta)$ definiert.

Definition 3.11: $f(x)$ sei in einer punktierten Umgebung U des Punktes x_0 definiert. Die Funktion f hat den Grenzwert L genau dann, wenn zu jeder ε-Umgebung $U(L, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ von L (reelle Zahl) eine δ-Umgebung $U_{\cdot}(x_0, \delta) \subseteq \mathbb{R}$ des Punktes x_0 existiert, so dass $\forall x \in U_{\cdot}(x_0, \delta)$ gilt: $f(x) \in U(L, \varepsilon)$.

Bezeichnung: $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *(siehe Abb. 60)*, kurz auch: $f(x) \to L$ für $x \to x_0$.

Abbildung 60



Geometrische Deutung des Grenzwertes von $f(x)$:

Die Existenz von $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ bedeutet geometrisch folgendes:

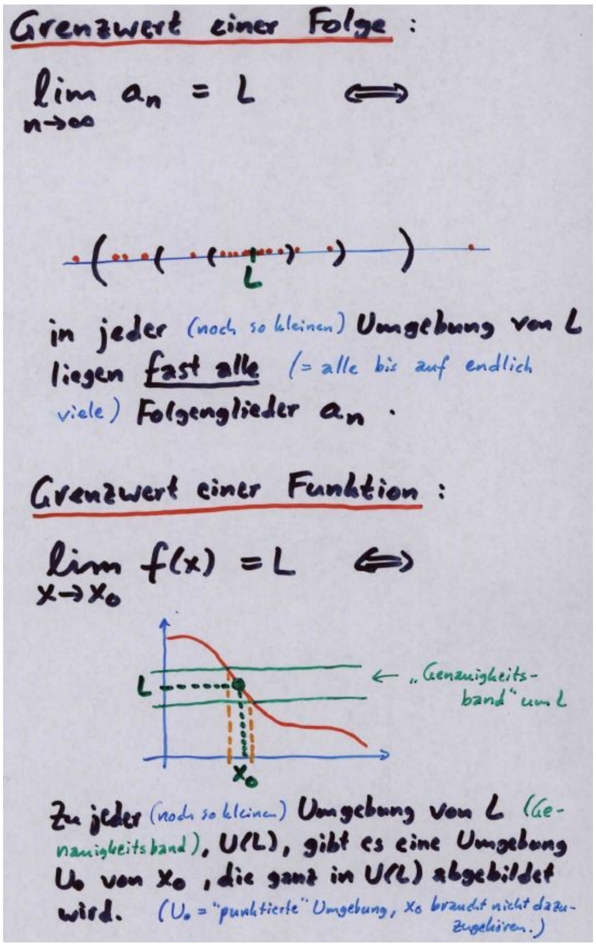
Für $x \in U_{\cdot}(x_0, \delta)$ liegt der Graph von $y = f(x)$ innerhalb des Streifens zwischen $y = L + \varepsilon$ und $y = L - \varepsilon$. Genauer ausgedrückt:

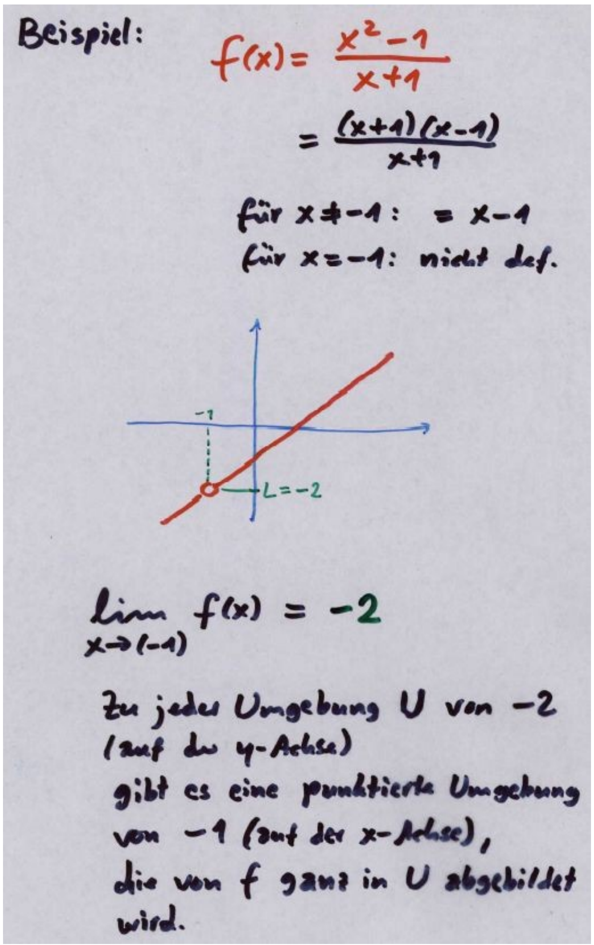
Wählen wir den Streifen zwischen $y = L + \varepsilon$ und $y = L - \varepsilon$ beliebig eng, so existiert immer eine δ-Umgebung von x_0, so dass für alle Punkte $x \neq x_0$ aus dieser Umgebung gilt:

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Symbolisch: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\ \exists \delta \in \mathbb{R}^{+}$: $\forall x \in U_{\cdot}(x_0, \delta)$ gilt: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Zusammenfassung:





Schreibweisen für verschiedene Arten von Grenzwerten:

(a) ***Endlicher Grenzwert von rechts im endlichen Punkt x_0 (rechtsseitiger Grenzwert)*:**

Bez.: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$: $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists\delta \in \mathbb{R}^+$: $\forall x \in U^+_\cdot(x_0, \delta) \Rightarrow |\, f(x) - L \,| < \varepsilon$

(siehe Abb. 61). Analog linksseitiger Grenzwert $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

(b) ***Endlicher Grenzwert in +∞***

Bez.: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$: $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists k \in \mathbb{R}^+$: $\forall x \in (k, +\infty) \Rightarrow |\, f(x) - L \,| < \varepsilon$ *(siehe Abb. 63).*

(c) ***Unendlicher Grenzwert im endlichen Punkt x_0***

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists\delta \in \mathbb{R}^+$: $\forall x \in U_\cdot(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) > M$ *(siehe Abb. 62).*

Wichtig: (a) Die Wahl von $\delta > 0$ oder k ist abhängig von der Wahl der Zahl $\varepsilon > 0$.

(b) Aus der Definition 3.11 geht klar hervor, dass uns die Funktionswerte x_0 in Punkten, die außerhalb von $U_\cdot(x_0, \delta)$ liegen, nicht interessieren (Grenzwert als lokale Eigenschaft).

Abbildung 61

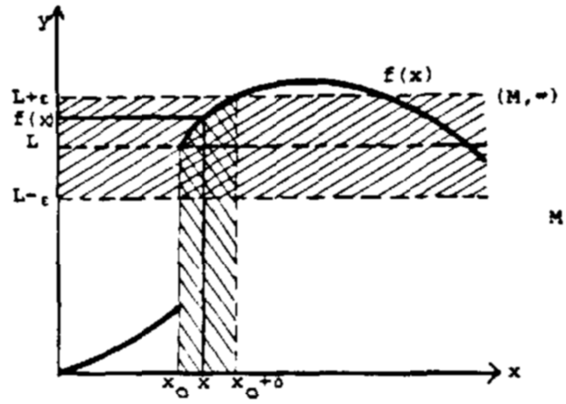


Abbildung 62

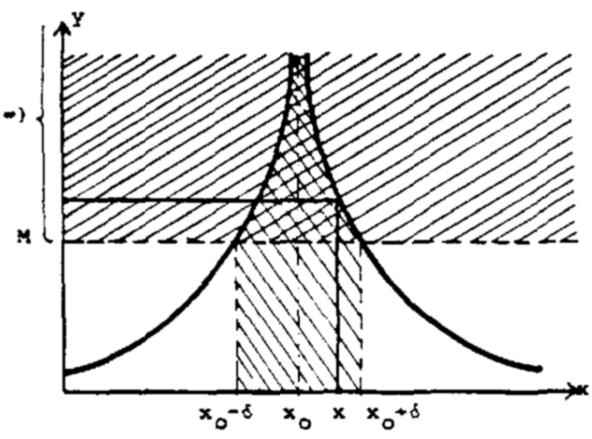
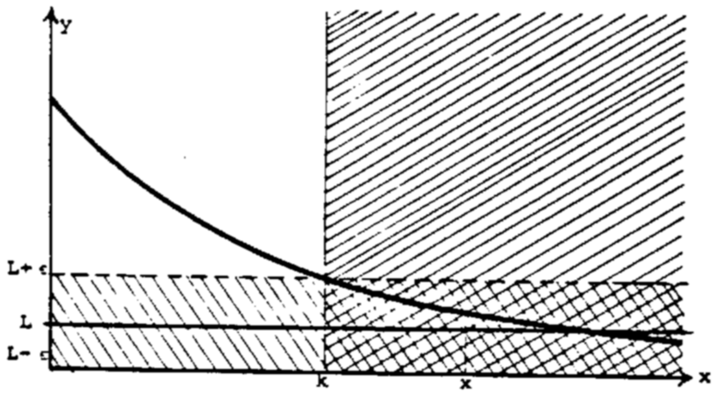


Abbildung 63



Spezielle grundlegende Grenzwerte:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x} = 1$

Wichtige Regeln zu Operationen mit den Grenzwerten

Voraussetzung: Es existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Dann gilt: 1. $\lim\limits_{x\to x_0} k = k \quad k\in\mathbb{R};$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$;

4. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

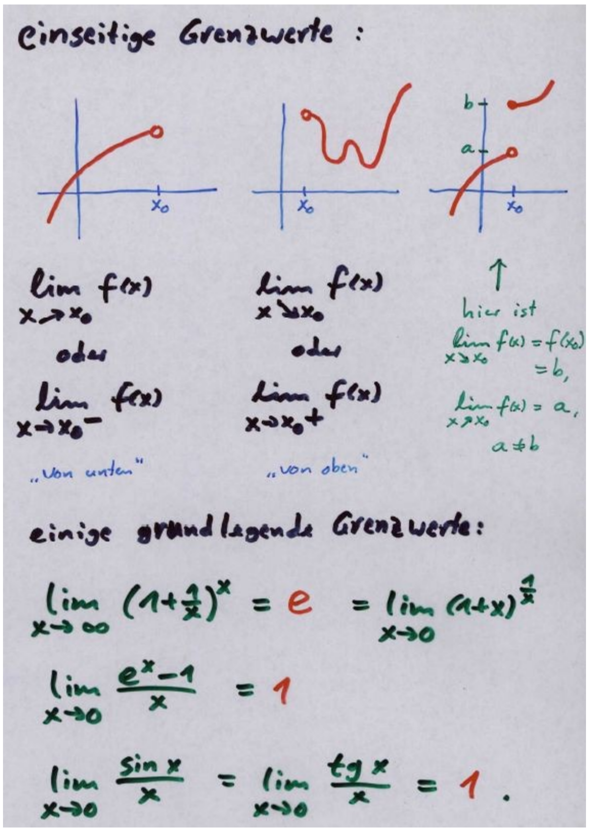
5. $\lim\limits_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $k \in \mathbb{R}$;

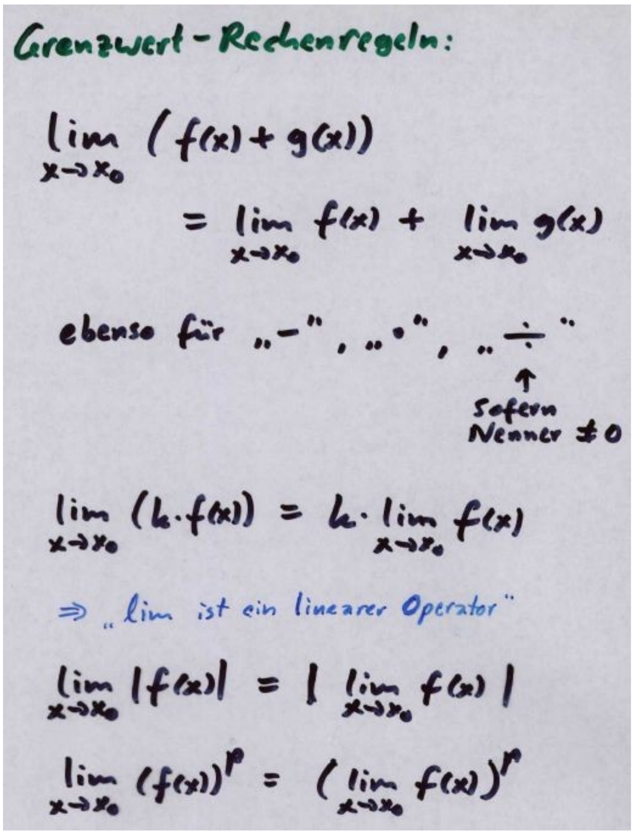
6. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$;

7. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^P = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x))^P$ falls $f(x) \geq 0$;

Die Beweise hierfür sind Analysis-Lehrbüchern zu entnehmen.

Zusammenfassung:

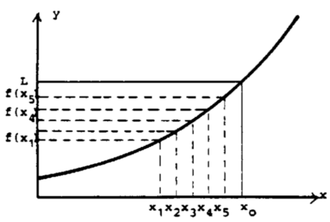




Bei der Einführung des Grenzwertes von Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen ist folgende äquivalente Definition des Grenzwertes von Bedeutung:

Definition 3.12: $f(x)$ sei in einer Umgebung U von x_0 definiert.
Die Funktion $f(x)$ hat in x_0 den Grenzwert L, wenn für jede Folge (x_n), $x_n \in$ U, mit $(x_n \to x_0 \ \wedge \ \forall n \ \ x_n \neq x_0)$ gilt: $f(x_n) \ \to \ L$ *(siehe Abb.64).*

Abbildung 64



In den folgenden Beispielen werden einige Methoden zur Berechnung von Grenzwerten gezeigt:

Beispiel 3.11: (a) Bei stetigen Funktionen wird einfach x_0 in $f(x)$ eingesetzt:

$$\lim_{x\to 2}(3^x+1)^2=(3^2+1)^2=100 \quad .$$

(b) Durch Zerlegung der Polynome in Zähler und Nenner einer gebrochen-rationalen Funktion kann eventuell die Unstetigkeit aufgehoben werden, nämlich durch Kürzen:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2x+1)(x+2)}{(x^2-2x+1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

(c) Beim Vorliegen von Wurzeln werden oft Zähler und Nenner um einen Faktor erweitert, um die Unstetigkeit zu beheben:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)\cdot(\sqrt{x-1}+2)}{(x^2-4x-5)\cdot(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x+1)(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{24}$$

(d) Oft werden der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ und die Identitäten

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{angewandt:}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{1-\cos 4x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{2}\sin 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}$$

$$= \| \text{ Subst.: } 2x=t \quad x\to 0 \quad t\to 0 \ \|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\ t}{t}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ;$$

(e) Einseitige Grenzwerte $\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ (bzw. $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$) werden mit Hilfe der Substitution $x = x_0 +\delta$, $(x = x_0 -\delta)$ gelöst, indem die Grenzwerte $\lim_{\delta\to 0^+}f(x_0+\delta)$, $\lim_{\delta\to 0^-}f(x_0-\delta)$ berechnet werden.

