KAPITEL 2: LINEARE ALGEBRA

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der ***Vektor- und der Matrizenrechnung***, deren Bedeutung auch in den weiteren Kapiteln nochmals deutlich werden wird. Anwendungsbeispiele sind die Lösung linearer Gleichungssysteme und die Methode der kleinsten Quadrate (Anpassung einer Kurve an Messdaten). In anderen forstwissenschaftlichen Gebieten wird die lineare Algebra u.a. benötigt für:

- Holzmarkt / Holzverkauf (Input-Output-Matrizen)
- Populationsdynamik
- Holzmesslehre
- Waldbau
- Betriebswirtschaftslehre
- lineare Optimierung

Was hat die lineare Algebra mit der Forstwissenschaft zu tun?

Verallgemeinernd kann man die *Forstwirtschaft als wiederkehrende Pflanzung von Waldbeständen und deren Ernte betrachten.*

Als Beispiel betrachten wir zum Zeitpunkt *t*, also unserem Ausgangszeitpunkt, einen 30-jährigen, 10 ha großen Waldbestand. In 10 Jahren (Zeitpunkt *t*+1) wird dieser Bestand das Alter 40 Jahre erreicht haben und ein Teil des Holzes wird vielleicht genutzt worden sein. Vereinfachend gehen wir vom Kahlschlag einer bestimmten Fläche mit sofort anschließender Aufforstung aus. In diesem Fall soll die genutzte Fläche 3 ha betragen. Zum Zeitpunkt *t*+1 hat der Bestand also eine andere altersmäßige Zusammensetzung als zu Beginn der Betrachtung.

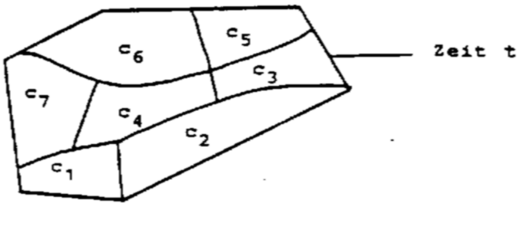
Innerhalb der nächsten 10 Jahre werden beispielsweise weitere 5 ha der Fläche genutzt, und zum Zeitpunkt *t*+2 sähe die Altersklassenverteilung dann folgendermaßen aus:

2 ha: 50 Jahre
3 ha: 10 Jahre
5 ha: Kahlfläche (aber anschließend sofortige Aufforstung)

Dieses Modell lässt sich noch weiter fortsetzen, und es kann natürlich auch auf andere Beispielfälle angewendet werden.

Wir können also die Altersstruktur eines Waldes durch die Flächenanteile der einzelnen Altersklassen beschreiben. Anschaulicher wird das Modell durch eine grafische Darstellung:

Abbildung 25



c_0, c_1, c_2, ...c_n stellen die Flächen der jeweiligen Altersklassen 0 (Kahlfläche), 1 (gerade aufgeforstet), 2 (10jährig) usw. dar. Die 0-Klasse ist wegen sofortiger Wiederaufforstung nicht vorhanden. Sie geht direkt in die 1. Klasse über. Wenn wir die verschiedenen Altersklassen in einem Vektor zusammenfassen, erhalten wir einen ***n-dimensionalen Vektor,*** der die ***Altersstruktur des Bestandes*** beschreibt.

$$\vec{a}_t = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ z.B. c_1: ***Fläche*** aller Bäume im Alter 0 bis 10 Jahre ***in ha***

Natürlich ist dieses ein sehr einfaches Beispiel, und der Altersklassenwald ist nicht mehr zeitgemäß, dennoch soll es hier als Grundlage für weitere Betrachtungen behandelt werden, zumal es in Form des sogenannten „Normalwald-Modells“ im Laufe des Forststudiums noch mehrmals auftreten wird.

Der Zustand des Waldes im obigen Beispiel zu den verschiedenen Zeitpunkten kann in Vektoren, den sogenannten ***Altersvektoren***, folgendermaßen dargestellt werden:

Zu Beginn der Bewirtschaftung, im Alter 30 Jahre: $\vec{a}_t = (0,0,10,0,0,...)$

Von den 10 ha werden 3 ha eingeschlagen ⇒ im Alter 40 J.: $\vec{a}_{t+1} = (3,0,0,7,0,...)$

Von den 7 ha werden wieder 5 ha eingeschlagen ⇒ $\vec{a}_{t+2} = (5,3,0,0,2,0,...)$

Die einzelnen Komponenten der Vektoren stellen die Flächenanteile der einzelnen Altersklassen dar.
Die ***Summe der einzelnen Komponenten muss also immer die gesamte Bestandesfläche*** (in diesem Fall 10 ha) ***ergeben.*** Die Gesamtfläche ändert sich nicht, egal wie die altersmäßige Zusammensetzung des Bestandes sich ändert.
Nach 10 Jahren rücken alle Komponenten in die nächsthöhere Altersklasse vor. Der kahlgeschlagene und sofort wieder aufgeforstete Anteil befindet sich immer in der Altersklasse c_1.
An diesem Beispiel kann man sehen, dass sich die Vektoren zwischen den betrachteten Zeitpunkten verändern.
Deshalb stellen wir uns einen ***n-dimensionalen Vektorraum A*** vor (eine räumliche Vorstellung ist natürlich nur bis zur 3. Dimension möglich), in dem sich der Vektor $\vec{a}_t$ bewegt und sich im Verlauf von jeweils 10 Jahren in die Vektoren $\vec{a}_{t+1}, \vec{a}_{t+2}, ...$ verwandelt.
Den n-dimensionalen Vektorraum A bezeichnen wir als ***Altersraum***, die n-dimensionalen Vektoren, die ja nach dem Alter zusammengefasste Flächen als Komponenten haben, als ***Altersvektoren***.
In diesem Kapitel wird die Bewegung der Altersvektoren in A mit Hilfe von ***Übergangsmatrizen*** beschrieben werden. Dazu müssen aber zunächst die Grundlagen der linearen Algebra erläutert werden.

Grundlegende Begriffe der linearen Algebra

Vektor:

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ = Menge aller n-Tupel reeller Zahlen
= Menge aller Vektoren mit n Komponenten

Zwei Schreibweisen:

<u>Zeilenvektoren</u> z.B. (1; 5; −2) <u>Spaltenvektoren</u> $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

Spezialfälle:

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, darstellbar als Ebene.

Jedem Vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ entspricht ein Punkt in der Ebene. Oft stellt man einen Vektor auch durch einen Pfeil vom Nullpunkt (0, 0) zu diesem Punkt dar.

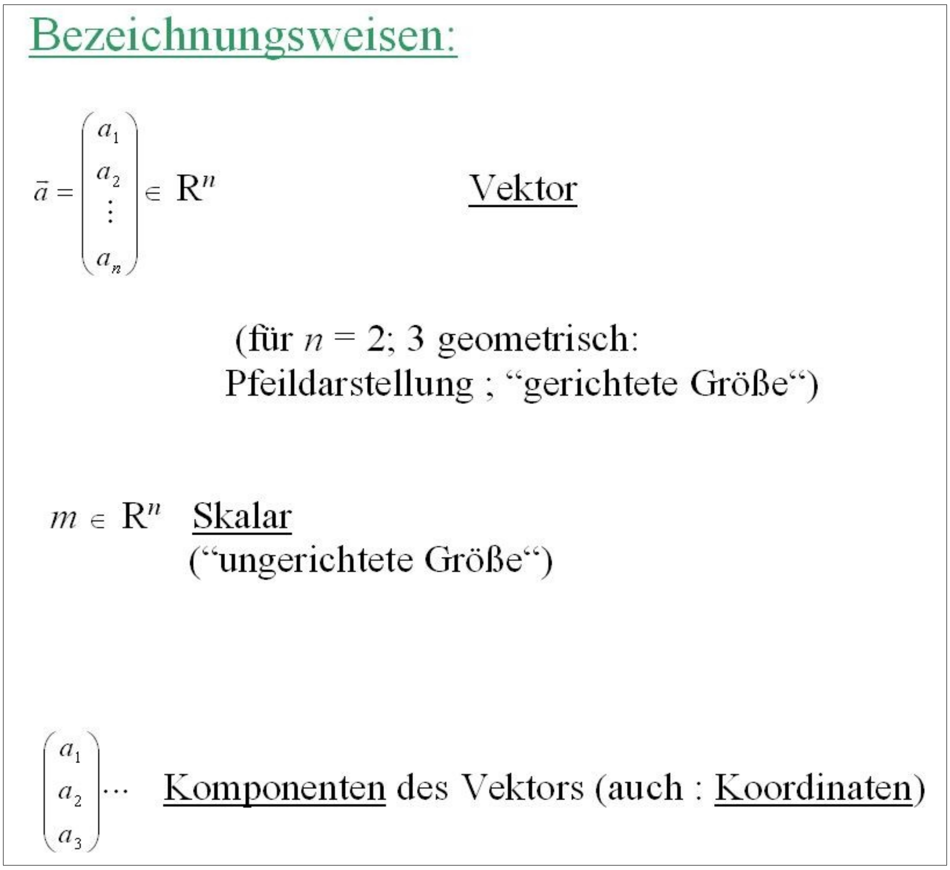
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dreidimensionaler Raum.