Z.B. $\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{9-x^2}$ $= \| \text{ Subst.: } x=3+\delta \quad x\to 3 \ , \ \delta\to 0 \ \|$

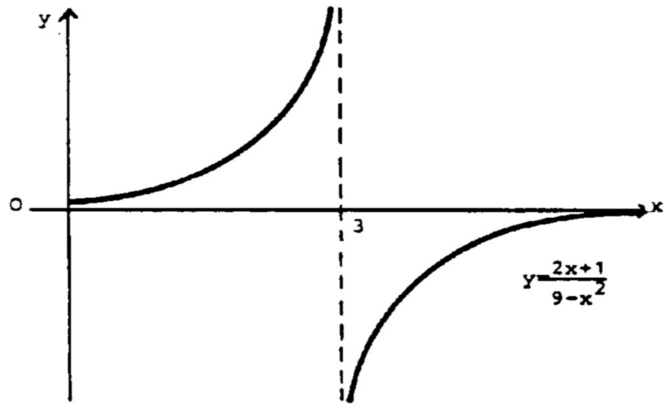
$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{2(3+\delta)+1}{9-(3+\delta)^2} = \lim_{\delta\to 0}\frac{6+2\delta+1}{9-(9+6\delta+\delta^2)}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} -\frac{7+2\delta}{6\delta+\delta^2} = -\infty$$

(Der Grenzwert des Bruches ist ∞, weil der Nenner sehr klein und damit der Bruch als ganzes sehr groß wird, wenn sich δ an Null annähert.)

Analog ist $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x+1}{9-x^2} = +\infty$ *(siehe Abb. 65).*

Abbildung 65



(f) Beim Typ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m} = \begin{cases} 0 & n<m \\ \pm\infty & n>m \\ \frac{a_n}{b_n} & n=m \end{cases}$

werden Zähler und Nenner durch x^k dividiert, wobei $k = \max(n, m)$ ist.

z.B. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+\frac{5}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+2}{2x^2+3x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

Falls $n > m$, „Zähler dominiert“:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+2x^2+x-5}{10x^2+2x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5-3x^2+1}{-x^3+10} = -\infty \quad (-\infty \text{ wegen „}-\text{“ im Nenner})$$

Falls $n = m$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+x^3-5}{-3x^4+7} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{10x^3+5x^2}{2x^3-7x+1} = 5 \qquad \text{(ebenso, „–" kürzt sich weg)}$$

Falls $n < m$, „Nenner dominiert":

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{50x^2+8x-1}{x^3+3x^2-2} = 0$$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x+4}\right)^x = \|$ Subst.: $x+4=u \quad x\to\infty \quad u\to\infty \; \| = \lim\limits_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u-4}$

$$= \lim_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^u \cdot \lim_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{-4} = e \cdot 1^{-4} = e$$

Zusammenfassung:

Techniken der Grenzwertberechnung:

(a) Einsetzen von x_0, wenn $f(x_0)$ definiert ist u. f „stetig" ist

(siehe später)

z.B. $\lim\limits_{x\to 2} (3^x+1)^2 = (3^2+1)^2 = 100$

(b) Polynom-Zerlegung + Kürzen:

z.B.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)^2}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-1)^2}\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

Schriftliche Polynom-Division:

$$\begin{array}{l} (x^3-x^2-x+1):(x-1) = x^2-1 \\ \underline{x^3-x^2} \\ \quad\;\; 0-x+1 \\ \quad\;\; \underline{\;\;-x+1} \\ \quad\quad\quad\;\; 0 \end{array}$$

(c) Fallunterscheidung bei gebrochenrationalen Funktionen im Fall $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n<m \\ \pm\infty & \text{falls } n>m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n=m \end{cases}$$

Beachte:
Diese Regel gilt nur für $x \to \pm\infty$.

Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

für $x \to \pm\infty$, Beispiele:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+x-5}{10x^2+2x+3} = +\infty$

   Fall $n>m$, „Zähler dominiert"

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5-3x^2+1}{-x^3+10} = -\infty$

   ebenso, jedoch hier $-\infty$ wegen „–" im Nenner

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4+x^3-5}{-3x^4+7} = -\frac{2}{3}$

   Fall $n=m$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{10x^3+5x^2}{2x^3-7x+1} = 5$

   ebenso, „–" kürzt sich weg

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{50x^2+8x-1}{x^3+3x^2-2} = 0$

   Fall $n<m$, „Nenner dominiert"

O-Notation nach Bachmann und Landau (Großbuchstabe O, nicht Null!)

$f(x) = O(g(x))$ heißt:

für alle genügend großen x gilt:

$|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$ (c = Konstante),

„f wird durch $c \cdot g$ (dem Betrage nach) majorisiert“,
„f ist höchstens <u>von der Größenordnung</u> g“

$f(x) = o(g(x))$ heißt:

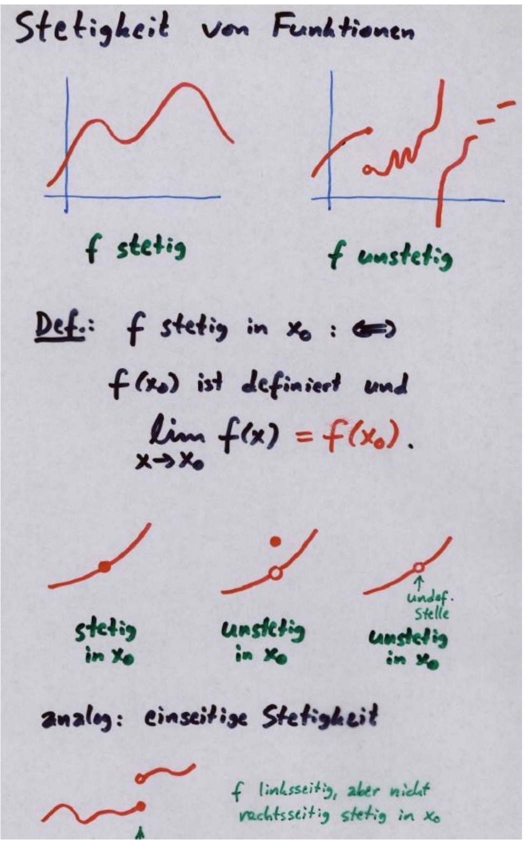
$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

Beachte: Das Gleichheitszeichen ist hier eigentlich fehlerhaft. Aus $f_1(x) = O(g(x))$ und $f_2(x) = O(g(x))$ folgt <u>nicht</u> $f_1 = f_2$.

Beispiele:

$$5x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 1 = O(x^4)$$
$$x^{10} - 6x^5 + \frac{1}{2}e^x = O(e^x)$$
$$5x + \sqrt{x} + 2\log x = O(x)$$

Stetigkeit von Funktionen



<u>Definition 3.13:</u> Die Funktion f ist im Punkt x_0 <u>stetig</u>,
(a) wenn sie in x_0 definiert ist (d.h. das Symbol $f(x_0)$ hat einen Sinn),
(b) wenn $\lim_{x \to x_0} f(x)$ gleich dem Funktionswert ist, d.h. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Symbolisch: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Andernfalls heißt f in x_0 unstetig.

Einseitige Stetigkeit

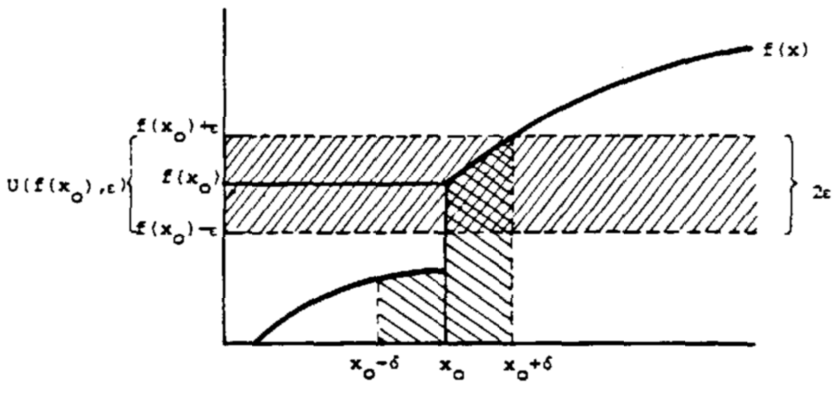
Die Funktion f heißt in x_0 rechtsseitig (linksseitig) stetig, wenn sie in x_0 definiert ist und wenn gilt:
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0))$.

In der naiven Vorstellung kann man sich eine stetige Funktion als einen Graphen denken, den man mit einem Zug, ohne abzusetzen, zeichnen kann. Unterbrechungen und Sprünge treten darin nicht auf. (Beispiele: Wachstumsfunktionen und morphologische Kurven von Stämmen). Eine stetige Funktion hat also folgende Eigenschaft: Ändert man x „sehr wenig" auf $(x + \Delta x)$, so wird sich $f(x)$ sehr wenig ändern (auf $f(x + \Delta x)$).

D.h.: Geht Δx gegen 0 ($\Delta x \to 0$), so gilt auch $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \to 0$.

Die in der Abbildung 66 dargestellte Funktion f ist in x_0 unstetig, da zu beliebig gewähltem ε keine δ-Umgebung von x_0, $U(x_0, \delta)$, existiert, so dass alle Funktionswerte $f(x)$ $\forall x \in U(x_0, \delta)$ im $2 \cdot \varepsilon$-Streifen liegen. Die dargestellte Funktion ist aber in x_0 rechtsseitig stetig.

Abbildung 66



Die sogenannten Elementarfunktionen f dienen sehr oft als Bausteine für Modelle (Potenz-, Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische Funktionen, etc.). Die in der Tabelle (s.o.) aufgeführten Funktionen sind in allen $x \in D(f)$ stetig.

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft der Funktion.

Ist aber eine Funktion $f(x)$ für alle $x_0 \in [a, b]$ stetig, so sagen wir, $f(x)$ ist *auf dem Intervall* $[a, b]$ stetig.

Man beweist in der Analysis: $y = \text{const.}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

Sind $f(x)$ und $g(x)$ in x_0 (auf $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$) stetig, so ist

(a) $f(x) + g(x) = h(x)$ in x_0 (auf $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$) stetig.

(b) $f(x) \cdot g(x)$ in x_0 (auf $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$) stetig.

(c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ in x_0 (auf $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$) stetig. (Voraussetzung: $g(x) \neq 0$)

(d) $|f(x)|$ in x_0 (auf $[a, b]\subseteq\mathbb{R}$) stetig.

(e) $k \cdot f(x)$ in x_0 (auf $[a, b]\subseteq\mathbb{R}$) stetig. ($k\in\mathbb{R}$)

Bei Beachtung der oben aufgeführten Bemerkungen kommt man zu folgendem Ergebnis:

$y = x^n$ ist in $(-\infty, \infty)$ stetig. Dann ist $y = a\,x^n$ ebenfalls stetig in $(-\infty, \infty)$, genau wie

$y = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n = P_n(x)$ (allgemeine Polynomfunktion) in $(-\infty, \infty)$ stetig ist.

Die Funktionen $y = f(x) = P_n(x)$, sogenannte Polynome, werden oft zur Annäherung forstlich relevanter Abhängigkeiten herangezogen.

Unstetigkeiten

Die Funktion $f(x)$ kann aus folgenden Gründen in x_0 unstetig sein:

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht.

(b) Die Funktion f ist in x_0 nicht definiert.

(c) Es gilt nicht $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, auch wenn beide Seiten definiert sind.

Stückweise Stetigkeit

Eine besondere Rolle spielen in der Anwendung die sog. *stückweise stetigen Funktionen*. Dies sind Funktionen, die in einem Intervall $[a, b]$ *nur endlich viele Unstetigkeitsstellen* besitzen. Die bei statistischen Methoden der forstlichen Praxis wichtigen Verteilungsfunktionen sind stückweise stetige Funktionen (Treppenfunktionen).

Differentiation einer Funktion

Forstliche Motivation zur Ableitung

In der Dendrometrie (Waldmesslehre) werden Größen wie Baumhöhe, Baumdicke in einer bestimmten Höhe, sowie Maße des Baumes etc. als *Taxationsgrößen* bezeichnet. Jede Taxationsgröße y, die sich mit dem Alter (der Zeit) verändert (d.h., der Baum wächst), können wir als eine ***Funktion des Alters*** auffassen, d.h. $y = f(t)$.

Für die Funktion wird vorausgesetzt, dass sie nicht nur stetig über ein Zeitintervall $(0,\infty)$ ist, sondern dass sie auch *Ableitungen* höherer Ordnung besitzt, deren Bedeutung wir hier im Folgenden andeuten wollen. Der Graph von $y = f(t)$ ist die sogenannte Wachstumskurve, die bestimmte charakteristische Eigenschaften besitzt:

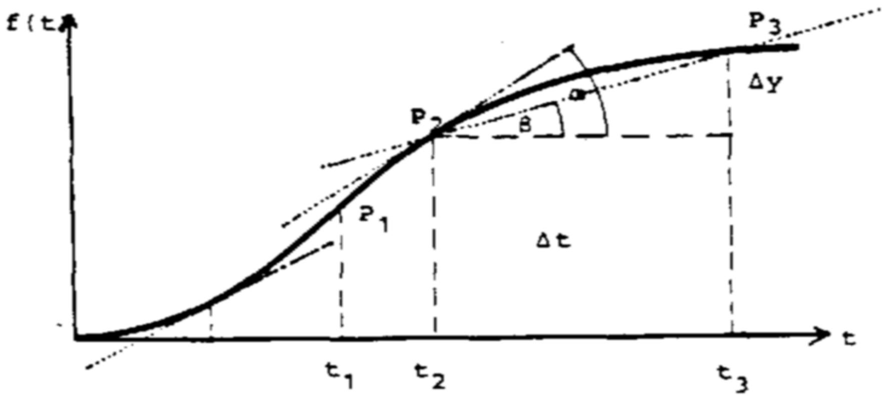
(a) Im Anfangsstadium ist sie konvex (sie liegt über den Tangenten; *vgl. Abb. 67*).

(b) In einem bestimmten Alter geht sie in die konkave Form über (der Anstieg lässt nach).

(c) Mit dem wachsenden Alter nähert sie sich „asymptotisch“ einer Geraden an, die parallel zur x-Achse verläuft.

(d) Oft wird die äußere Form mit einem angedeuteten „S“ identifiziert, darum wird die Wachstumskurve auch kurz S-Kurve oder „Sigmoid“ (Sigma-ähnlich, nach dem griech. Buchstaben Sigma = S) genannt.

Abbildung 67



Der *durchschnittliche periodische Zuwachs* p_2 für die Zeitspanne $t_3 - t_2$ ist Quotient des Zuwachses der Taxationsgröße im Intervall $[t_2, t_3]$, $\Delta y = f(t_3) - f(t_2)$, und des Zeitzuwachses $\Delta t = t_3 - t_2$, d.h.

$$p_2 = \frac{f(t_3) - f(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{f(t_2 + \Delta t) - f(t_2)}{\Delta t} = tg\beta \quad .$$

Geometrisch ist p_2 der Richtungskoeffizient der Strecke (Sehne) $\overline{P_2 P_3}$;
$P_2 = (t_2;\ f(t_2))$; $P_3 = (t_3;\ f(t_3))$.

Der Grenzwert von p_2, dessen Existenz wir hier voraussetzen und den wir mit p_3 bezeichnen wollen, ist die Ableitung der Funktion $y = f(t)$ an der Stelle t_2, d.h.

$$p_3 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_2 + \Delta t) - f(t_2)}{\Delta t} = f'(t_2)$$

Er gibt uns den ***momentanen Zuwachs*** p_3 der Taxationsgröße y im Augenblick t_2 an. Die forstliche Praxis benutzt für p_3 die Bezeichnung „laufender Zuwachs". Unkorrekterweise wird oft für p_2 bei $\Delta t \leq 10$ Jahre der Name „laufender Zuwachs" verwendet, da die Zeitspanne bereits als „genügend kurz" angenommen wird.

Beispiel 3.12: Ist $f(t) = 10^{(2.93555 - \frac{1020,98388}{t^2})}$ eine Wachstumsfunktion, so ist

$$f'(t_0) = 10^{(2.93555 - \frac{1020,98388}{t_0^2})} \cdot \frac{2 \cdot 1020,98388}{t_0^3} \cdot \ln 10$$ der laufende Zuwachs im Alter t_0.

Die Wachstumsfunktionen sind darüber hinaus Lösungen gewisser Differentialgleichungen $y' = \Phi(t, y)$, d.h. es gilt $f'(t) = \Phi(t, f(t))$, so dass die Differenzierbarkeit von Funktionen, die eine Verschärfung der Stetigkeit darstellt, behandelt werden muss.

Definition 3.14:

(a) $f(x)$ sei in einer Umgebung U von x_0 definiert. Den endlichen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

nennen wir die <u>Ableitung</u> der Funktion f an der Stelle x_0.

Bezeichnung: $f'(x_0)$.

(b) $f(x)$ sei in rechter (linker) Umgebung von x_0 $U^+(x_0)$ ($U^-(x_0)$) definiert.

Den endlichen Grenzwert $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\left(\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ nennen wir die Ableitung in x_0 von rechts (von links).

Bezeichnung: $f_+'(x_0)$; $f_-'(x_0)$

(c) Sind die Grenzwerte unendlich, so sprechen wir von unendlichen Ableitungen.

Der Ausdruck $\Delta x = x - x_0$ heißt Zuwachs des Arguments.

Der Ausdruck $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ heißt Zuwachs der Funktion.

Die Ableitung wird auch wie folgt geschrieben:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x = x_0}$$

(sprich: dy nach dx an der Stelle x_0)

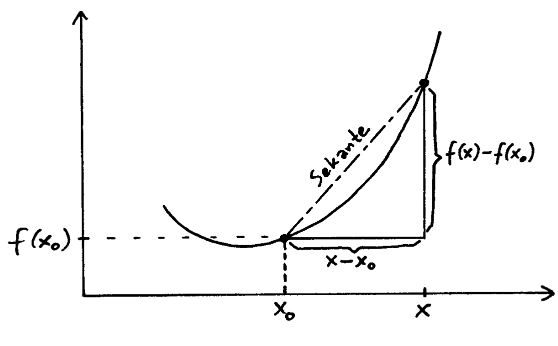
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x_0) = y'(x_0) \;;$$

Bezeichnung: *dx*, *dy* nennen wir *Differentiale* der Variablen *x* bzw. *y*.

Geometrische Bedeutung der Ableitung

Die geometrische Bedeutung der Ableitung ist der Richtungskoeffizient der Tangente zur Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$, der ihre *Steigung* angibt.

Abbildung 68



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{für } x \to x_0 \quad \to \quad \text{Steigung der Tangente im Punkt } (x_0, f(x_0)) = f'(x_0)$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad \text{für } x \to x_0 \quad \to \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

Abbildung 69

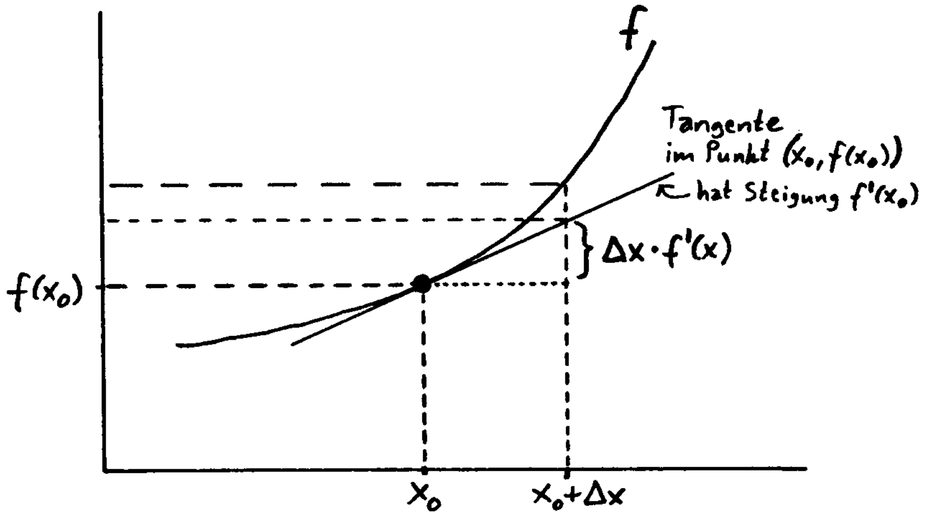
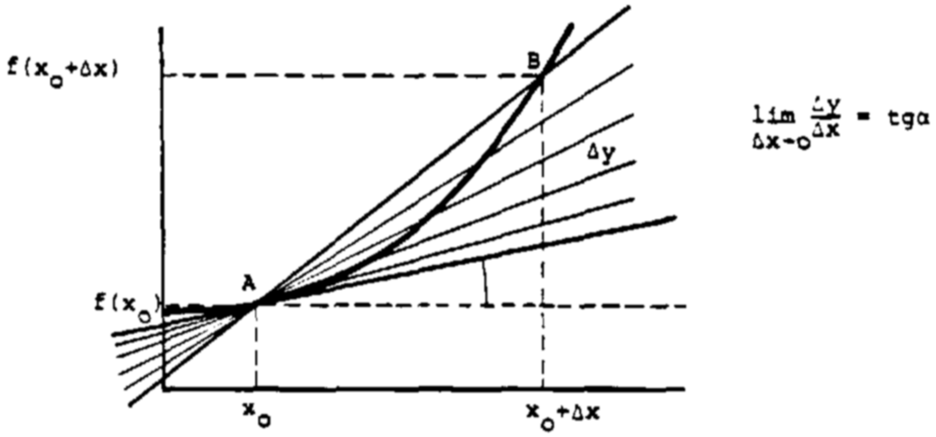


Abbildung 70



__**Definition 3.15:**__ Ist f in jedem Punkt $x \in (a, b)$ differenzierbar, so sagen wir, dass f in (a, b) differenzierbar ist.

Bezeichnungen für die Ableitung: $f'(x)$, $y'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Ist f in (a, b) differenzierbar und besitzt f in a die Ableitung von rechts und in b von links, so sagen wir, f ist in $[a, b]$ differenzierbar.

Existenz der Ableitung

Die Funktion $f(x)$ hat in x_0 eine Ableitung, wenn die Ableitungen von rechts und von links existieren und übereinstimmen, d.h. wenn gilt: $f_+'(x_0) = f_-'(x_0)$.

1. Existiert $f_+'(x_0) \neq f_-'(x_0)$, so sind die „Halbtangenten" von links und rechts im Punkt $(x_0,\ f(x_0))$ unterschiedlich (*Abb.71*).
2. Gilt für die stetige Funktion f in x_0: ($f_-'(x_0) = +\infty$ und $f_+'(x_0) = -\infty$) oder ($f_-'(x_0) = -\infty$ und $f_+'(x_0) = +\infty$), so ist x_0 sogenannter Umkehrpunkt, und die „Halbtangente" in x_0 ist parallel zur y-Achse (*Abb.72*).

Abbildung 71

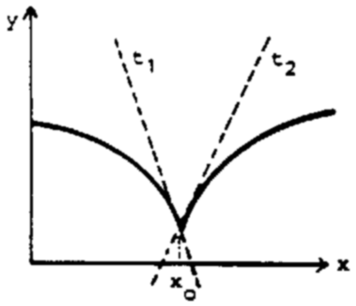


Abbildung 72

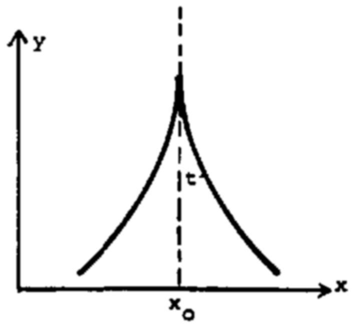
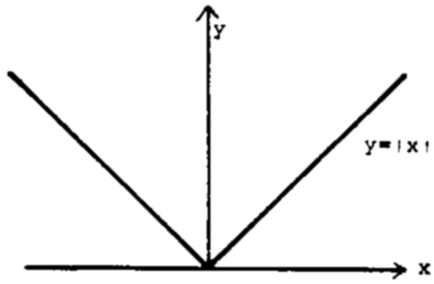


Abbildung 73



Ist die Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie auch in x_0 stetig.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch nicht, z.B. ist $y = f(x) = |x|$ in $x = 0$ stetig, aber $f_+'(0) = 1;\ f_-'(0) = -1$. Nach dem obigen Satz über die Existenz einer Ableitung folgt damit, dass $f'(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht existiert (*Abb. 73*).

Die Berechnung der Ableitung einer Funktion geschieht im allgemeinen Fall durch die Berechnung des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; in den meisten praktischen Fällen wendet man Differentiationsregeln an, um die Ableitung einer Funktion auf die bekannten Ableitungen von Elementarfunktionen zurückzuführen.

Beispiel 3.13:

(1) Gegeben: (a) $y = x^3 = f(x)$

(b) $y = f(x) = e^x$

Gesucht: Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$.

Lösung zu (a):

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3$$

$$= 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \ .$$

Mit $\Delta x = x - x_0$ folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 \quad ; \quad \text{wenn} \quad x \to x_0 \quad , \quad \text{dann} \quad \Delta x \to 0 \quad :$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2 \quad ,$$

für $x_0 = 0$ ist $y'(0) = 0$.

Lösung zu (b): $\Delta y = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$$

d. h. für $x_0 = 0$ ist $y'(0) = 1$.

(2) Gegeben: $f(x)$, $g(x)$; beide Funktionen seien in (a, b) differenzierbar.

Gesucht: $(f(x) \cdot g(x))'$; $\Delta x = h = x - x_0$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) g(x+h) + f(x) g(x+h) - f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

(Hier wurde der Term f(x) g(x + h) addiert und gleichzeitig subtrahiert, d.h. die Gleichung wurde dadurch nicht verändert.)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$\Rightarrow (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Andere Schreibweise: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ (Produktregel).

Analog zu diesen Beispielen werden die Ableitungen sämtlicher Elementarfunktionen berechnet.

Rechenregeln für Ableitungen

Gegeben seien $f(x)$, $g(x)$, $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$; alle diese Funktionen seien in $[a, b]$ differenzierbar, und k, $k_i \in \mathbb{R}$.

Dann gilt in $[a, b]$:

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ (Summenregel)

(2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x)$ (Produktregel)

(3) $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ („Konstante vorziehen“)

(4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ falls $g(x) \neq 0$ (Quotientenregel)

Merkregel zum Zähler in der Quotientenregel:
„NAZ − ZAN“ = Nenner · Ableitung des Zählers − Zähler · Ableitung des Nenners.

(5) $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x) \right)' = k_i \sum_{i=1}^{n} f'_i(x) = k_1 f'_1(x) + k_2 f'_2(x) + \ldots + k_n f'_n(x)$.

(6) $\left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)' = \left(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n \right)'$

$$= f'_1 \cdot f_2 \cdots f_n + f_1 \cdot f'_2 \cdots f_n + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdots f'_{(n-1)} \cdot f_n + f_1 \cdot f_2 \cdots f_{(n-1)} \cdot f'_n$$

(verallgemeinerte Produktregel)

(7) Kettenregel: Unter der Voraussetzung, dass f', g', h' „entsprechend“ existieren, gilt für die Ableitung der geschachtelten Funktion

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{und}$$

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'_g \{g[h(x)]\} \cdot g'_h(h(x)) \cdot h'_x(x) \quad ,$$

wobei f_g' die Ableitung der „Komponente“ f nach der „Komponente“ g als unabhängige Variable ist, etc. *(Beim Ableiten einer geschachtelten Funktion bildet man also zunächst die Ableitung der äußeren, dann die der inneren Funktion und multipliziert sie miteinander. Ist die innere Funktion wieder geschachtelt, wie im zweiten Fall, so wiederholt sich die Prozedur. Beim Ableiten der äußeren Funktion betrachtet man das gesamte Innere als abzuleitende Variable.)*

(8) Sind $y = f(x)$ und $x = g(y)$ gegenseitig invers, so gilt $f'(x) \cdot g'(y) = 1$.

Somit: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Beispiel 3.14: Vorüberlegung: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; wegen Monotonie und Stetigkeit

$\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0$; $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$; $\frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{g'(f(x))}$.