<u>Definition 2.1:</u> Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$.

Das geordnete n-Tupel $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ heißt n-dimensionaler Zahlenvektor.

Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots. a_n$ heißen Komponenten oder Koordinaten des Vektors $\vec{a}$.

Merke:



<u>Bezeichnungsweisen:</u>

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^n$ <u>Vektor</u>

(für $n = 2; 3$ geometrisch:
Pfeildarstellung ; “gerichtete Größe“)

$m \in \mathrm{R}^n$ <u>Skalar</u>
(“ungerichtete Größe“)

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdots$ <u>Komponenten</u> des Vektors (auch : <u>Koordinaten</u>)

Vektorraum:

Definition 2.2: Die Menge aller 2-dimensionalen Zahlenvektoren wird als 2-dimensionaler Vektorraum bezeichnet. **Symbol:** $\mathbb{R}^2$

Die Menge aller 3-dimensionalen Zahlenvektoren bezeichnet man als 3-dimensionalen Vektorraum. **Symbol:** $\mathbb{R}^3$

Die Menge aller n-dimensionalen Zahlenvektoren bezeichnet man als n-dimensionalen Vektorraum. **Symbol:** $\mathbb{R}^n$

In allen Vektorräumen $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$ gibt es ***unendlich viele Vektoren.***

Gleichheit von Vektoren:

Definition 2.3: Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann gleich, wenn ***alle einander entsprechenden Koordinaten gleich sind***, wenn also gilt: $a_i = b_i$ für $i = 1$ bis n.

Merke:

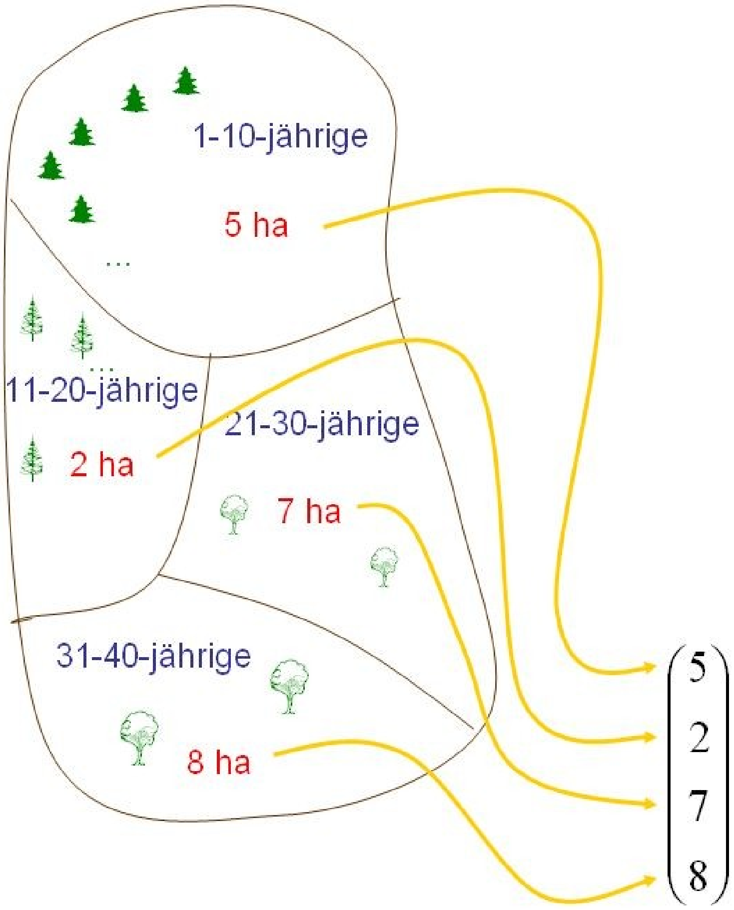
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \quad \wedge \quad a_2 = b_2 \quad \wedge \cdots$$

$$\cdots \wedge \; a_n = b_n$$

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn alle ihre entsprechenden Komponenten übereinstimmen.

Beispiel eines Vektors in einem höherdimensionalen Vektorraum R^n $(n > 3)$:

Der Altersklassenvektor einer Population (eines Waldbestandes)



Addition von Vektoren:

Definition 2.4: $\forall \vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n \exists_1 \vec{c}\in\mathbb{R}^n$ mit $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$.

(In Worten: Es gibt für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *aus dem n-dimensionalen Vektorraum* $\mathbb{R}^n$ *genau ein* $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$ *mit ...)*

Den Vektor $\vec{c}$ ***erhält man durch Addition der entsprechenden Komponenten*** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$\vec{c}$ heißt ***Summe*** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Als Spaltenvektoren geschrieben:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \dots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} .$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar:

Wichtig ist der ***Unterschied zu Skalarprodukt und Vektorprodukt***, die erst später behandelt werden!

Definition 2.5: Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{R}$ (m ist eine reelle Zahl, ein ***Skalar***).

Der Vektor $\vec{d}$ mit $\vec{d} = m \cdot \vec{a} = (m \cdot a_1, m \cdot a_2, \dots, m \cdot a_n)$ heißt ***Produkt des Vektors*** $\vec{a}$ ***mit dem Skalar m***.

Jede Komponente des Vektors wird mit dem Skalar multipliziert. Dadurch ***ändert sich nur die Länge des Vektors*** (der entsprechende Pfeil wird entweder kürzer oder länger) ***oder sein Sinn***, so dass er in die entgegengesetzte Richtung weist. ***Niemals ändert sich durch Multiplikation mit einem Skalar die Richtung eines Vektors im Raum.***

Beispiel 2.1: $\vec{a} = (1,2,4,6)$ $\quad \vec{b} = (1,2,5,6)$ $\quad m = -2$

$\vec{a} + \vec{b} = (2,4,9,12)$

$m \cdot \vec{a} = (-2, -4, -8, -12)$

Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\vec{a} \neq \vec{b}$, da $a_3 \neq b_3$.

Die „größer als“-Relation:

Für die lineare Optimierung ist es erforderlich, die Relation „größer als“ im $\mathbb{R}^n$ einzuführen.

Definition 2.6: $\vec{a} > \vec{b}$, wenn $a_i > b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, also wenn ***alle Koordinaten von*** $\vec{a}$ ***größer sind als die entsprechenden Koordinaten von*** $\vec{b}$ ***.***

Die Relationen <, ≤, ≥ lassen sich ähnlich definieren.

Man kann nicht immer festlegen, ob der gesamte Vektor $\vec{a}$ größer ist als $\vec{b}$, da sich dies von Koordinate zu Koordinate ändern kann.

Eigenschaften der Operationen in $\mathbb{R}^n$

Bei den vorangegangenen Definitionen wurden die Operationen mit Vektoren ***auf die bekannten Operationen mit den reellen Zahlen zurückgeführt***, indem die einzelnen Koordinaten für sich betrachtet wurden. Die folgenden Regeln ergeben sich ebenfalls durch ***Einzelbetrachtung der Komponenten.***

Für alle Regeln gilt: $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $k,m \in \mathbb{R}$.

a) Kommutativität: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *(In Worten: Es ist unerheblich, in welcher Reihenfolge man Vektoren addiert.)*

$k\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot k$ *(In Worten: Es ist egal, ob man den Vektor mit dem Skalar oder den Skalar mit dem Vektor multipliziert.)*

b) Assoziativität: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ *(In Worten: Bei der Addition von Vektoren können Klammern beliebig gesetzt werden.)*

$k\cdot(m\vec{a})=(k\,m)\cdot\vec{a}$ *(In Worten: Auch bei der Multiplikation von Vektoren mit Skalaren kann man beliebig Klammern setzen.)*

c) Distributivität: $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ *(In Worten: Das bei reellen Zahlen angewandte „Ausmultiplizieren“ kann auch bei der Skalarmultiplikation angewandt werden.)*

$k\cdot(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

d) Existenz eines neutralen Elements bei der **Addition** von Vektoren: $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Dies ist der sogenannte ***Nullvektor***, der folgende Eigenschaft hat: $\forall \vec{a}\in\mathbb{R}^n$ gilt $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

(In Worten: Ein Vektor $\vec{a}$ ändert weder seine Richtung noch seine Länge durch Hinzuaddieren des Nullvektors.)

e) Existenz inverser Elemente bei der **Addition**: $\forall \vec{a}\in\mathbb{R}^n \exists_1 \; -\vec{a}=(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$

(In Worten: Für alle Vektoren $\vec{a}$ aus dem n-dimensionalen Vektorraum gibt es genau ein ***inverses Element*** *$-\vec{a}$, dessen Komponenten denen des Vektors $\vec{a}$ entsprechen und das entgegengesetzte Vorzeichen tragen.)* Es gilt: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

f) Für die Multiplikation von $\vec{a}$ mit Skalaren gilt:

$\forall \vec{a}\in\mathbb{R}^n$:

(a) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

(b) $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$

(c) $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

(d) $\vec{a}(-1)=-\vec{a}$

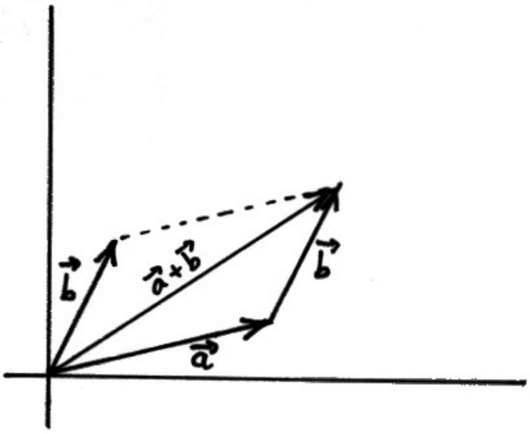
$\forall k\in\mathbb{R}$: $k\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot k=\vec{0}$

Wenn $k\cdot\vec{a}=\vec{0}$, dann ist $k=0$ oder $\vec{a}=\vec{0}$.

Geometrische Bedeutung

1. der Vektoraddition:

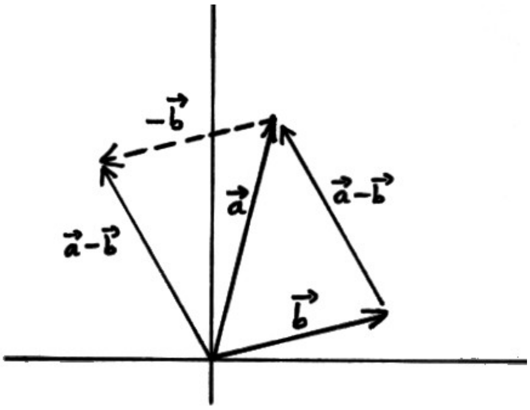
Abbildung 26



$\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden „hintereinandergesetzt“

2. der Vektorsubtraktion:

Abbildung 27



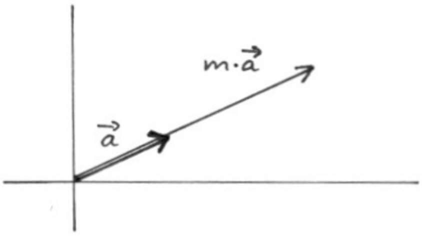
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ „Verbindungsvektor“ von $\vec{b}$ und $\vec{a}$

$\uparrow$

Richtungsumkehr von $\vec{b}$

3. der Multiplikation „Skalar · Vektor“:

Abbildung 28



$m\cdot\vec{a}$ Streckung (oder Stauchung, falls $|m|<1$), verbunden mit Richtungsumkehr, falls $m < 0$.

Zusammenfassung:

Definition der Summe zweier Vektoren im R^n

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$\vec{a} + b = b + \vec{a}$ Kommutativgesetz

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ Assoziativgesetz

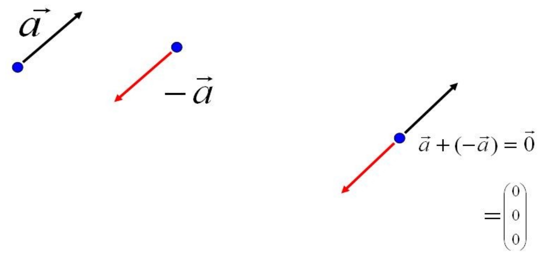
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, neutrales Element $\vec{0}$

wobei $\vec{0}$ der Nullvektor ist:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$$

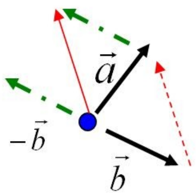
$$\forall \vec{a} \in R^n \; \exists_1 (-\vec{a}) \in R^n : \; \vec{a} + (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverses (negatives) Element}}}{-\vec{a}}) = \vec{0}$$

$-\vec{a} \;=\; ?$



Differenz zweier Vektoren:

$$\vec{a} - \vec{b}$$
$$= \vec{a} + (-\vec{b})$$



Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar
(≠ „Skalarprodukt“, ≠ „Vektorprodukt“ !)

$m \in R$, $\vec{a} \in R^n$

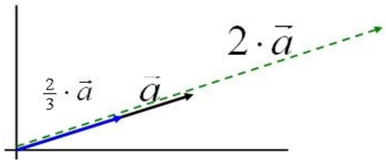
$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} m \cdot a_1 \\ m \cdot a_2 \\ \vdots \\ m \cdot a_n \end{pmatrix} \in R^n$$

Beispiel:

$$\tfrac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tfrac{2}{3} \cdot 9 \\ \tfrac{2}{3} \cdot (-5) \\ \tfrac{2}{3} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\tfrac{10}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

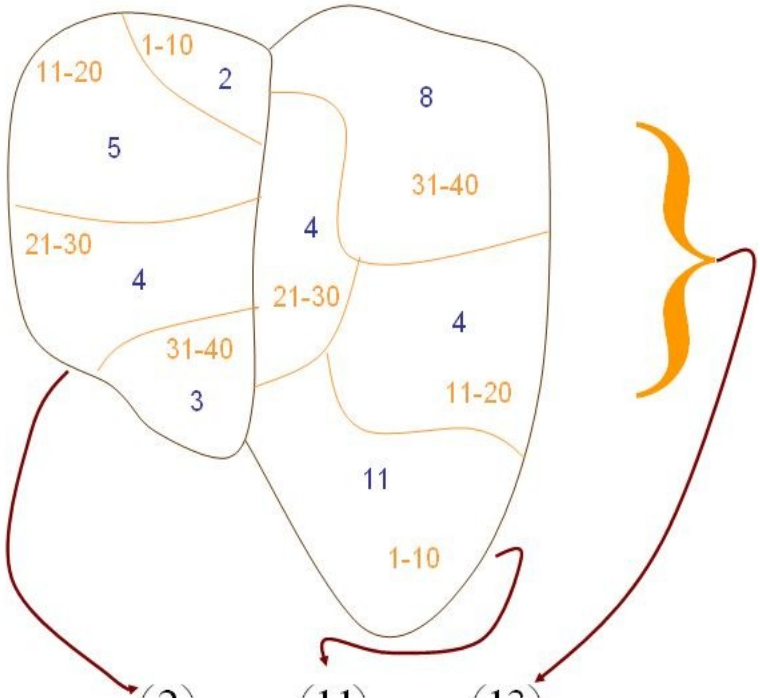
Geometrische Bedeutung:

Streckung bzw. Stauchung von $\vec{a}$ um den Faktor m



Die Summe im Falle der Altersklassenvektoren:

Zusammenfassung zweier Bestände zu einem.



$$\begin{pmatrix}2\\5\\4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}11\\4\\4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\9\\8\\11\end{pmatrix}$$

Altersklassenstruktur der Gesamtfläche

Es gilt:

$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

$m \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$m \cdot \vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad m = 0 \vee \vec{a} = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b} \\ (k+m) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} \end{array}\right\} \text{Distributivgesetze}$$

Im Folgenden sind Terme der Form

$m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + m_k \cdot \vec{a}_k$

$(= \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \vec{a}_i), \quad m_i \in \mathrm{R}, \quad \vec{a}_i \in \mathrm{R}^n$

wichtig. Wir sprechen von einer Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_k$; die m_i heißen Koeffizienten.

Vektorsystem

Definition 2.7: Jede endliche Teilmenge aus $\mathbb{R}^n$ wird Vektorsystem aus $\mathbb{R}^n$ genannt.

Beispiel 2.2: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_4, \vec{d}_9\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Linearkombination von Vektoren

Definition 2.8: Gegeben sind *k* (z.B. 9) Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ und *k* reelle Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{R}$.

Jede Summe $m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \ldots + m_k \vec{a}_k = \sum_{i=1}^{k} m_i \vec{a}_i$ heißt ***Linearkombination*** (LK) der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

Die reellen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ heißen ***Koeffizienten*** der Linearkombination.