(a) $f(x) = y = e^x$; $x = \ln y = g(y)$ (allgemein: $y = \ln x \to y' = \frac{1}{x}$)

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = y = e^x$$

(b) Gegeben: $y = \arccos x = f(x)$, $x = \cos y = g(y)$ (bekannt ist: $(\cos x)' = -\sin x$):

$$y' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(9) Ausdrücke vom Typ $y=(f(x))^{g(x)}$ werden wie folgt differenziert:

$$\ln y = g(x)\cdot \ln f(x) \quad \rightarrow \quad y = e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = (f(x))^{g(x)}$$

$$y' = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$= (f(x))^{g(x)}\left[g'(x)\cdot \ln f(x) + f'(x)\cdot\frac{g(x)}{f(x)}\right] \quad ; \quad f(x)>0$$

Zusammenfassung der wichtigsten Regeln:

Differentiationsregeln

Summenregel: $(f+g)' = f' + g'$

Produktregel: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

Kettenregel: $(f\circ g)'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$

Beisp.:

$h(x) = \ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}})$

$h'(x) = (\underset{\ln}{f}\circ \underset{\sqrt{\ }}{g})'(x)$

$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$

schneller (ohne Kettenregel):

$h(x) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\cdot \ln x$ nach Logarithmenregeln

$\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$

Übersichtstabelle zur Ableitung elementarer Funktionen

	Einfache Form	Geschachtelte Form
1)	$c' = 0$	
2)	$[x^n]' = n\, x^{n-1}$	$[f(x)^n]' = n\,[f(x)]^{n-1} f'(x)$
3)	$[e^x]' = e^x$	$[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} f'(x)$
	$[a^x]' = a^x \ln a$	$[a^{f(x)}]' = a^{f(x)} \ln a\; f'(x)$; $a > 0$
4)	$[\ln x]' = \frac{1}{x}$; $x > 0$	$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$; $f(x) > 0$
	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$; $x > 0$	$[\log_a f(x)]' = \frac{1}{f(x)\ln a} \cdot f'(x)$; $f(x) > 0$

	Einfache Form	Geschachtelte Form
5)	$[\sin x]' = \cos x$	$[\sin f(x)]' = \cos f(x)\, f'(x)$
	$[\cos x]' = -\sin x$	$[\cos f(x)]' = -\sin f(x)\, f'(x)$
	$[\mathrm{tg}\, x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$[\mathrm{tg}\, f(x)]' = \dfrac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$
	$[\mathrm{cotg}\, x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$[\mathrm{cotg}\, f(x)]' = -\dfrac{1}{\sin^2 f(x)} \cdot f'(x)$
6)	$[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arcsin f(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
	$[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arccos f(x)]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
	$[\mathrm{arctg}\, x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$[\mathrm{arctg}\, f(x)]' = \dfrac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$
	$[\mathrm{arccotg}\, x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$[\mathrm{arccotg}\, f(x)]' = -\dfrac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$
7)	$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$	
	$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$	Spezialfall: $[c\, u(x)]' = c\, u'(x)$
	$(u_1\ u_2\ \ldots u_n)' = u_1'\, u_2 \ldots u_n + \ldots + u_1\, u_2 \ldots u_n'$	
8)	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	Spezialfall: $\left(\dfrac{u(x)}{c}\right)' = \dfrac{u'(x)}{c}$
9)	$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)}[g'(x) \ln f(x) + g(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)}]$	

Beispiel 3.15:

(a) $y = a \cdot e^{\frac{k}{(1-n)x^{n-1}}} \quad \rightarrow \quad$ Typ: $[e^{f(x)}]$

$$y' = \frac{a \cdot e^{\frac{k}{(1-n)x^{n-1}}} \cdot k}{(1-n)} \cdot (-(n-1)\, x^{-n+1-1}) = a \cdot e^{\frac{k}{(1-n)x^{n-1}}} \cdot \frac{k}{x^n}$$

(b) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1} \quad \rightarrow$ Typ: $\left[\dfrac{u}{v}\right]$

$$y' = \frac{\cos x(\cos x + 1) - \sin x(-\sin x)}{(\cos x + 1)^2} = \frac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x}{(\cos x + 1)^2} = \frac{\cos x + 1}{(\cos x + 1)^2} = \frac{1}{\cos x + 1}$$

(c) $y = a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

$$y' = \frac{a^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} + 1 \cdot \sqrt{a^2-x^2} + \frac{x \cdot 1}{2} \cdot (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{a^2+a^2-x^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{2(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2 \cdot \sqrt{a^2-x^2}$$

(d) $y = \frac{x^2}{a+bx+cx^2} + 1{,}3$

$$y' = \frac{2x(a+bx+cx^2) - x^2(b+2cx)}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{2ax+2bx^2+2cx^3-bx^2-2cx^3}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{bx^2+2ax}{(a+bx+cx^2)^2}$$

(e) $y = 2\sin^3 4x^5 = 2(\sin 4x^5)^3$

$$y' = 2 \cdot 3(\sin 4x^5)^2 \cdot (\cos 4x^5) \cdot 20x^4 = 120x^4 \sin^2 4x^5 \cos 4x^5$$

Ableitungen höherer Ordnung

Definition 3.16: Existiert der endliche Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0)$,

so hat die Funktion f in x_0 eine *zweite Ableitung*.

Bezeichnung: $f''(x_0) = (f'(x_0))'$.

Ähnlich werden die Ableitungen von höherer Ordnung $f'''(x_0)$, $f''''(x_0)$ definiert.
Schreibweise anstelle der Striche: $f^{(n)}(x)$.

Es gilt die Rekursionsformel

$$f^{(n)}(x) = [\ f^{(n-1)}(x)\ ]'$$

Beispiel 3.16: Berechnen Sie y' und y'' der Funktion.

$$y = 5x^4 - 2\sin x - xe^{-x} .$$

Lösung:

$$y' = 4 \cdot 5x^3 - 2\cos x - (e^{-x} + xe^{-x}(-1)) = 20x^3 - 2\cos x + xe^{-x} - e^{-x}$$

$$y'' = 60x^2 + 2\sin x + e^{-x} + xe^{-x}(-1) + e^{-x} = 60x^2 + 2\sin x + 2e^{-x} - xe^{-x} .$$

Leibnizsche Formel

Existieren für $u(x)$, $v(x)$ die Ableitungen n-ter Ordnung, so gilt für die n-te Ableitung ihres Produktes: $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \binom{n}{n}u\,v^{(n)}$.

Das Differential und seine Anwendung bei der Fehlerrechnung

Es taucht häufig die Situation auf, dass der Funktionszuwachs $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ durch eine lineare Funktion der unabhängigen Variablen Δx , $A \cdot \Delta x$ derart ersetzt werden könnte, dass der Annäherungsfehler für „kleine“ Δx im Vergleich mit Δx zu vernachlässigen wäre. Diese Möglichkeit der näherungsweisen Berechnung führt zum Begriff „Differential“.

Approximation einer Funktion in der Umgebung eines Punktes x_0

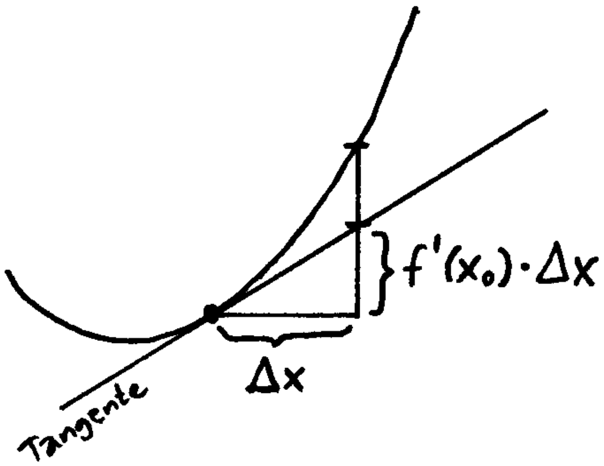
Approximation = näherungsweise Berechnung

Erste Näherung:
mit Hilfe der ersten Ableitung

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + \text{Tangentensteigung} \cdot \Delta x = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \ .$$

Geometrisch bedeutet dies: Annäherung durch eine Gerade (vgl. Abb. 74).

Abbildung 74

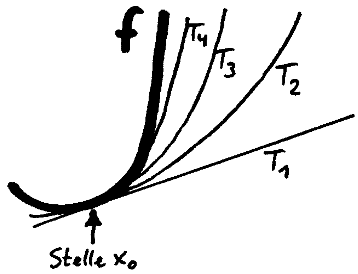


Bessere Näherungen:
mit Hilfe der 2., 3., ... Ableitung (zusätzlich) und mit höheren Potenzen von Δx
→ Taylorscher Satz

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (\Delta x)^3 + \ldots + \text{Restglied}$$

Geometrisch: Annäherung durch Gerade, Parabel, kubische Parabel, … (vgl. Abb. 75).

Abbildung 75



Das Restglied der Taylorschen Näherungsformel kann nicht exakt angegeben werden. Oft kann man es aber von der Größe her einschränken mit Hilfe folgender Formel (nach Lagrange):

Restglied = $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+t\cdot(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$, darin ist t eine Zahl, von der man nur (aber immerhin!) weiß, dass sie zwischen 0 und 1 liegt: $t\in(0;1)$.

Wir kommen später auf den Taylorschen Satz zurück. Hier beschränken wir uns zunächst auf die Näherung der Funktion mittels der ersten Ableitung.

Approximation mittels erster Ableitung (Zusammenfassung):

Approximation
(näherungsweise Berechnung)
einer Funktion in der Umgebung
eines Punktes x_0

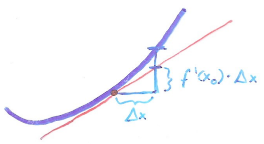
Erste Näherung:
mit Hilfe der 1. Ableitung

$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + \text{Tangentensteigung} \cdot \Delta x$

$= \qquad\qquad \cdot \Delta x$

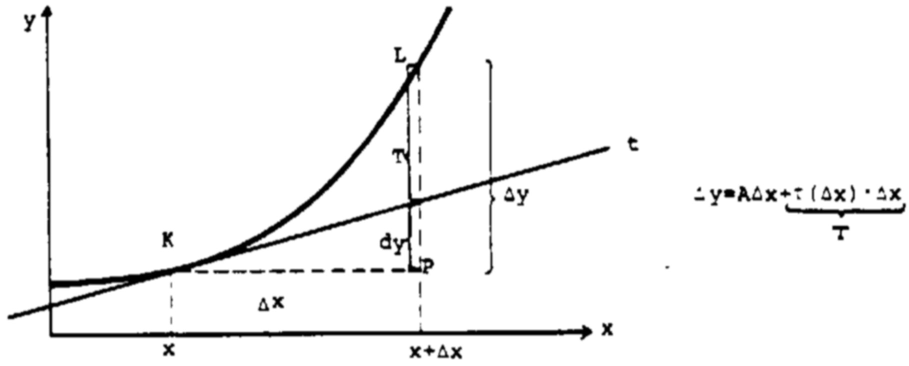
(vgl. S. 121)

geometrisch bedeutet dies:
Annäherung durch eine Gerade



Definition 3.17: $f(x)$ sei in der Umgebung von x_0, $U(x_0)$, definiert. Existiert zu $f(x)$ in x_0 die Funktion $A\cdot\Delta x$, die die Bedingung $\Delta y = A\cdot\Delta x+\tau(\Delta x)\cdot\Delta x$ mit $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \tau(\Delta x) = 0$ erfüllt, so sagt man, die Funktion f hat in x_0 das Differential $A\cdot\Delta x$ und schreibt $dy = A\cdot\Delta x$ oder $df(x) = A\cdot\Delta x$.

Abbildung 76



Beziehung Differential – Ableitung

Die Funktion f hat in x_0 ein Differential $\Leftrightarrow$ f hat in x_0 eine Ableitung. Dann gilt $A = f'(x_0)$.

Für die Funktion $y = f(x) = x$ ist $A = f'(x) = 1$, d.h. $dy = f(x)' \cdot \Delta x = \Delta x = dx$. Das Symbol dx nennen wir Differential der unabhängigen Variablen. Das Differential dy der Funktion $y = f(x)$ im Punkt x_0 schreiben wir in der Form $dy = f'(x_0)\,dx$.

Geometrische Bedeutung:

$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ und $dy \equiv df(x) = f'(x)\,dx$ sind im gleichen Punkt unterschiedlich. Der Ausdruck Δy drückt den Zuwachs der Funktion aus, während dy den Zuwachs der Tangente im Punkt A für den Zuwachs des Argumentes Δx angibt. Für genügend kleine dx ist dy die Approximation des Zuwachses Δy , d.h. $\Delta y \approx dy$.

Wird in x_0 der Funktionszuwachs durch das Differential ersetzt, so wird in der „kleinen Umgebung" $U(x_0)$ der Graph der Funktion durch seine Tangente im Punkt A ersetzt. Eine genauere Annäherung liefert die Taylorsche Formel.

Beispiel 3.17: Berechnen Sie näherungsweise $\sqrt{16{,}06}$.

Lösung: Betrachtet wird die Funktion $y=\sqrt{x}$; $x_0=16$; $\Delta x=0{,}06$

Es ist $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$; $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(16) = \dfrac{1}{8}$

$$f(16+0{,}06) \approx f(16) + f'(16)\cdot 0{,}06 = 4 + 0{,}0075 = 4{,}0075$$

Beispiel 3.18: Berechnen Sie näherungsweise sin 46°.

Man betrachte die Funktion $y = \sin x$:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad x_0 = \frac{\pi}{4} \;;\; \Delta x = \frac{\pi}{180}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$= 0{,}7071(1+0{,}017) = 0{,}7194 \qquad \sin 46° \approx 0{,}7194$$

Wichtig:

Eine wichtige Anwendung des Differentials ist in der Praxis die Abschätzung des Fehlers bei der Berechnung des Funktionswertes, wenn der Argumentwert *x* mit dem Fehler Δx behaftet ist. Der Fehler ist durch $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ gegeben.

Der Ausdruck $|\Delta y| = |dy|$ heißt absoluter Fehler der Berechnung.

Der Ausdruck $\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \left|\frac{dy}{y}\right|$ für $y \neq 0$ heißt relativer Fehler.

Beispiel 3.19: Bestimmung der Relativfehler bei der Kreisflächenbestimmung (Dendrometrie), wenn der Durchmesserfehler Δx bekannt ist.

Bezeichnung: $y(x)=\pi\frac{x^2}{4}$. Diese Funktion gibt die Kreisfläche in Abhängigkeit von *x* an.

Es ist $$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{f'(x)\cdot\Delta x}{f(x)}\right| = \left|\frac{\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\Delta x}{\frac{\pi\cdot x^2}{4}}\right| = 2\left|\frac{\Delta x}{x}\right| .$$

Der relative Fehler bei der Kreisflächenbestimmung ist somit zweimal größer als der relative Fehler der Durchmesserbestimmung.

Wichtige Anwendungen des Differentials: Messung des Baumdurchmessers mit der Kluppe; geodätische Messungen, Waldwegebau und überall dort, wo eine mittelbare Messung durch eine Funktion stattfindet.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Obwohl hier einige Aussagen intuitiv klar sind, werden wichtige Sätze über die stetigen Funktionen formuliert und grafisch verdeutlicht.

Beschränktheit

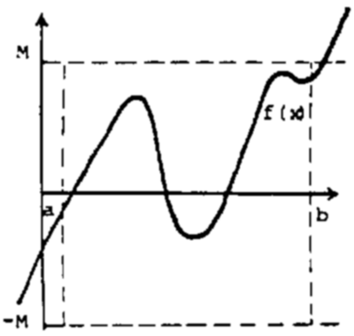
$f(x)$ sei im abgeschlossenen Intervall stetig. Dann ist $f(x)$ in $[a, b]$ beschränkt. D.h. $\exists M>0$, so dass gilt $|f(x)|\leq M \quad \forall x\in[a,b]$ *(siehe Abb. 77a).*

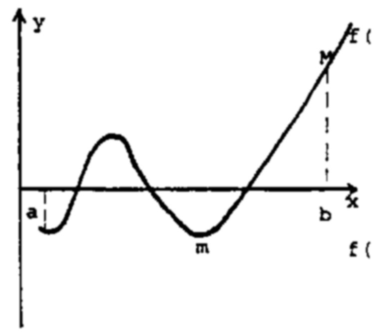
Satz von Weierstrass

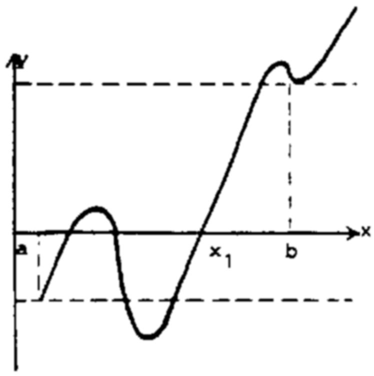
Jede stetige Funktion in $[a, b]$ nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = M; \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x) = m$$ *(siehe Abb. 77b).*

Abbildung 77a **Abbildung 77b** **Abbildung 77c**







Zwischenwertsatz

Die Funktion $f(x)$ sei in $[a, b]$ stetig. Dann erreicht sie in $[a, b]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ *(siehe Abb. 77c).*

Folgerung:

Gilt zusätzlich $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ es existiert mindestens ein $x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = 0$.