Beispiel 2.3: *(im 3-dimensionalen Raum)* $\vec{a}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (-2, 0, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, -2, 2)$

Der Vektor $\vec{b} = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 + 3\vec{a}_4$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$.
Eine andere Linearkombination wäre z.B. $\vec{c} = 8{,}5\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 - 6\vec{a}_4$.

In der Koordinatenschreibweise ergibt sich:

$$\vec{b} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -11 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\vec{c} = 8,5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}5 \\ 0{,}5 \\ -15 \end{bmatrix} .$$

Das Ergebnis einer Linearkombination von Vektoren ist wieder ein Vektor.

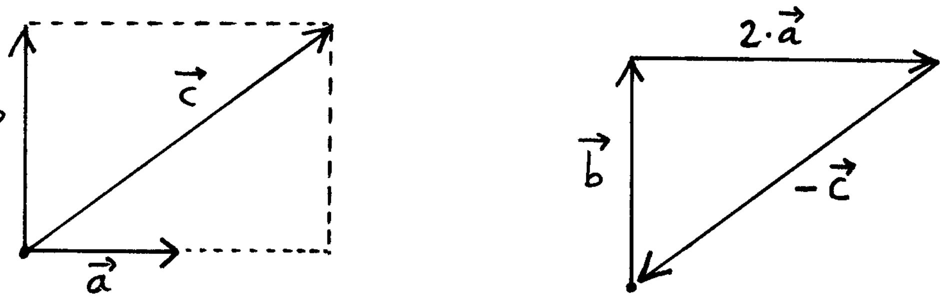
Triviale Linearkombination:

Definition 2.9: Eine Linearkombination heißt *trivial*, wenn *sämtliche Koeffizienten* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *gleich Null* sind. Wenn *mindestens ein Koeffizient von Null verschieden* ist, so wird sie *nichttrivial* genannt.

Drei Vektoren in einer Ebene durch den Nullpunkt

Beispiel:

Abbildung 29



$$1\cdot\vec{b}+2\cdot\vec{a}+(-1)\cdot\vec{c}=\vec{0}$$

Man kann einen „Rundlauf“ erzeugen, d.h. eine Linearkombination der drei Vektoren, die den Nullvektor $\vec{0}$ ergibt.

Beachte:

In dieser Linearkombination sind die Koeffizienten (1, 2, −1) von 0 verschieden, sie ist also nichttrivial. $0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{c}=\vec{0}$ wäre trivial.

Man sagt: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sind *linear abhängig.*

Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit von Vektoren

Definition 2.10: Es seien gegeben: $k\in\mathbb{N}$ und die Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k\in\mathbb{R}^n$.

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$ heißen ***linear abhängig***, wenn es Zahlen $m_1,m_2,\ldots,m_k$ gibt, die ***nicht alle gleich Null sind***, so dass gilt: $\sum_{i=1}^{k} m_i\vec{a}_i=\vec{0}$. *(In Worten: Wenn eine Linearkombination Null ergibt, ohne dass **alle** Vektoren mit Null multipliziert werden, so heißen die Vektoren linear abhängig.)*

Gilt $\sum_{i=1}^{k} m_i\vec{a}_i=\vec{0}$ nur, wenn alle Koeffizienten gleich Null sind, so heißen die Vektoren ***linear unabhängig***.

Mehrere Vektoren bilden genau dann ein ***linear abhängiges System, wenn man einen der Vektoren durch Linearkombination der übrigen darstellen kann.*** Vektoren mit gleicher Richtung sind immer linear abhängig. Eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist immer linear abhängig.

Beispiel 2.4: Die Vektoren aus Beispiel 2.3 sind linear abhängig, da gilt:

$$3\cdot\vec{a}_1-2\cdot\vec{a}_2+0\cdot\vec{a}_3+3\cdot\vec{a}_4-1\cdot\vec{b}=\vec{0} \quad .$$

Spezialfälle:

$\mathbb{R}^1$: nur einelementige Mengen { $\vec{a}$ }, $\vec{a}$ = a ≠ 0, sind linear unabhängig.

$\mathbb{R}^2$: { $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ } linear abhängig ⇔ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ liegen auf einer Geraden durch 0.

$\mathbb{R}^3$: { $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ } linear abhängig ⇔ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ liegen in einer Ebene durch 0.

Ermittlung der linearen Abhängigkeit

Ob Vektoren linear abhängig sind, ermittelt man, indem man die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ aus der Gleichung $\sum_{i=1}^{k} m_i \vec{a}_i = \vec{0}$ bestimmt. Die Gleichung $\sum_{i=1}^{k} m_i \vec{a}_i = \vec{0}$ stellt ein ***lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit k Unbekannten dar.***

Beispiel 2.5: Gegeben sind: $\vec{a}_1 = (1,2,3)$, $\vec{a}_2 = (0,-1,0)$, $\vec{a}_3 = (-1,2,-2)$.

Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ***linear abhängig?***

Lösungsweg: Es muss nach Def. 2.10 gelten: $\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{a}_i = \vec{0}$.

In Komponentenschreibweise dargestellt, kann man für dieses Beispiel auch schreiben:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Man kann es allerdings auch in Form von 3 Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 \qquad\qquad - m_3 \Rightarrow m_3 = m_1 \\ 0 &= 2m_1 - m_2 + 2m_3 \\ 0 &= 3m_1 \qquad\qquad - 2m_3 \Rightarrow 2m_3 = 3m_1 \end{aligned}$$

Verschiedene Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme werden im Laufe des Kapitels noch vorgestellt werden.

In diesem Fall folgt schon aus der ersten und der dritten Gleichung $m_1 = 0, m_3 = 0$, da nur so die erste und die dritte Gleichung gleichzeitig erfüllt sein können. Nach Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt sich $m_2 = 0$. Da das Gleichungssystem nur erfüllt ist, wenn alle Koeffizienten gleich Null sind, sind die Vektoren ***linear unabhängig***. Keiner der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ kann durch die beiden anderen dargestellt werden.

Übungsbeispiele: linear abhängig oder linear unabhängig (l.a. oder l.u.)? *Entscheiden Sie selbst!*

(a) { $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ }

(b) $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$

(c) $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$

(d) $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \}$

(e) $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \}$

Basis eines Vektorraumes

Es gibt im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ unendlich viele Vektoren. Es kann jedoch ein ***endliches Vektorsystem*** aus diesem Raum ausgewählt werden, mit dessen Hilfe jeder beliebige Vektor aus $\mathbb{R}^n$ als Linearkombination dargestellt werden kann. Die Vektoren dieses endlichen Vektorsystems müssen ***linear unabhängig*** sein, damit die Darstellung eindeutig wird.

Definition 2.11: ***Maximal*** heißt ein System von *k* linear unabhängigen Vektoren, wenn ***durch Zufügen eines beliebigen Vektors aus*** $\mathbb{R}^n$ ***ein System von k* + 1 *linear abhängigen Vektoren entsteht.***