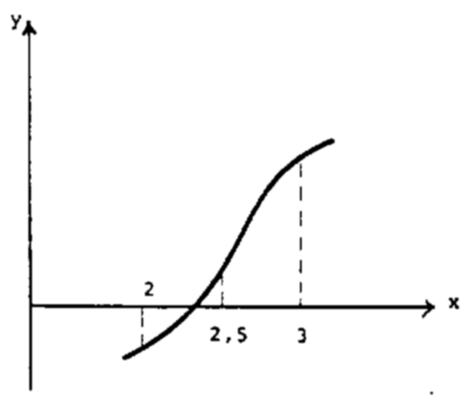
Geometrische Deutung: Haben die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen, so wird der Graph von $f(x)$ in $[a, b]$die x-Achse mindestens einmal schneiden.

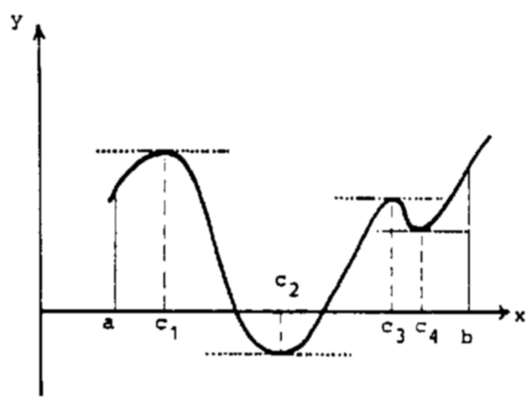
Beispiel 3.20:

Die Folgerung wird zur Lösung von algebraischen Gleichungen herangezogen. Gegeben sei die Gleichung $x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 2 = 0$. Wir bezeichnen: $f(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 2 = 0$.

$f(x)$ ist in $(-\infty, \infty)$ stetig. Es ist $f(2) = -8 < 0$ und $f(3) = 32 > 0 \Rightarrow$ die Gleichung $f(x) = 0$ hat in $[2, 3]$ mindestens eine Nullstelle. Nehmen wir an, dass in diesem Intervall genau eine Nullstelle liegt. Wählen wir z.B. $x = 2{,}5$, und es ist $f(2{,}5) > 0 \Rightarrow$ die Nullstelle liegt im Intervall $[2; 2{,}5]$, usw.
Mit der weiteren Teilung des Intervalls erhalten wir den genauen Wert für die Nullstelle *(siehe Abb.78).*

Abbildung 78 **Abbildung 79**





Satz von Rolle

Gegeben sei die in $[a, b]$ stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion f.
Es gilt für $f(x)$: $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$. *(Geometrische Deutung siehe Abb. 79.)*

Folgerung:
Aus dem Satz von Rolle folgt, dass zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion mindestens eine Nullstelle ihrer Ableitung $f'(x)$ liegt. Diese wird bei der Feststellung der Anzahl der reellen Nullstellen vorteilhaft herangezogen.

Beispiel 3.21: Zeigen Sie, dass $x^3 + 4x - 10 = 0$ genau eine reelle Nullstelle hat. $f(x)$ ist stetig und differenzierbar in $(-\infty, \infty)$. $3x^2 + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \not\exists \; c \in \mathbb{R}$ mit $f'(c) = 0$. Dann hat f höchstens eine Nullstelle. Da $f(x)$ ein Polynom von ungeradem Grad ist $(n = 3) \quad \Rightarrow f(x) = 0$ hat *genau* eine Lösung.

Mittelwertsatz

Gegeben sei eine in $[a, b]$ stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion ($\exists f'(x)$ in (a, b)) .
$\Rightarrow \quad \exists c \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Geometrische Bedeutung: *siehe Abb. 80 a,b.*
Es gibt im Intervall (a, b) mindestens ein c, wo die Tangente an den Funktionsgraphen parallel zur Verbindungslinie der Punkte mit den Abszissen a und b verläuft.

Abbildung 80 a

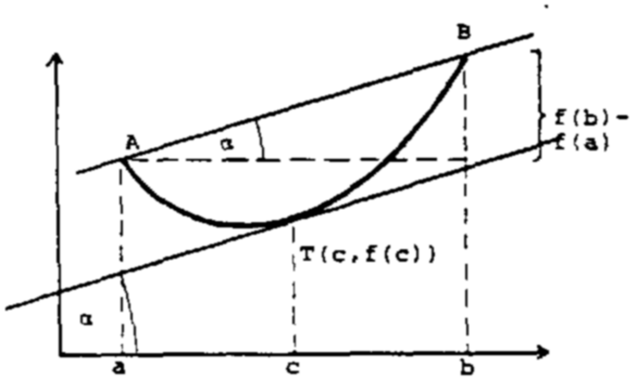
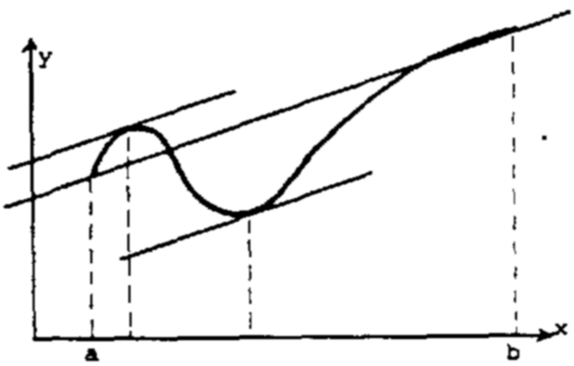


Abbildung 80 b



Der Mittelwertsatz heißt auch Satz über den Zuwachs der Funktion. Der Satz ermöglicht uns, den Zuwachs der Funktion $f(b) - f(a)$ abzuschätzen, wenn es möglich ist, $f'(x)$ in (a, b) zu schätzen.

Beispiel 3.22: Schätzen Sie den Zuwachs der Funktion $f(x) = \text{arctg}\, x$ in $[2, 3]$.

Für $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ in $(2, 3)$ gilt:

$f(3) - f(2) = \dfrac{1}{1+c^2} \cdot 1$. Für $c = 2$ erhält man den größten Wert, den der Zuwachs in [2, 3] annehmen kann.

Es ist also $\frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{5}$ für $c \in (2,3)$.

arctg(3) − arctg(2) $= \frac{1 \cdot 1}{1+c^2} < \frac{1}{5}$.

Taylorsche Entwicklung einer Funktion

Mit Hilfe des Satzes von Taylor wird die Frage behandelt, wie und inwieweit sich eine Funktion in der Umgebung eines Punktes x_o mit der einfachsten Art von Funktionen, den Polynomen, approximieren lässt.

Satz von Taylor

Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_0 mindestens n-mal differenzierbar. Dann bezeichnet man das Polynom

$$T_n(f, x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

als Taylor-Polynom n-ter Ordnung von f an der Stelle x_0 . Ist f beliebig oft differenzierbar, dann wird durch die Folge der Taylor-Polynome die Taylor-Reihe von f an der Stelle x_0 definiert. In der Regel stellt die Taylor-Reihe die Funktion in einer Umgebung von x_0 dar, so dass die Taylor-Polynome zur Approximation der Funktion in dieser Umgebung von x_0 dienen können. Dabei wird die Approximation umso genauer, je höher der Grad des Taylor-Polynoms ist.

Dann setzt man meistens $h := x - x_0$ und schreibt x statt x_0.

Mit $T_n(x, h) := \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} h^i$ gilt also $f(x+h) \approx T_n(x, h)$. An der Stelle $x_0 = 0$ vereinfacht sich die Formel zu $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \ldots + \frac{f^n(0) x^n}{n!}$ + Rest $= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(0)}{i!}$ + Rest.

Beispiel 3.23: (a) lineare Approximation: $\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h$

(b) quadratische Approximation: $\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h - \frac{1}{8x\sqrt{x}} \cdot h^2$

(c) Approximation dritter Ordnung: $\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h - \frac{1}{8x\sqrt{x}} \cdot h^2 + \frac{1}{16x^2\sqrt{x}} h^3$

Zusammenfassung:

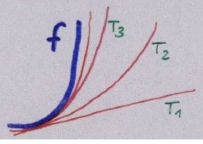
Bessere Näherungen:
mit Hilfe der 2., 3., ... Ableitung
(zusätzlich)
und mit höheren Potenzen von Δx

$\longrightarrow$ Taylorscher Satz (siehe S. 134)

$$f(x_0+\Delta x) = \underbrace{\underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x}_{T_1} + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2}_{T_2} + \frac{f'''(x_0)}{3!}(\Delta x)^3 + \ldots$$

$\vdots$ ... + Restglied

geometrisch:
Annäherung durch Gerade, Parabel, kub. Parabel...



Das Restglied der Taylor'schen Näherungsformel kann nicht exakt angegeben werden.

Oft kann man es aber von der Größe her einschränken mit Hilfe folgender Formel (nach Lagrange):

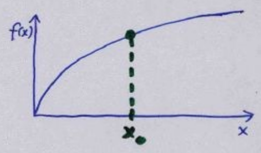
Restglied
$$= R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+t\cdot(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

darin ist t eine Zahl, von der man nur (aber immerhin!) weiß, daß sie zwischen 0 und 1 liegt:

$$t \in (0;1)$$

Beispiel für Approximation mit dem Taylor'schen Satz:

$f(x) = \sqrt{x} \quad (x>0)$



Taylor-Polynom 3. Grades:
$$T_3(f, x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{3/2}} = -\frac{1}{4\cdot\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{4\cdot x\sqrt{x}}$$
$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

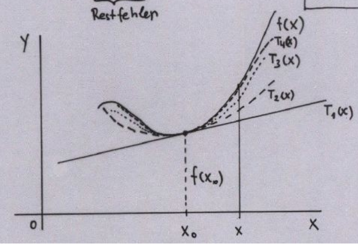
Somit:
$$T_3(f, x_0, x) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot(x-x_0) - \frac{1}{8\cdot x_0\sqrt{x_0}}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{16\, x_0^2\sqrt{x_0}}(x-x_0)^3$$

z.B. für $x_0 = 1$: $\quad 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

Taylor-Polynom: (Entwicklung einer Funktion in ein Polynom im Punkt x_0)

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)}_{} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{R_{n+1}(x)}_{\text{Restfehler}};$$

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{n+1}(x-x_0)^{n+1}, \quad \vartheta \in (0,1)}$$



$$f(x) = \overbrace{\underbrace{\overbrace{\underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)}_{T_1(x)} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}^{T_2(x)} + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3}_{T_3(x)} + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4}^{T_4(x)} + R_5(x)$$

Es gilt: $\boxed{f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)}$

$$T_n(x_0) = f(x_0)$$
$$T_n'(x_0) = f'(x_0)$$
$$\vdots$$
$$T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

De l´Hospitalsche Regeln

Herleitung:

Bei der Formeldarstellung einer Funktion $y = f(x)$ kann der Formelausdruck im Grenzübergang eine der folgenden Formen enthalten: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 0^0 ; ∞^0 ; 1^∞ .

Ist z.B. $f(x_0) = g(x_0) = 0$, so kann $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (wenn der Grenzwert überhaupt existiert) verschieden ausfallen. Es ist zweckmäßig, f und g in x_0 nach Taylor zu entwickeln, um mehr über das Verhalten dieses Ausdrucks in der Umgebung von x_0 zu erfahren.

Es sei $f^{(i)}(x_0) = 0$ für $0 \le i < \mu$,

$g^{(i)}(x_0) = 0$ für $0 \le i < \gamma$ und

$f^{(\mu)}(x_0) \neq 0$, $f^{(\gamma)}(x_0) \neq 0$

d.h. alle Ableitungen von kleinerer Ordnung als μ sind Null und fallen aus dem Taylor-Polynom heraus, und alle Ableitungen von kleinerer Ordnung als γ sind ebenfalls Null und fallen aus dem Taylor-Polynom heraus.

Dann gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}(x-x_0)^\mu + \frac{f^{(\mu+1)}(x_0)}{(\mu+1)!}(x-x_0)^{\mu+1} + \ldots}{\frac{g^{(\gamma)}(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma + \frac{g^{(\gamma+1)}(x_0)}{(\gamma+1)!}(x-x_0)^{\gamma+1} + \ldots}$$

Nach Ausklammern in Zähler und Nenner folgt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}(x-x_0)^\mu (1 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ \ldots)}{\frac{g^{(\gamma)}(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma (1 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \ \ldots)} = \frac{\frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}(x-x_0)^\mu}{\frac{g^{(\gamma)}(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma} \cdot H(x) \ .$$

Es ist $H(x_0) = 1$, da $(x - x_0) = 0$, wenn $x \to x_0$.

Zu unterscheiden sind nun drei Fälle:

(1) $\mu > \gamma \quad \to \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(2) $\mu = \gamma \quad \to \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{g^{(\mu)}(x_0)}$

(3) $\mu < \gamma \quad \to \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

Hieraus folgen die sogenannten ***Regeln von de l´Hospital***:

Es sei $g^{(n)}(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 mit möglichen Ausnahmen $x = x_0$ und

$f^{(\gamma)}(x_0) = g^{(\gamma)}(x_0) = 0 \quad ; \quad \gamma = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Wenn dann $\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ einen endlichen oder unendlichen Grenzwert besitzt, so gilt das gleiche für $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \quad .$$

<u>Einfachster Fall</u>:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad , \text{ wenn } \quad f(x_0) = 0 \text{ und } g(x_0) = 0 \quad .$$

Anwendung findet die Regel von de l´Hospital also bei der Berechnung von Grenzwerten der Form $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ bzw. ∞ . Man hilft sich in diesem Falle, indem man die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ bildet und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ bestimmt. Erhält man immer noch $\dfrac{0}{0}$ oder $\dfrac{\infty}{\infty}$, so leitet man weiter ab, bis man den Grenzwert ausrechnen kann.

<u>Beispiel 3.24:</u> (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{e^x - e} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^x} = \dfrac{1}{e}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{n\, x^{n-1}} = \dots = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{n!} = +\infty$

Hieraus folgt: e^x wächst für $x \to \infty$ schneller als x^n $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(d) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln x = \|0 \cdot (-\infty)\| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\|\dfrac{-\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} x^x = \|0^0\| = \lim\limits_{x \to 0} e^{x \cdot \ln x} = e^L = e^0 = 1$

$L = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln x = 0$ *(siehe d)* .

Dieser Übergang ist im Falle der Exponentialfunktion erlaubt, da $y = e^x$ für alle x stetig ist.

$$\text{(f)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x} = 0\ .$$

Monotonie und Extrema von Funktionen

Definition 3.18: Die Funktion f heißt streng monoton wachsend (fallend) auf der Menge D, wenn gilt: $\forall x_1\in D\ ,\ \forall x_2\in D\ :\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).
(Gilt lediglich $f(x_1) \le f(x_2)$ bzw. ($f(x_1) \ge f(x_2)$) so sagt man, f sei monoton wachsend oder monoton fallend (ohne „streng“)).