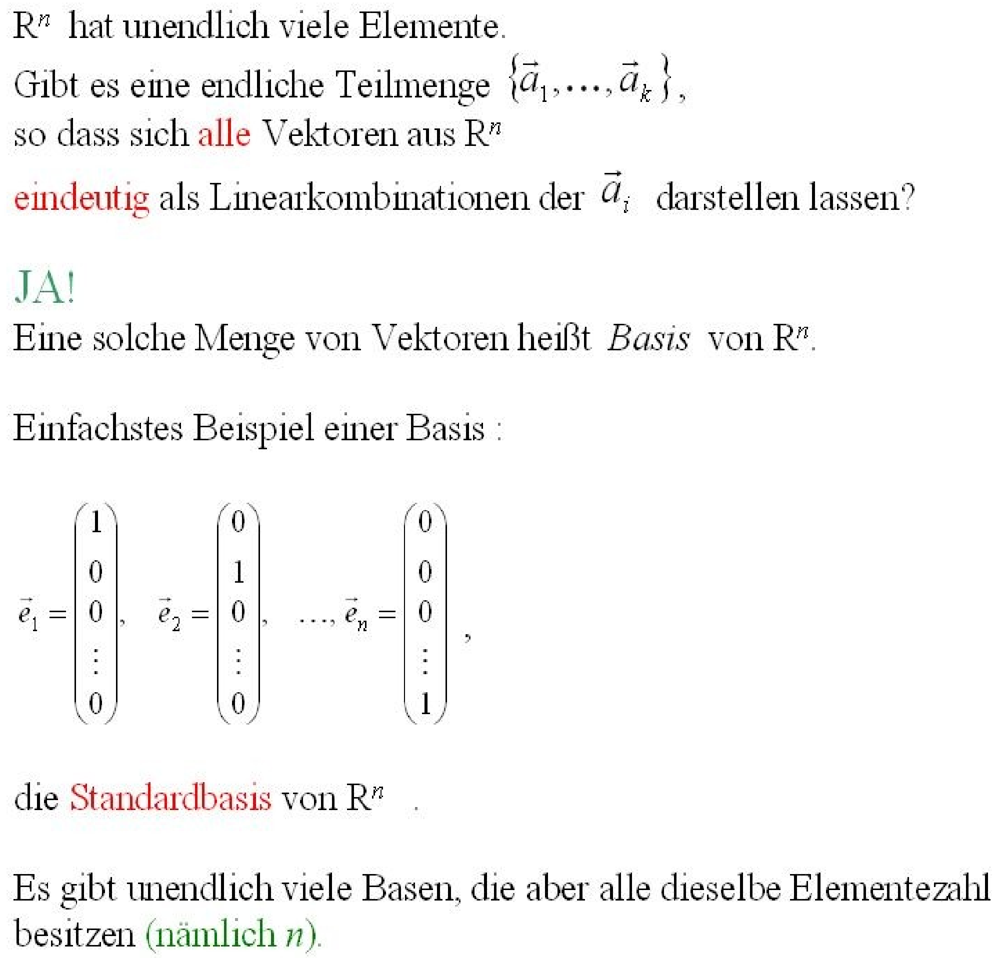
Definition 2.12: Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren eines gegebenen Vektorsystems nennen wir ***Rang*** dieses Vektorsystems. Jedes maximale System linear unabhängiger Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ enthält immer *n* Vektoren. Dies ist die Anzahl der Koordinaten der Vektoren aus $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.13: Jedes maximale System linear unabhängiger Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ heißt ***Basis*** des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$. Die Zahl *n* heißt ***Dimension*** des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 2.6: Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ gibt es maximal 3 linear unabhängige Vektoren. Durch Hinzufügen eines beliebigen Vektors würde das Vektorsystem linear abhängig, da einer der vier Vektoren durch eine Linearkombination der übrigen dargestellt werden kann. Ein Vektorsystem von 3 linear unabhängigen Vektoren im Raum $\mathbb{R}^3$ ist also ***maximal.*** Das Vektorsystem hat den ***Rang* 3**. Es heißt ***Basis*** des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$, und der Vektorraum hat die ***Dimension* 3**.

Die einfachste Basis des $\mathbb{R}^3$ wird durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ gebildet, die in die Richtung der Achsen des kartesischen Koordinatensystems zeigen und daher Standardbasisvektoren genannt werden.

Zusammenfassung:



R^n hat unendlich viele Elemente.

Gibt es eine endliche Teilmenge $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$,
so dass sich alle Vektoren aus R^n
eindeutig als Linearkombinationen der $\vec{a}_i$ darstellen lassen?

JA!

Eine solche Menge von Vektoren heißt *Basis* von R^n.

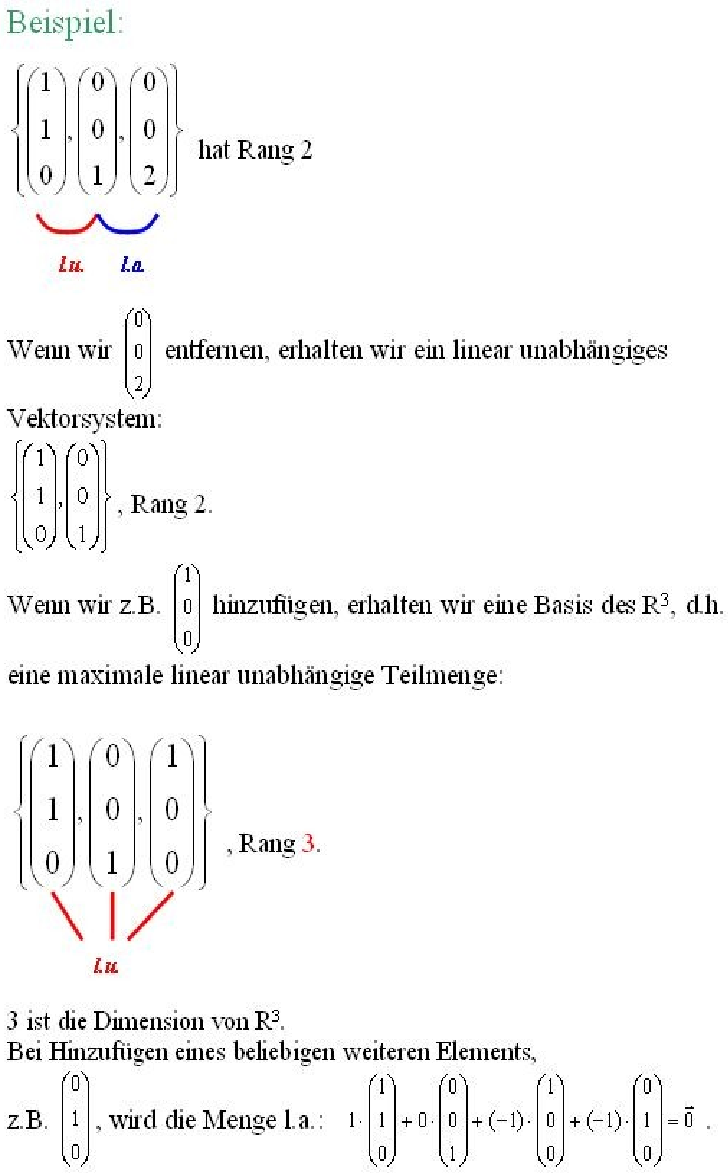
Einfachstes Beispiel einer Basis :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

die Standardbasis von R^n .

Es gibt unendlich viele Basen, die aber alle dieselbe Elementezahl besitzen (nämlich n).

Die Begriffe „lineare Unabhängigkeit / Abhängigkeit“, „Rang“, „Dimension“ und „Basis“ hängen eng zusammen.



Beispiel:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}\text{ hat Rang 2}$$

Wenn wir $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ entfernen, erhalten wir ein linear unabhängiges Vektorsystem:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\text{, Rang 2.}$$

Wenn wir z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ hinzufügen, erhalten wir eine Basis des R^3, d.h. eine maximale linear unabhängige Teilmenge:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\text{, Rang 3.}$$

3 ist die Dimension von R^3.
Bei Hinzufügen eines beliebigen weiteren Elements,
z.B. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, wird die Menge l.a.: $1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$.

Beispiel 2.7: Die Vektoren $\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$, d.h. sie sind linear unabhängig, wie wir auch schon in Beispiel 2.5 bewiesen haben. Wird der Vektor $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ hinzugefügt, so erhalten wir ein linear abhängiges Vektorsystem. Der Vektor $\vec{b}$ muss also eine Linearkombination der übrigen Vektoren sein, und es gilt: $\vec{b}=m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2+m_3\vec{a}_3$.

In Komponentenschreibweise ergibt sich:

$$1=m_1-m_3$$
$$1=2m_1-m_2+2m_3$$
$$0=3m_1-2m_3$$

Beim Lösen des Gleichungssystems erhält man : $m_1 = 1 + m_3$ aus der ersten Gleichung. Aus der dritten ergibt sich: $0 = 3(1+m_3) - 2m_3 \Rightarrow m_3 = -3$.
Das Einsetzen in die erste und dann in die zweite Gleichung ergibt:
$m_1 = -2$ und $m_2 = -11$.

Für $\vec{b}$ gilt deshalb: $\vec{b} = -2\vec{a}_1 - 11\vec{a}_2 - 3\vec{a}_3$. Damit ist bewiesen, dass $\vec{b}$ sich als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.

Die Koordinaten eines Vektors in Bezug auf eine Basis

Jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich ***eindeutig als Linearkombination*** von Vektoren einer Basis ***darstellen***.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der ***Widerspruchsmethode***: Wir behaupten zunächst, ein Vektor ließe sich *nicht* eindeutig darstellen. Dann wären in der Linearkombination verschiedene Skalare einsetzbar.

Gegeben seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ als Basis von $\mathbb{R}^n$ sowie ein Vektor $\vec{b}$. Wenn die Behauptung nun korrekt wäre, so müssten für $\vec{b}$ z.B. folgende beiden Darstellungen gleichzeitig richtig sein:
$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n \wedge \vec{b} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \ldots + y_n\vec{a}_n$.

Die Subtraktion der beiden Gleichungen muss $\vec{0}$ ergeben, da ja beide Gleichungen den Vektor $\vec{b}$ darstellen und $\vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$.

Man erhält: $(\vec{b} - \vec{b}) = \vec{0} = (x_1 - y_1)\vec{a}_1 + (x_2 - y_2)\vec{a}_2 + \ldots + (x_n - y_n)\vec{a}_n$.

Da $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind (sie bilden ja eine Basis), kann die Gleichung nur erfüllt sein, wenn für die Koeffizienten $(x_i - y_i) = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt.
Demnach muss $x_i = y_i$ gelten, und die Behauptung, ein Vektor sei nicht eindeutig durch eine Basis darstellbar, ist widerlegt.

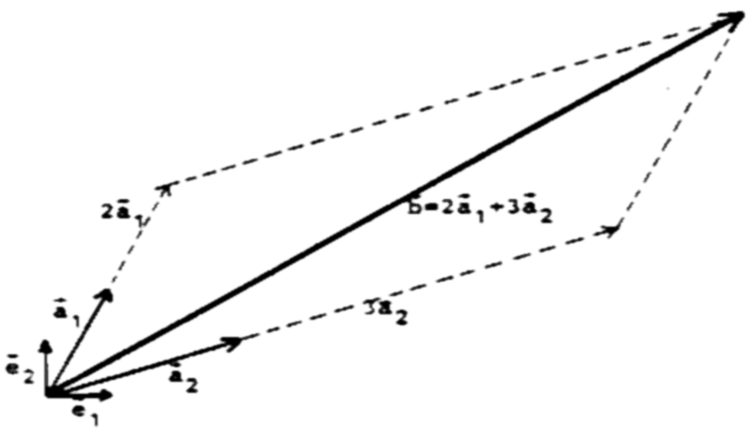
Zusammenfassung: Aus den gegebenen Definitionen und Sätzen folgt, dass in $\mathbb{R}^n$ mindestens eine Basis $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ gefunden werden kann. Bei einer vorausgesetzten Basis von $\mathbb{R}^n$ lässt sich jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Form $\vec{x} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + \ldots + m_n\vec{u}_n$ darstellen, wobei die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ eindeutig festgelegt sind. Die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ nennt man die ***Koordinaten*** des Vektors $\vec{x}$ in Bezug auf die Basis *B*.

Beispiel 2.8: Der Vektor $\vec{b}$ aus Beispiel 2.7 hat die Koordinaten (−2, −11, −3) in Bezug auf die Basis $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$.

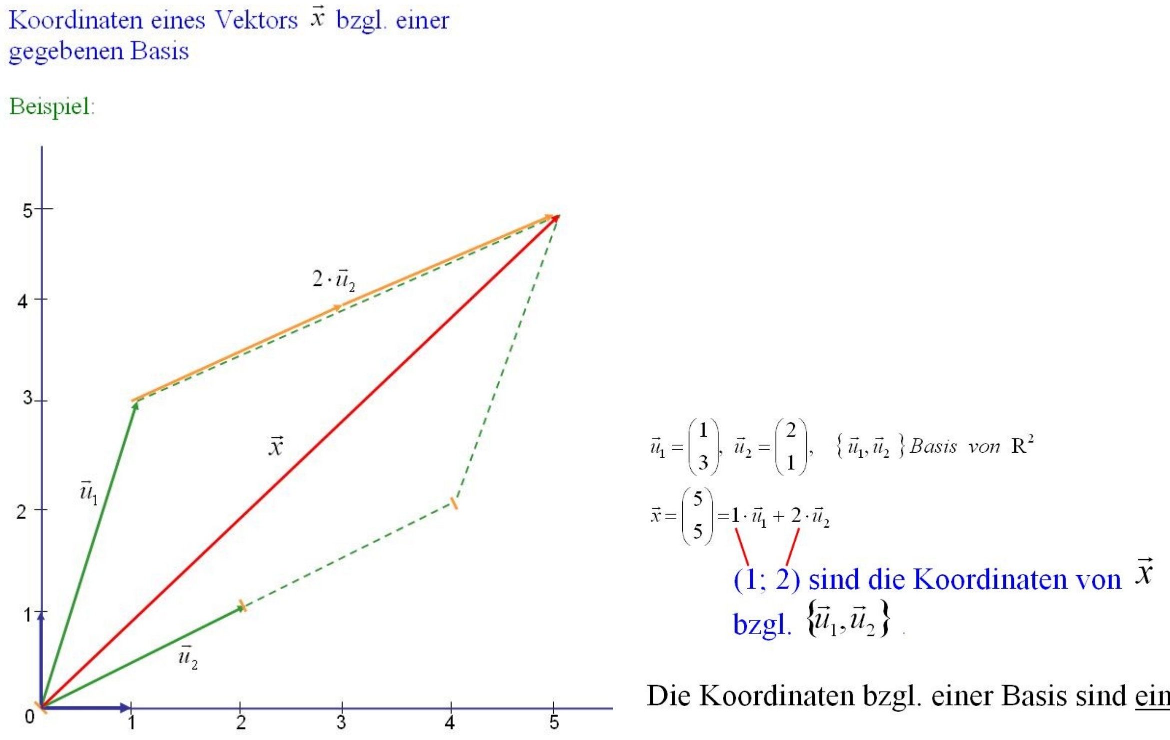
Beispiel 2.9: Gegeben sei die Basis $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ mit $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wir suchen die grafische Darstellung von $\vec{b} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$.

Abbildung 30



weiteres Beispiel:



Koordinaten eines Vektors $\vec{x}$ bzgl. einer gegebenen Basis

Beispiel:

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \ \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *Basis von* R^2

$\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{u}_1 + 2 \cdot \vec{u}_2$

(1; 2) sind die Koordinaten von $\vec{x}$ bzgl. $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Die Koordinaten bzgl. einer Basis sind eindeutig.

Einheitsvektoren

Wir betrachten das Vektorsystem $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \ . \end{aligned}$$

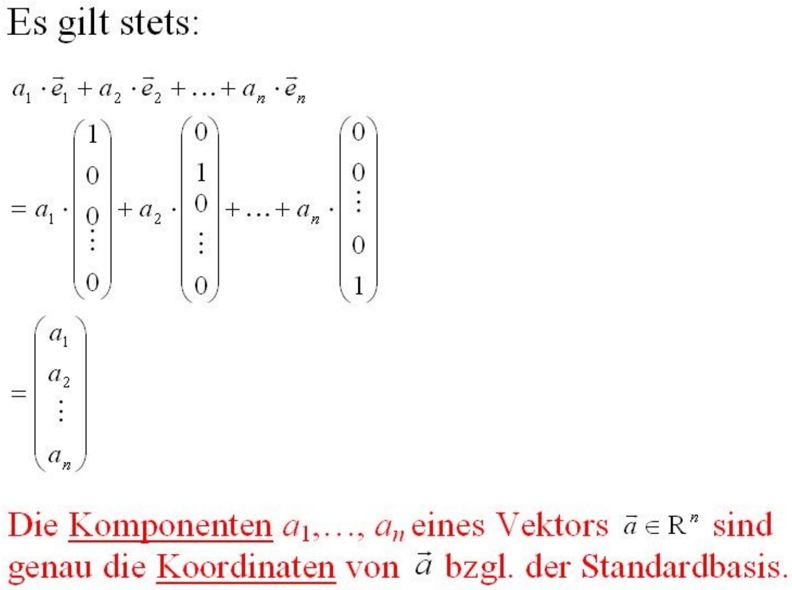
Dieses Vektorsystem ist linear unabhängig und maximal. Es bildet die natürliche Basis (auch kanonische Basis oder Standardbasis genannt, s.o.) des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$. Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ werden als Grund- oder Standardeinheitsvektoren bezeichnet.

Ist $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots a_n)\in\mathbb{R}^n$, so gilt in Bezug auf die Standardbasis:

$$\vec{a}=a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2+\ldots+a_n\cdot\vec{e}_n \quad ,$$

das heißt, die Koordinaten von $\vec{a}$ bezüglich der Standardbasis sind genau die Komponenten von $\vec{a}$.

Merke:



Es gilt stets:

$$\begin{aligned}
&a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2+\ldots+a_n\cdot\vec{e}_n\\
&=a_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+a_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+a_n\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die <u>Komponenten</u> $a_1, \ldots, a_n$ eines Vektors $\vec{a}\in\mathrm{R}^n$ sind genau die <u>Koordinaten</u> von $\vec{a}$ bzgl. der Standardbasis.