Definition 3.19: Die Funktion f heißt monoton wachsend (fallend) im Punkt $x_0 \Leftrightarrow$ $\exists U(x_0)$, so dass in $U(x_0)$ die Funktion $f(x)$ monoton wachsend (fallend) ist.

Monotonie und Ableitung

f sei auf $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gilt

(1) $f(x)$ ist auf $[a, b]$ genau dann konstant, wenn $\forall x\in(a,b)$ gilt: $f'(x) = 0$.
(2) f ist auf $[a, b]$ monoton wachsend (monoton fallend)
$\Leftrightarrow\ \forall x\in(a,b)$: $f'(x)\ge 0\quad (f'(x)\le 0)$.
(3) $f(x)$ ist auf $[a, b]$ streng monoton wachsend (streng monoton fallend)
$\Leftrightarrow\ \forall x\in(a,b)$: $f'(x)>0\quad (f'(x)<0)$.

Abbildung 81 a

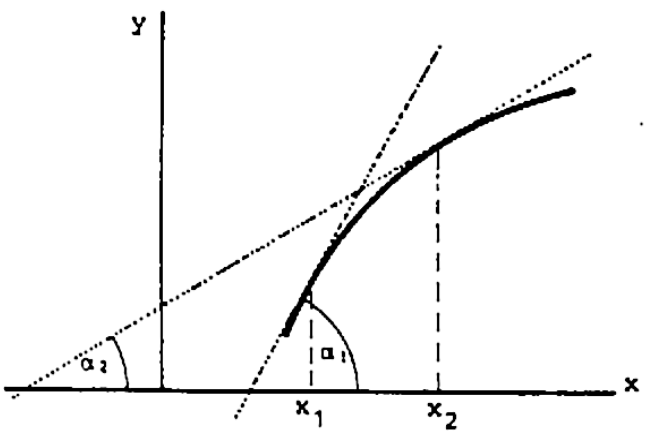


Abbildung 81 b

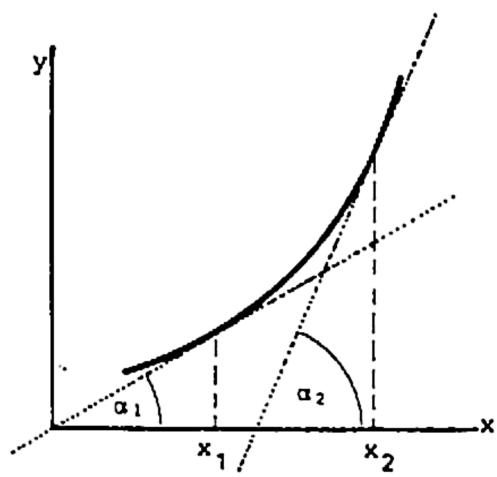


Abbildung 81 c

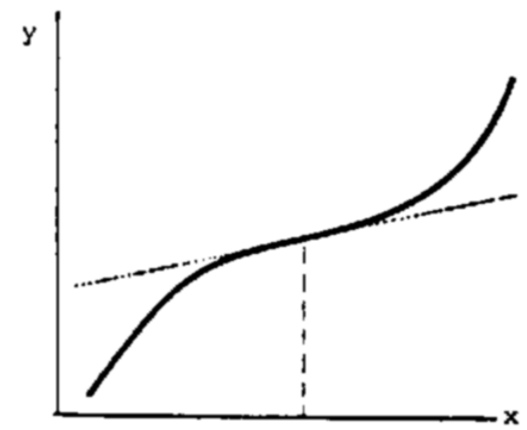


Abbildung 81 d

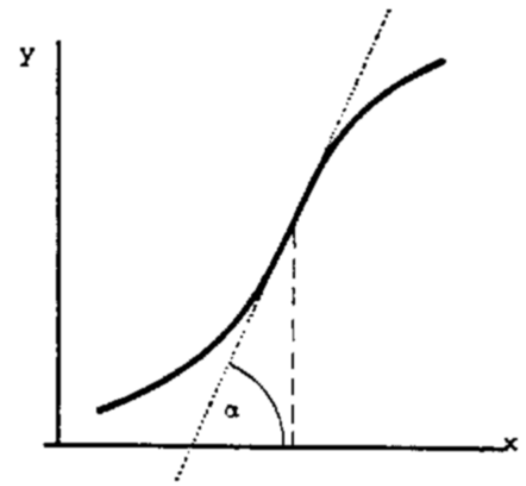


Abbildung 81 ist eine Darstellung der grundlegenden Typen streng monoton wachsender Funktionen. Hier ist $f'(x) > 0$, d.h. die Richtungswinkel der Tangenten sind positiv. Eine analoge Situation entsteht bei monoton fallenden Funktionen.

<u>Beispiel 3.25:</u>

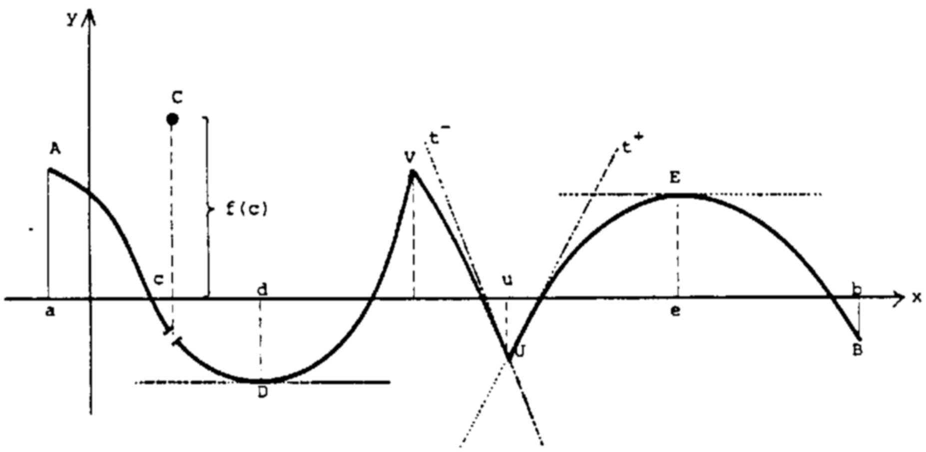
$$f(x) = y = 20e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad y' = 20e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}, \text{ für } x \in (0,k),\ k>0 \text{ ist } f'(x) > 0;$$

die Funktion *f* ist für positive *x* streng monoton wachsend.

Lokale Extrema von Funktionen

<u>Definition 3.20:</u> Die Funktion $y = f(x)$ hat in $x_0 \in D(f)$ ein <u>lokales Minimum</u> (<u>Maximum</u>) mit dem Wert $f(x_0)$ $\Leftrightarrow$ $\exists U(x_0)\ \forall x \in U(x_0):\ f(x) > f(x_0)$; $(f(x) < f(x_0))$. (Die Funktion $y = f(x)$ in der folgenden Abbildung hat in den Punkten *C*, *V*, *E* ein lokales Maximum und in *D*, *U* ein lokales Minimum).

Abbildung 82



Notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums

Hat die Funktion f im Punkt x_0 ein lokales Extremum, dann existiert entweder $f'(x_0)$ nicht, oder, wenn die Ableitung existiert, so ist $f'(x_0) = 0$.
Die Umkehrung dieses Satzes gilt allerdings nicht: Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht zwingend, dass in x_0 ein lokales Extremum vorliegen muss. (Beispiel: $y = x^3$; $f'(0) = 0$, aber in $x_0 = 0$ ist kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt).

Stationärpunkte

Ist f in x_0 differenzierbar, und ist $f'(x_0) = 0$, so heißt $(x_0, f(x_0))$ Stationärpunkt der Funktion f.
(In obiger Abbildung sind D, E Stationärpunkte von f .)

In den Punkten C, U, V in Abbildung 82 existiert die Ableitung von $f(x)$ nicht. Dagegen sind aber, wie bereits erwähnt, die Punkte D, E Stationärpunkte, in denen $f'(d) = f'(e) = 0$.

Beispiel 3.26:

(a) Die Funktion $f(x) = y = x^2 + 2x + 3$ hat ein Extremum im Stationärpunkt $x_0 = -1$, denn $f'(x_0) = 2x_0 + 2 = 0$. In $x_0 = -1$ befindet sich ein lokales Minimum, da $\forall\, x \in \mathbb{R} \wedge x \neq -1$ gilt: $x^2 + 2x + 3 > 2$, d.h. $(x + 1)^2 > 0$. Der Graph von f ist hier die Parabel mit der Gleichung $y - 2 = (x + 1)^2$ mit dem Gipfel in $V = (-1, 2)$.

(b) Die Funktion $y = A\,\dfrac{k}{t^n}\,e^{\frac{k}{(n-1)t^{n-1}}} = A\,\dfrac{k}{t^n}\,\exp\dfrac{k}{(n-1)\,t^{n-1}} = f(t)$, die sog. Korfsche Zuwachsfunktion ($k \neq 0$; $n \geq 1$, $A > 0$) hat in $t_1 = \sqrt[n-1]{\dfrac{k}{n}}$ einen Stationärpunkt.
Später wird gezeigt, dass hier ein Maximum vorliegt.

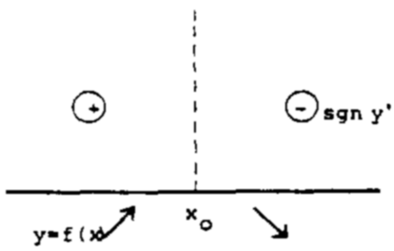
(c) Die Funktion $f(x) = |x|$ ist im Punkt (0, 0) nicht differenzierbar. In einer Umgebung $U(0)$ ist $f(x) > f(0)$ $\forall\, x \neq 0$. D.h. $y = |x|$ hat in $x_0 = 0$ ein Minimum.

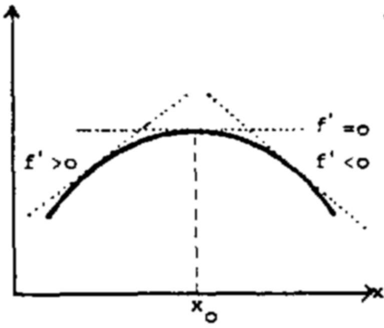
Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Extremums

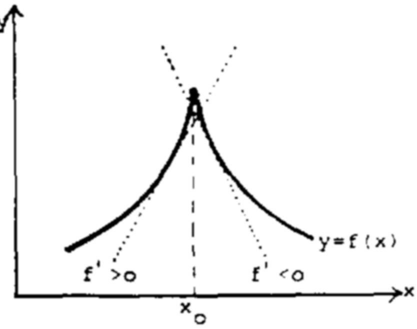
x_0 sei Stationärpunkt der Funktion f oder ein Punkt, in dem die Ableitung nicht existiert. Ist in $U^-(x_0)$ $f'(x) < 0$ $[f'(x) > 0]$ und in $U^+(x_0)$ $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ *(die Funktion f′ ändert in x_0 das Vorzeichen)*, dann hat die Funktion f in x_0 ein lokales Minimum [lokales Maximum].

Geometrische Interpretation in den folgenden Abbildungen:

Abbildung 83 a **Abbildung 83 b** **Abbildung 83 c**







Absolutes Extremum einer Funktion

Definition 3.21: Unter dem absoluten Minimum (Maximum) der Funktion f in der Menge $D \subseteq D(f)$ versteht man den kleinsten (größten) Wert, den die Funktion f auf D annimmt.

Ein absolutes Extremum der Funktion $f(x)$ in $[a, b]$ tritt auf:

(1) in den Randpunkten a, b oder

(2) in denjenigen inneren Punkten des Intervalls $[a, b]$, in denen die Funktion f *lokale* Extrema hat.

Ist die Funktion in x_0 n-mal differenzierbar, wird zur Entscheidung über die Art eines Extremums folgender Satz herangezogen, auch wenn einige Ableitungen gleich Null sind:

Höhere Ableitungen und Extrema

Es sei in x_0: $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$; $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \geq 1$.

Dann gilt:

(1) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

(2) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

(3) Ist n ungerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist f in x_0 monoton wachsend.

(4) Ist n ungerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist f in x_0 monoton fallend.

Beispiel 3.27: Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $y = f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - x^2$.

1. Schritt: Berechnung von $f'(x)$; $f''(x)$

$$y' = 2x^{-\frac{1}{3}} - 2x \quad ; \quad y'' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 2$$

2. Schritt: Bestimmung der Stationärpunkte

$$y' = 0 \quad ; \quad 2(x^{-\frac{1}{3}} - x) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - x^{-\frac{4}{3}} = 0 \;,\quad x_1 = -1 \;,\quad x_2 = 1$$

Es existieren also Stationärpunkte in $S_1 = (-1, 2)$; $S_2 = (1, 2)$.

3. Schritt: In S_1 und S_2 wird das Vorzeichen von $f''(x)$ bestimmt.

$$f''(x_1) = f''(-1) = -\frac{8}{3} < 0 \quad ; \quad f''(x_2) = f''(1) = -\frac{8}{3} < 0$$

$\Rightarrow$ in S_1 und S_2 liegen lokale *Maxima* vor.

4. Schritt: Für $x = 0$ ist y' nicht definiert, aber es existieren die rechtsseitige und die linksseitige Ableitung in 0.

$$\lim_{x \to 0} y' = \lim_{x \to 0} 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} y' = \lim_{x \to 0} 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ f' ändert das Vorzeichen von $-$ nach $+$
$\Rightarrow$ in $S = (0, 0)$ liegt ein lokales *Minimum* vor *(siehe Abb.85)*.

Abbildung 85

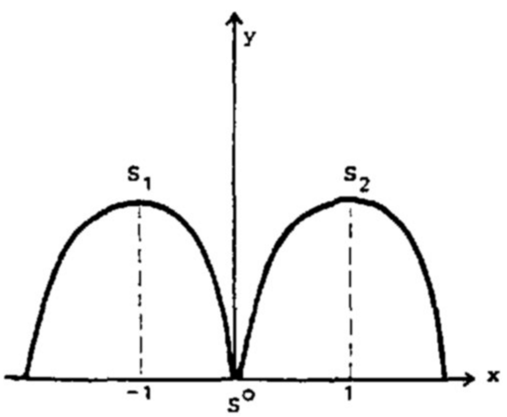
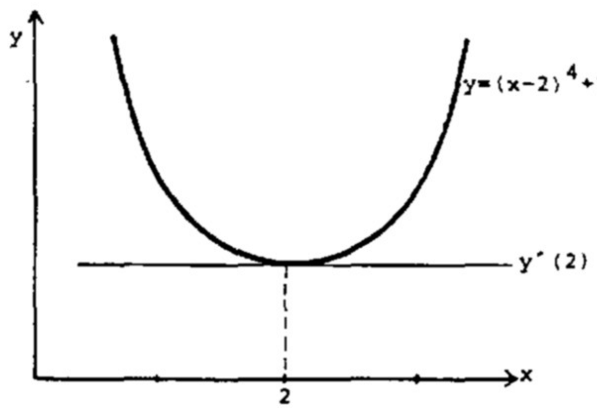


Abbildung 86



Beispiel 3.28: Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $y = f(x) = (x-2)^4 + 1$.