Skalarprodukt von Vektoren und Länge eines Vektors

<u>Definition 2.14:</u> Gegeben seien zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit $\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
und $\vec{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Ihr ***Skalarprodukt*** wird folgendermaßen definiert:

$\vec{x}\cdot\vec{y}:=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\ldots+x_n\cdot y_n$ *(in Worten: Multipliziert man* ***zwei Vektoren*** *miteinander, so muss man die einzelnen Komponenten multiplizieren und anschließend addieren und* ***erhält einen Skalar****,* also eine Zahl. *Beim Skalarprodukt handelt es sich um eine Abbildung aus* $\mathbb{R}^n$ *in* $\mathbb{R}$ *.)*

<u>Definition 2.15:</u> Die ***Länge eines Vektors*** $\vec{x}$, auch ***euklidische Norm*** genannt, ist:

$\|\vec{x}\|:=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. *(In Worten: Um die Länge eines Vektors* $\vec{x}$ *zu berechnen, zieht man die Wurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst.)*

<u>Zu Skalarprodukt und Norm</u>

<u>Beachte:</u> Das Skalarprodukt zweier Vektoren liefert stets einen <u>Skalar</u> (also eine reelle Zahl) als Ergebnis.
<u>Sinnlos</u> wäre also z.B. $\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})}_{\text{Zahl}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vektor}}}{\vec{c}}$.

Beispiel: $\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1\\3\\8\end{bmatrix} = 2\cdot(-1)+1\cdot3+5\cdot8 = -2+3+40 = 41$.

Bedeutung: Das Skalarprodukt ermöglicht Aussagen über *Längen* und *Winkel* von Vektoren.

Die euklidische ***Norm*** von $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$$ (siehe Def. 2.15).

Im $\mathbb{R}^2$:

$\left\|\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{a^2+b^2}$ = Länge von $\vec{x}$ nach Pythagoras.

Analog im $\mathbb{R}^3$.

Der Vektor $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\cdot\vec{x}$ hat die Länge 1. Er heißt ***normiert***.

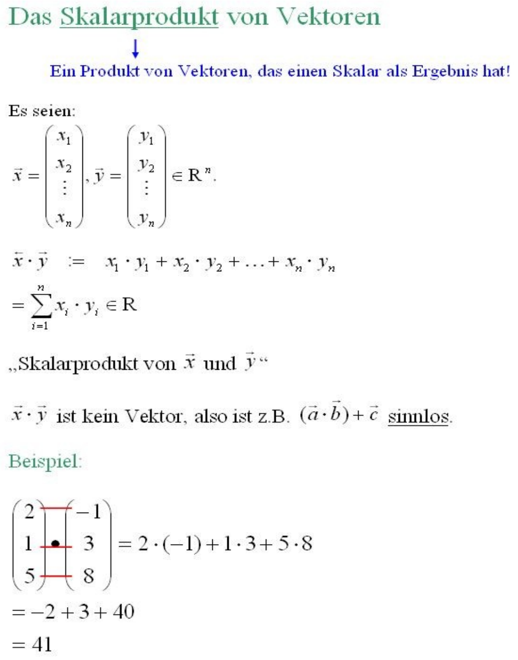
Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ sind genau dann ***senkrecht*** zueinander (***orthogonal***), wenn $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ ist.

Beispiel: $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{in der } xy\text{-Ebene}}}{\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{auf der } z\text{-Achse}}}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}} = 2\cdot0+3\cdot0+0\cdot1 = 0$

Allgemein gilt im $\mathbb{R}^n$ die *Winkelformel* zur Berechnung des von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkels:

$$\sphericalangle(\vec{x},\vec{y}) = \arccos\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \quad .$$

Zusammenfassung:



Das Skalarprodukt von Vektoren

↓

Ein Produkt von Vektoren, das einen Skalar als Ergebnis hat!

Es seien:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} \in \mathrm{R}^n.$

$\vec{x}\cdot\vec{y} := x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \ldots + x_n\cdot y_n$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i \in \mathrm{R}$

„Skalarprodukt von $\vec{x}$ und $\vec{y}$“

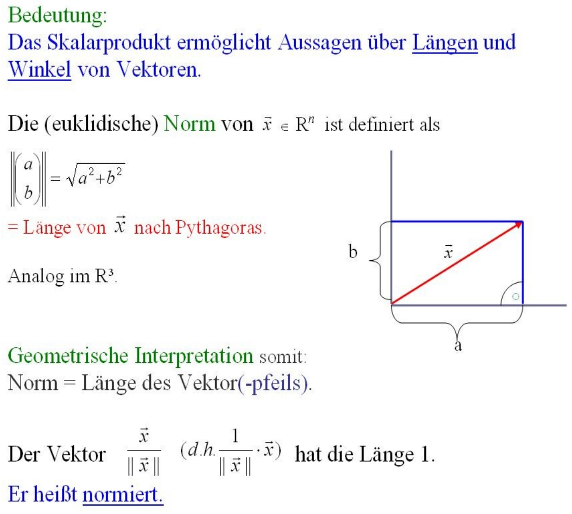
$\vec{x}\cdot\vec{y}$ ist kein Vektor, also ist z.B. $(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{c}$ sinnlos.

Beispiel:

$\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-1\\3\\8\end{pmatrix} = 2\cdot(-1)+1\cdot3+5\cdot8$

$= -2+3+40$

$= 41$



Bedeutung:

Das Skalarprodukt ermöglicht Aussagen über Längen und Winkel von Vektoren.

Die (euklidische) Norm von $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$ ist definiert als

$\left\|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{a^2+b^2}$

= Länge von $\vec{x}$ nach Pythagoras.

Analog im R³.

Geometrische Interpretation somit:

Norm = Länge des Vektor(-pfeils).

Der Vektor $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ $(d.h. \frac{1}{\|\vec{x}\|}\cdot\vec{x})$ hat die Länge 1.

Er heißt normiert.

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ sind genau dann senkrecht zueinander (orthogonal), wenn $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ist.

Bsp.: $$\underset{\overset{\uparrow}{\text{in } xy\text{-Ebene}}}{\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}} \cdot \underset{\overset{\nwarrow}{\text{auf } z\text{-Achse}}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Allgemein gilt im R^n die Winkelformel:

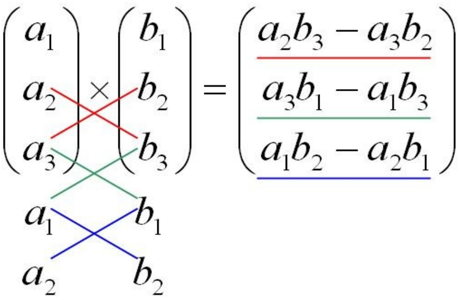
$$\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|}$$

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im $\mathbb{R}^3$

Seien $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Man definiert das Vektor- oder Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ wie folgt als einen neuen Vektor:

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad .$$

Merkregel:



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$, d. h. im Allgemeinen darf man die Faktoren nicht vertauschen;

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \{\vec{a}, \vec{b}\}$ linear abhängig;

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$;

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein „Rechtssystem“ (wie Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand);

$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
= Fläche des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Beachte: Das Vektorprodukt existiert nur im $\mathbb{R}^3$.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Die Abbildung f von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ heißt ***linear***, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

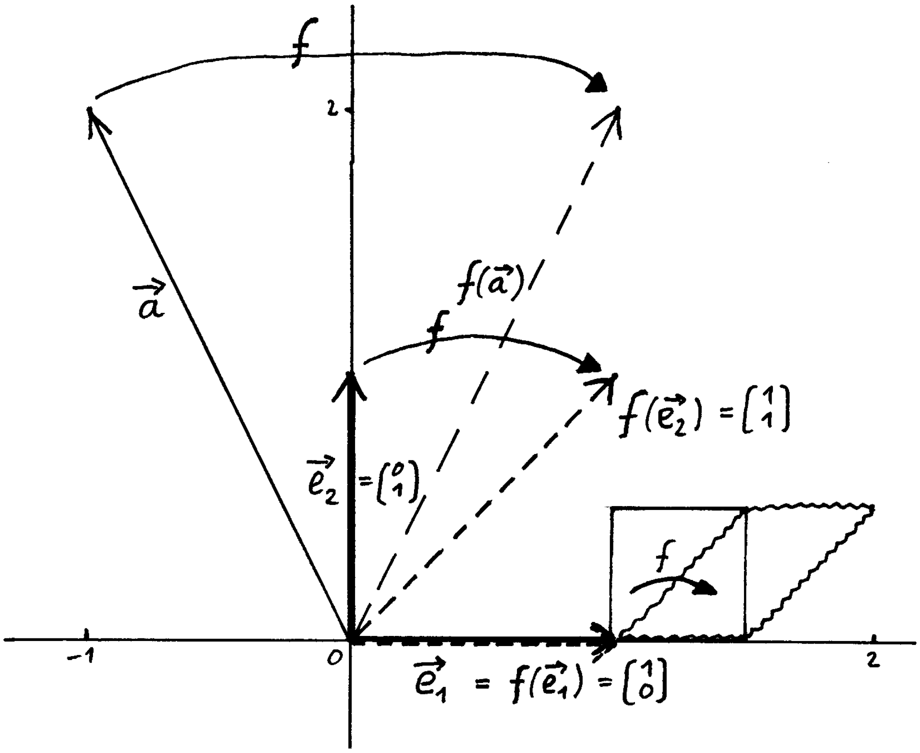
$$(1)\quad f(\vec{a}+\vec{b})=f(\vec{a})+f(\vec{b})\quad \textit{für alle}\quad \vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$$

$$(2)\quad f(\lambda\vec{a})=\lambda f(\vec{a})\quad \textit{für alle}\quad \lambda\in\mathbb{R}\quad \textit{und alle}\quad \vec{a}\in\mathbb{R}^n$$

$f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$ kann auch mit Hilfe von Matrizen beschrieben werden. Die Bewegung von Vektoren im $\mathbb{R}^n$, die die Entwicklung einer Population oder Altersklassenentwicklung beschreibt, wird mit Hilfe von bestimmten Matrizen dargestellt. Die Lösungen linearer Gleichungssysteme, die in praktischen Aufgaben oft vorkommen, lassen sich ebenfalls mit Hilfe von Matrizen bestimmen.