(1) $y' = 0$, d.h. $4(x-2)^3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2,3} = 2$

(2) $y'' = 12(x-2)^2 \;\Rightarrow\; y''(2) = 0$
$y''' = 24(x-2) \;\Rightarrow\; y'''(2) = 0$
$y^{(4)} = 24 \;\Rightarrow\; y^{(4)}(2) = 24 > 0$

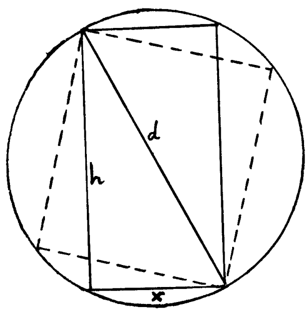
$\Rightarrow$ f hat in $S\,(2; 1)$ ein lokales Minimum *(siehe Abb.86)*.

Beispiel 3.29: (Beispiel einer Optimierungsaufgabe)
Aus einem Stamm mit dem Zopfdurchmesser *d* soll ein Balken herausgeschnitten werden, der die größte Tragfähigkeit hat.

Lösung: Die Tragfähigkeit *N* eines rechteckigen Balkens ist proportional dem Produkt $x \cdot h^2$, wobei *x* die Basis und *h* die Höhe des Balkenquerschnittes ist, d. h.
$N = k \cdot x \cdot h^2$, k = const > 0 (siehe Ingenieurtafel).

Die Aufgabe lautet, anders ausgedrückt: In einen Kreis mit dem Durchmesser *d* soll ein Rechteck hineingelegt werden, so dass $h^2 \cdot x$ maximal wird *(siehe Abb. 87).*

Abbildung 87



Der Satz des Pythagoras liefert $x^2 + h^2 = d^2$, also $h^2 = d^2 - x^2$,
und für die Tragfähigkeit N ergibt sich aus $N = k \cdot x \cdot h^2$ also

$$N(x) = k \cdot x \cdot (d^2 - x^2) = k \cdot (d^2 x - x^3) \quad \text{(als Funktion von } x\text{).}$$

Somit: $N'(x) = k \cdot (d^2 \cdot 1 - 3 \cdot x^2) = k \cdot (d^2 - 3x^2)$.

Wo liegen die Stationärpunkte („Kandidaten“ für Extremstellen)?

$$N'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot (d^2 - 3x^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 = d^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} d^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Längen sind stets nichtnegativ, also kommt nur $x_1 = +\frac{d}{\sqrt{3}}$ in Frage.

Hat $N(x)$ an der Stelle $x = x_1$ ein lokales Minimum oder Maximum?

Aus der Situation folgt bereits, dass ein lokales Maximum vorliegen muss:
$N(x) = 0$ für $x = 0$ und für $x = d$, für alle Werte dazwischen ist $N(x) > 0$, es gibt zwischen 0 und d keine weiteren Stationärpunkte.
(Formales Vorgehen:

$$N''(x) = k \cdot (-6x) = -6k \cdot x \quad , \quad N''\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = -6 \cdot k \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} < 0 \quad \text{, da}$$

$d > 0$ und $k > 0$; also liegt ein Maximum vor.)

Die Lösung ist also $x = x_1 = \frac{d}{\sqrt{3}}$; dann ist $h = \sqrt{d^2 - x_1^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d$.

Wählt man bei gegebenem d die Basis des rechteckigen Balkens mit $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$

und $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, so wird dieser Balken die größte Tragfähigkeit besitzen.

Es gilt: $\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 5 : 7 \approx 7 : 10$.

Konvexität und Konkavität von Funktionen, Wendepunkte

Zur genauen Charakterisierung von Funktionen bzw. ihrer Graphen ist es zweckmäßig, die Begriffe Konvexität, Konkavität und Wendepunkte von Funktionen zu definieren. Diese spielen bei forstlich interessanten Funktionsmodellen wie Wachstumskurven, Baumschaftformen, ökonometrischen Modellen, Modellen in der Waldarbeitslehre, Bodenkunde, Populationsentwicklung etc. oft eine Rolle.

Konvexe und konkave Funktionen

Definition 3.22: Gegeben sei eine in x_0 differenzierbare Funktion f.

(a) Die Funktion f heißt in $U(x_0)$ konvex (konkav), wenn $\forall x \in U(x_0)$ der Wert $f(x)$ über (unter) der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ liegt. D.h. es gilt: $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (bzw. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$).

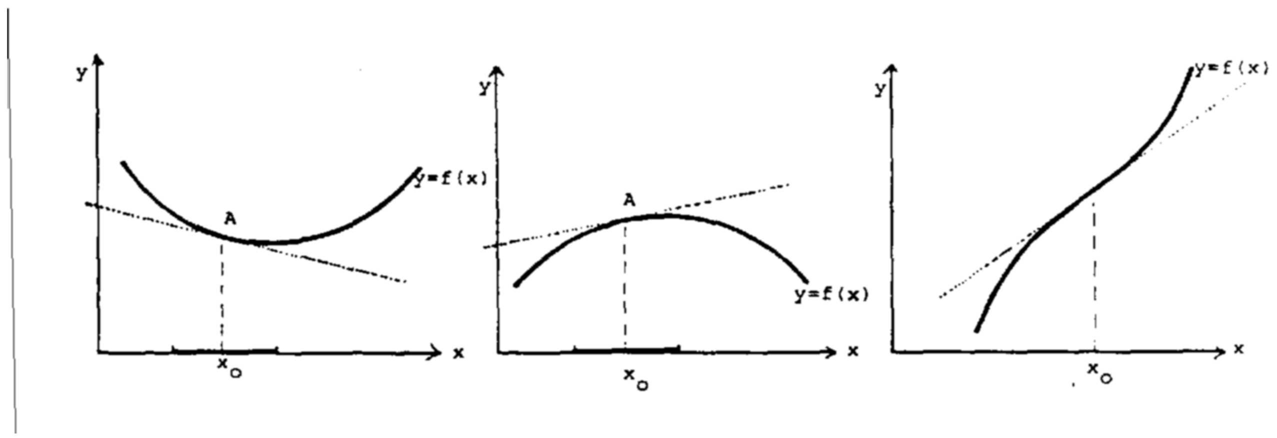
(b) Die Funktion f ist konvex (konkav) im Intervall $I \subseteq D(f)$ genau dann, wenn sie konvex (konkav) in allen Punkten $x \in I$ ist.

In den folgenden Abbildungen sind die Graphen einer konvexen und einer konkaven Funktion dargestellt. Hieraus geht hervor, dass im konkaven Bereich mit wachsendem x die Ableitung $tg\,\phi = f'(x)$ fällt, dagegen im konvexen wächst.

Abbildung 88 a konvexe Funktion

Abbildung 88 b konkave Funktion

Abbildung 88 c Wendepunkt bei x_0



Hinreichende Bedingung für Konvexität (Konkavität)

Besitzt die Funktion f in allen Punkten des Intervalls $[a, b]$ die zweite Ableitung $f''(x)$,
und gilt $f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \quad \forall x \in [a, b]$,
dann ist die Funktion f in allen inneren Punkten von $[a, b]$ konvex (konkav).

Wendepunkte

Definition 3.23: f sei in x_0 differenzierbar. Geht f in x_0 von Konvexität in Konkavität (oder umgekehrt) über, so heißt x_o Wendepunkt von f. *(siehe Abb.87c)*

Notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes

Ist x_0 Wendepunkt von f, und ist f in x_0 zweimal differenzierbar, so ist $f''(x_0) = 0$.

Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes

f sei in x_0 zweimal differenzierbar.
Wenn in einer linken Umgebung von x_0, $U^-(x_0)$, gilt: $f''(x) < 0 \quad (f''(x) > 0)$
und in einer rechten Umgebung $U^+(x_0)$ gilt: $f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0)$
(d.h. $f''(x)$ ändert in x_0 das Vorzeichen),
so hat f in x_0 einen Wendepunkt mit dem Übergang
Konkavität → Konvexität (Konvexität→ Konkavität).

Ist f im Punkt x_0 n mal differenzierbar, $n \geq 2$, so wird man in der Praxis nach folgendem Satz verfahren, auch wenn die ersten $n-1$ Ableitungen in x_0 gleich Null sind:

Es sei $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \geq 2$.
Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Ist n ungerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 einen Wendepunkt mit dem Übergang Konkavität → Konvexität.

(b) Ist n ungerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 einen Wendepunkt mit dem Übergang Konvexität → Konkavität.

(c) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist f in x_0 konvex.

(d) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist f in x_0 konkav.

Beispiel 3.30: Finden Sie die Wendepunkte der Funktionen

(a) $y = f_1(x) = \ln(1+x^2)$

(b) $y = f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (Gaußsche Glockenkurve)

Lösung: (a) $y' = 2\dfrac{x}{1+x^2}$; $y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. f ist in $(0, \infty)$ zweimal differenzierbar.

$$y''' = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$y'=0 \Rightarrow x=0 \quad f''(0) = 2 > 0 \quad \rightarrow$ bei $x_0 = 0$ ist ein Minimum.

$y''=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \; ; \; x_1=1 \; ; \; x_2=-1$

Es gilt $y''(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty,-1) \cup (1;+\infty)$

$y''(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)$

Nach der hinreichenden Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes und wegen $y''(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)$ hat die Funktion in $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ Wendepunkte, da hier y'' das Vorzeichen ändert.

Im Punkt $x_1 = 1$ erfolgt der Übergang

Konvexität → Konkavität

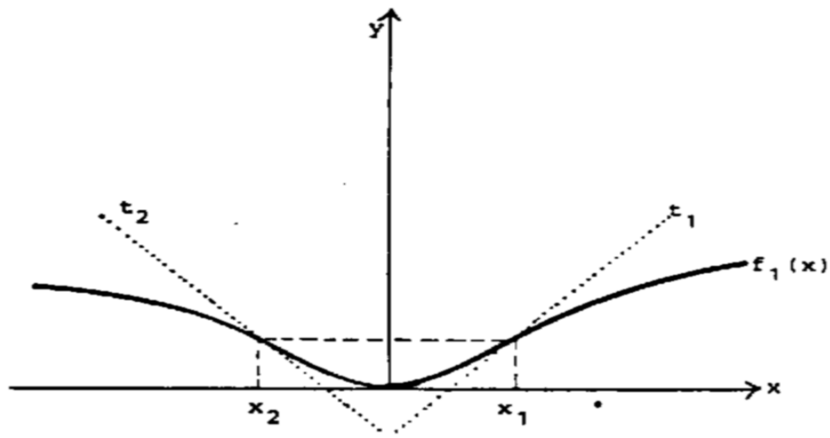
und in $x_2 = -1$ der Übergang

Konkavität → Konvexität.

Die Tangenten in den Wendepunkten lauten:

$t_1: \; y-1 = 1(x-1) \; ; \quad t_2: \; y-1 = -1(x+1)$ (vgl. Abb. 89).

Abbildung 89



Lösung: (b) $y' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot x$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot (x^2-1)$$

$$y''' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot x(x^2-3)$$

(1) $y' = 0 \Rightarrow x = 0; \quad f''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 0 \quad \Rightarrow$ in $x = 0$ liegt ein Maximum vor.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y'(x)=0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\pm\infty} y(x)=0 \quad ; \quad y(x)>0 \quad \forall\, x\in(-\infty,\infty)$$

$\Rightarrow$ in $\pm\infty$ liegt jeweils ein Infimum von $y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ vor.

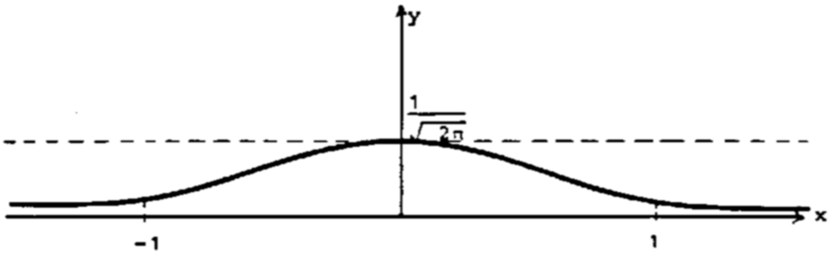
(2) $y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$.

$y'''(+1) > 0 \quad \Rightarrow$ in x_1 ist ein Wendepunkt mit Übergang: Konkavität → Konvexität.

$y'''(-1) < 0 \quad \Rightarrow$ in x_2 ist ein Wendepunkt mit Übergang: Konvexität → Konkavität.

Siehe Abb. 90.

Abbildung 90

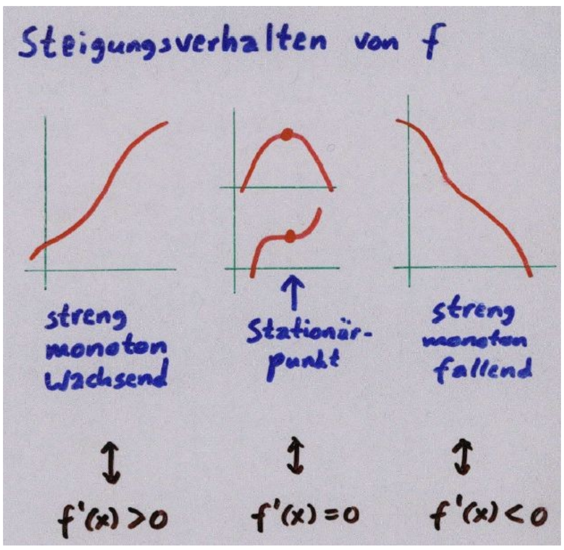


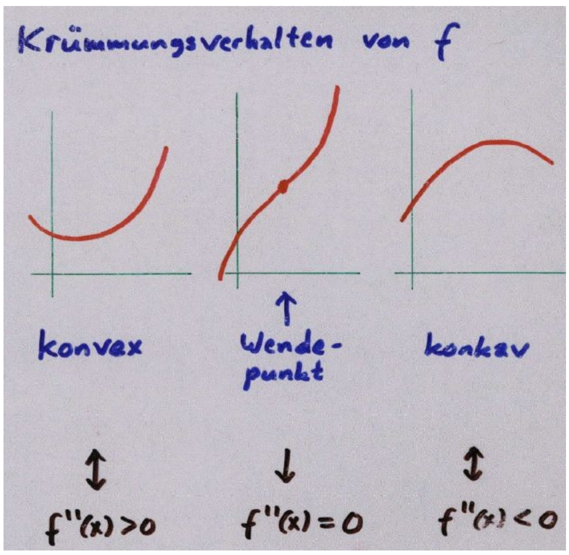
Beispiel 3.31: Bestimmen Sie die Wendepunkte von $y = x^5$.

Lösung: $y' = 5x^4$; $y'' = 20x^3$; $y''' = 60x^2$; $y^{(4)} = 120x$; $y^{(5)} = 120$

Es ist $y'(0) = 0$; $y''(0) = 0$; $y'''(0) = 0$; $y^{(4)}(0) = 0$; $y^{(5)} > 0 \Rightarrow$ (0, 0) ist Wendepunkt, in dem die Funktion aus dem konkaven in den konvexen Verlauf übergeht.

Zusammenfassung





Asymptoten

Ist man bemüht um ein vollständiges Bild einer Funktion für $x \to \pm\infty$ oder in der Umgebung von Unstetigkeitsstellen, so ist die Konstruktion der Asymptoten von Bedeutung.

Gibt es zu einer Funktion f eine Funktion g mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, so sagt man,

$f(x)$ verhält sich *asymptotisch* wie $g(x)$.

Beispiel 3.32:

$$f(x)=\sqrt{x+\frac{1}{x}} \;;\; g(x)=\sqrt{x}$$, dann gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x(1+\frac{1}{x^2})}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$ (*Abb. 91a*).

Abbildung 91 a

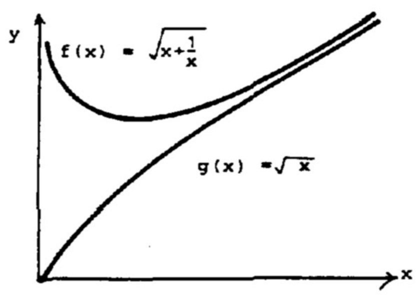
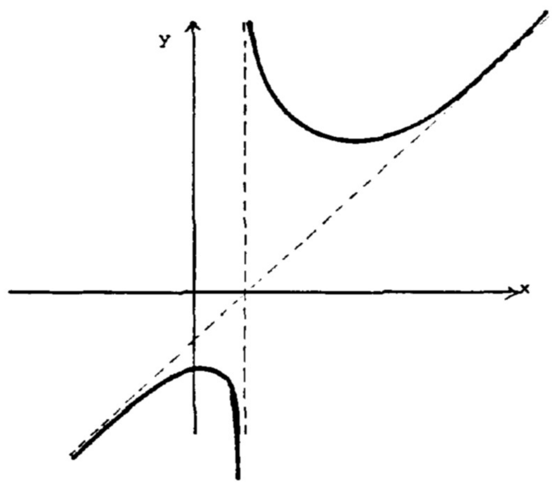


Abbildung 91 b



Spezialfall: Ist g eine lineare Funktion (Gerade), also $g(x) = k \cdot x + q$, so nennt man diese Gerade eine Asymptote des Graphen von f, wenn zusätzlich gilt:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-(k\cdot x+q)) = 0$$

(*vgl. Abb. 91b*: diagonal verlaufende, gestrichelte Gerade).

Die Gerade $y = k \cdot x + q$ ist Asymptote zum Graphen von $y = f(x)$ genau dann, wenn folgende endliche Grenzwerte existieren:

$$k=\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \;;\; q=\lim_{x\to\infty} (f(x)-kx) \quad \text{für} \quad x\to+\infty \quad \text{oder} \quad x\to-\infty \;.$$

Asymptoten parallel zur y-Achse bilden einen weiteren Spezialfall:

Die Gerade $x = x_0$ ist (vertikale) Asymptote zu f, wenn f in x_0 einen rechtsseitigen oder linksseitigen unendlichen Grenzwert hat. D.h. es gilt mindestens eine der vier Beziehungen:

$$\lim f(x) = +\infty \qquad \text{für} \quad x \to x_0^+ \qquad \text{oder} \quad x \to x_0^-$$
$$\lim f(x) = -\infty \qquad \text{für} \quad x \to x_0^+ \qquad \text{oder} \quad x \to x_0^-$$

Abb. 92 zeigt verschiedene Fälle.

Abbildung 92 a

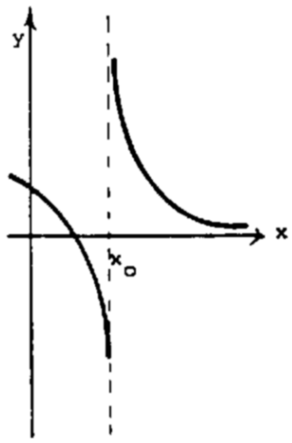


Abbildung 92 b

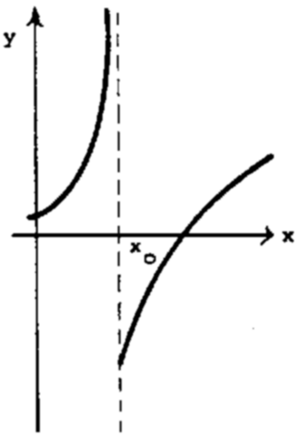


Abbildung 92 c

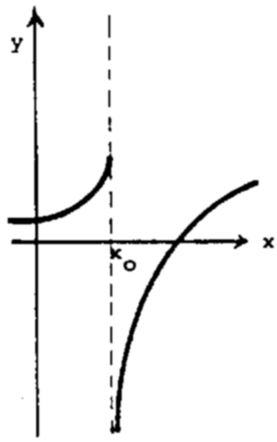
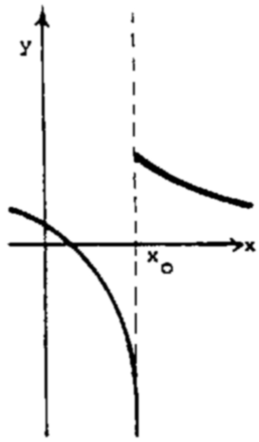


Abbildung 92 d



Kurvendiskussion

Zusammenfassung der Schritte, die bei der Bestimmung von Kurvenverläufen von $y = f(x)$ gewöhnlich angewandt werden:

(1) Bestimmung des Definitionsbereiches $D(f)$ und des Funktionsbereiches $B(f)$

(2) Stetigkeit, gerade oder ungerade Funktion, Periodizität

(3) Schnittpunkte von $f(x)$ mit den Koordinatenachsen
  (a) mit $f(x) = 0$ die Schnittpunkte mit der x-Achse (*Nullstellen*)
  (b) mit $y = f(x)$ für $x = 0$ den Schnittpunkt mit der y-Achse
  (c) Bestimmung der Intervalle, wo die Funktion positiv bzw. negativ ist

(4) Verhalten der Funktion in den Unstetigkeitspunkten und in den Randpunkten des Definitionsbereiches

(5) Asymptoten

(6) Lokale Extrema der Funktion

(7) Wendepunkte (und Intervalle der Konvexität und Konkavität)

(8) Konstruktion des Graphen, gegebenenfalls zusätzliche Punkte für die genauere Darstellung.

Einige dieser Punkte werden gegebenenfalls ausgelassen, wenn sie keinen Sinn haben, z.B. Asymptoten bei Polynomen, etc.

Beispiel der „Gauß´schen Glockenkurve“:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Schritte zur Kurvendiskussion:

(1) (a) Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

(b) Bildbereich: $g(x) = -\frac{x^2}{2}$ nimmt alle Werte ≤ 0 an.

$h(x) = e^z \quad > 0 \ \ \forall z$

$h(-\infty; 0] = (0; 1]$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot h(g(x))$ nimmt die Werte zwischen 0

und $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989$ an.

$\Rightarrow \quad B(f) = (0; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$.

(2) (a) Stetigkeit: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(b) gerade/ ungerade: $f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = f(x)$

$\Rightarrow$ f ist eine gerade Funktion.

(c) Periodizität: f ist nicht periodisch.

(3) Achsenschnittpunkte:

(a) mit der x-Achse (Nullstellen): $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$, kann nicht existieren, da $e^z > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ keine Nullstellen

(b) mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989$

(c) Wo ist f positiv/negativ ? $e^z > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$, f überall positiv.

(4) Verhalten von f an Unstetigkeitsstellen und am Rand des Definitionsbereichs:

$$\underbrace{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)}_{f \text{ gerade}} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^z}_{z = -\frac{x^2}{2}} = 0.$$

(5) Asymptoten: Für $x \to \pm\infty$ geht $f(x)$ gegen 0
$\Rightarrow$ die x-Achse ist an beiden Rändern ($\pm\infty$) des Definitionsbereichs Asymptote.

(6) Lokale Extrema:
Zunächst Ableitungen berechnen.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \left(\frac{-2x}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad \text{(Kettenregel!)}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} + x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \left(\frac{-2x}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{\frac{-x^2}{2}} + x^2 \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Stationärpunkte:

$$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\cdot x\cdot \underbrace{e^{\frac{-x^2}{2}}}_{>0} = 0 \;\Leftrightarrow\; x=0.$$

$\Rightarrow$ nur bei $x_0 = 0$ kann eine Extremstelle vorliegen.

$f(x)\to 0$ für $x\to\pm\infty$, $f(x)>0$ auf ganz $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ bei $x_0 = 0$ kann nur ein Maximum vorliegen.

[Kontrolle: $f''(x_0) = f''(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(0^2-1)\cdot e^0 = -1\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 0$ $\surd$]

Funktionswert bei $x_0 = 0$: $f(x_0)=f(0)\approx 0{,}3989$, s.o.
Weil es keine anderen Extrema gibt und weil $f(x)\to 0$ für $x\to\pm\infty$, ist dieses lokaleMaximum sogar ein absolutes Maximum von f .

(7) Wendepunkte; f konkav/konvex ?

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\underbrace{(x^2-1)}_{\downarrow}\cdot\underbrace{e^{\frac{-x^2}{2}}}_{>0}$$

Term (x^2-1) entscheidet das Vorzeichen!

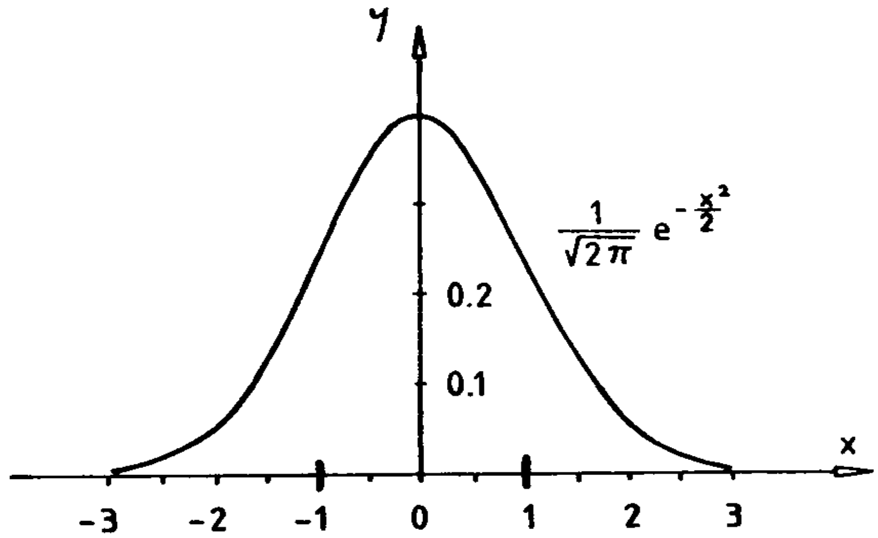
$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm 1$ Wendestellen.

Für $x < (-1)$ ist $f''(x)>0$, also f konvex
Für $x\in(-1;+1)$ ist $f''(x)<0$, also f konkav
Für $x > (+1)$ ist $f''(x)>0$, also f wieder konvex.

Funktionswert an den Wendestellen: $f(-1) = f(+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}} \approx 0{,}242$.

(8) Graph von f: siehe Abb. 93.

Abbildung 93



Beispiel 3.33: Bestimmen Sie den Verlauf der Funktion $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Lösung:

(1) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

(2) Die Funktion ist weder gerade noch ungerade. Sie ist nicht periodisch.

(3) Berührungspunkt mit der x-Achse ist $x = 0$,
Schnittpunkt mit der y-Achse ist $y = f(0) = 0$.

(4) Punkt $x = 1$ ist Unstetigkeitspunkt.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{(x-1)} = \| \; x = 1+\delta, \;\; \delta \to 0 \; \| = \lim_{\delta \to 0} \frac{(1+\delta)^2}{1+\delta-1} = +\infty \;\; \text{und} \;\; \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

(5a) Asymptote nicht parallel zur y-Achse ($y = k \cdot x + q$):

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2x-1} = 1$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \;\; \Rightarrow \;\; y = x+1 \;\; .$$

(b) Asymptote parallel zur y-Achse hat die Gleichung $x = 1$, da nach (4) gilt:

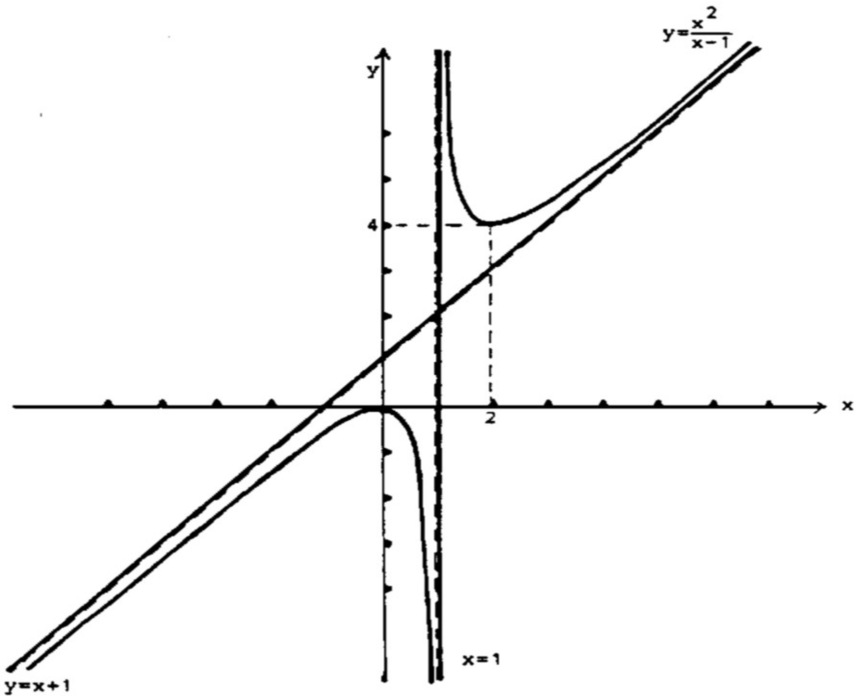
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \, ; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \;\; .$$

(6) Extrema: $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0; x_2 = 2$
$y''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = (0, 0)$ ist lokales Maximum,
$y''(2) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = (2, 4)$ ist lokales Minimum.

(7) Aus $y'' \neq 0$ folgt: es existiert kein Wendepunkt.
(8) Graph: siehe Abb. 94.

Abbildung 94



Das sollte man nach dem Besuch der Vorlesungen und Übungen können:

- Was ist eine Folge?
- Erkennen von innerer und äußerer Komponente bei geschachtelten Funktionen
- Berechnen einer inversen Funktion (Umkehrfunktion)
- Bestimmen des Grenzwertes einer Funktion
- insbesondere Grenzwerte vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ (Regel von de l´Hospital)
- Bachmann-Landau'sche Groß-O-Notation
- Erkennen von Unstetigkeiten
- Anwendung der Rechenregeln für Ableitungen
- Approximation einer Funktion mit Hilfe der ersten Ableitung (Differential) und gegebenenfalls mit Hilfe höherer Ableitungen (Formel von Taylor)
- Extremwertbestimmung bei Funktionen einer Variablen
- Bestimmung von Wendepunkten
- Kurvendiskussion