Beispiel 2.10: Scherung entlang der x-Achse

Abbildung 31:



$$f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$$

$$f\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=2\cdot f\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

f ist eine lineare Abbildung, das heißt:
$f(\vec{a}+\vec{b})=f(\vec{a})+f(\vec{b})$ und
$f(c\cdot\vec{a})=c\cdot f(\vec{a})$ sind hier erfüllt.

Für diese Scherung f gilt allgemein: $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$.

Um das Bild $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ eines beliebigen Vektors $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ zu kennen, reicht es, die *Bilder der Vektoren der Standardbasis*, also $f\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $f\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ zu kennen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$$

$$\begin{array}{c} f \text{ linear} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2) = x \cdot f(\vec{e}_1) + y \cdot f(\vec{e}_2) \quad .$$

Hier: $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$ *(stimmt mit der obigen Formel überein).*

Diese Bilder, hier $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, beschreiben f vollständig. Man fasst sie zu einer ***Matrix*** zusammen: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = Matrix von f.

<u>Allgemein</u>: Matrix einer linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Bild von} & \text{Bild von} & & \text{Bild von} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

m Zeilen, *n* Spalten ⇒ „Typ (*m*;*n*)“

alle a_{ij} sind reelle Zahlen.

Anwendung von f auf einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: *Produkt* der <u>Matrix</u> von f mit dem <u>Vektor</u> $\vec{x}$.

Bsp.: $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 1 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$

Allgemein: $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \end{bmatrix}$

<u>Beispiel:</u> $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$

Definition 2.16: Ein System von $m \cdot n$ Zahlen a_{ij}, $i=1,\dots,m$ und $j=1,\dots,n$, geordnet in m Zeilen und n Spalten:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
wird als Matrix vom Typ (m; n) oder als $m \times n$- Matrix *(gesprochen „m Kreuz n“)* definiert. a_{ij} heißt ***Element*** oder ***Eintrag*** der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Die Zahlen a_{ij} heißen Elemente oder ***Komponenten*** der Matrix A. Eine Matrix vom Typ (m; n) hat m Zeilen und n Spalten. Jede Zeile von A ist ein n-dimensionaler Vektor (Zeilenvektor), und jede Spalte von A ist ein m-dimensionaler Spaltenvektor. Die Matrix kann daher als geordnetes System von m n-dimensionalen Zeilenvektoren bzw. von n m-dimensionalen Spaltenvektoren aufgefasst werden.

Die Elemente a_{ii}, $i = 1,\dots, r$, $r = \min(m, n)$, bilden die Hauptdiagonale der Matrix A.

Beispiel 2.11: $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ A ist Matrix vom Typ (3, 4). Sie hat drei Zeilenvektoren

$\vec{z}_1=(1,4,-3,2)$, $\vec{z}_2=(2,3,0,-1)$, $\vec{z}_3=(-3,4,1,1)$ und vier Spaltenvektoren

$$\vec{s}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_2=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_3=\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_4=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Hauptdiagonale wird von den Elementen 1, 3, 1 gebildet.

Gleichheit von Matrizen:

Definition 2.17: Zwei Matrizen $A=(a_{ij})$ und $B=(b_{ij})$ vom gleichen Typ (m, n) sind gleich, wenn für jedes $i = 1,\dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ gilt: $a_{ij}=b_{ij}$.

Quadratische Matrix:

Ist in $A_{(m,\, n)}$ $m = n$, hat die Matrix also genauso viele Zeilen wie Spalten, so heißt *A quadratisch*. Falls $m \neq n$, dann heißt A nicht quadratisch.

Sonderformen:

Vektoren sind Sonderformen von Matrizen mit nur einer Spalte oder Zeile. Jeder Zeilenvektor der Matrix $A_{(m,\, n)}$ ist eine Matrix vom Typ (1; n). Jeder Spaltenvektor ist eine Matrix vom Typ (m; 1). Man kann auch von einer Zeilen- bzw. Spalten-Matrix sprechen. Eine Matrix vom Typ (1; 1) nennt man Punktmatrix. Sie kann als reelle Zahl aufgefasst werden.

Eine quadratische Matrix, deren Elemente außerhalb der Diagonalen alle Null sind, heißt ***Diagonalmatrix***.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

Gilt in einer Diagonalmatrix $a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=a$, so spricht man auch von einer ***Skalarmatrix***. Die Skalarmatrix mit $a = 1$ heißt ***Einheitsmatrix*** und wird mit E bezeichnet:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Die Matrix, deren sämtliche Elemente Null sind, heißt ***Nullmatrix***.

Addition von Matrizen; Multiplikation Zahl · Matrix

Diese Operationen werden wie bei Vektoren definiert, d.h. „komponentenweise".

Bsp.: $$5\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5\cdot 1-1 & 5\cdot 3+0 \\ 5\cdot 0+7 & 5\cdot 2+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$$

Beachte: Nur Matrizen vom gleichen Typ lassen sich addieren.

Ähnlich wie bei den Vektoren ist die Summe der Matrizen

(1) kommutativ: $A + B = B + A$

(2) assoziativ: $(A + B) + C = A + (B + C)$, und es ist

(3) $A + 0 = 0 + A = A$ (es existiert ein neutrales Element, die Nullmatrix.)

Für die Multiplikation von Matrizen mit Skalaren gilt:

$$r\cdot(A+B)=r\cdot A+r\cdot B$$
$$(r+s)\cdot A=r\cdot A+s\cdot A$$
$$(r\cdot s)\cdot A=r\cdot(s\cdot A)$$

Für $r=-1$ ist $(-1)\cdot A=-A$

$A+(-A)=A-A=0$ (Nullmatrix).

Transposition von Matrizen

Definition 2.18: Es sei A eine Matrix vom Typ (m; n). Die Matrix A^T vom Typ (n; m), deren k-te Zeile (k = 1, ... , m) der k-ten Spalte von A entspricht, heißt ***transponierte*** Matrix zur Matrix A. (Vertauschen von Zeilen mit Spalten, bzw. Spiegeln an der Hauptdiagonalen der Matrix.)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Beispiel 2.12:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ vom Typ (3; 2) } \Rightarrow \; A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ vom Typ (2; 3).}$$

Bemerkung: Durch Transposition eines Zeilenvektors (Marix vom Typ (1; m)) entsteht ein Spaltenvektor (Typ (m; 1)), und umgekehrt.

Submatrizen

Eine ***Submatrix*** (Untermatrix) vom Typ ($m-k$; $n-p$) zur Matrix A vom Typ (m; n) erhält man dadurch, dass in A k Zeilen und p Spalten weggelassen werden. Die spezielle Submatrix zu A, die durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, wird mit A_{ij} bezeichnet.

Dreiecksmatrizen

Matrizen, bei denen alle Elemente unterhalb [oberhalb] der Hauptdiagonalen gleich Null sind, heißen *obere* [*untere*] ***Dreiecksmatrizen***.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{bmatrix} \quad \text{obere Dreiecksmatrix.}$$

Rang einer Matrix

Bemerkung: Matrizen stehen in engem Zusammenhang mit linearen Abbildungen, die Vektoren in andere Vektoren umformen. Lineare Abbildungen − und damit auch die zugehörigen Matrizen − lassen sich oft geometrisch deuten. Eigenschaften der linearen Abbildung spiegeln sich in Kenngrößen der zugehörigen Matrix wieder. Eine solche Kenngröße ist der sogenannte ***Rang***.

Er gibt die Dimension des Raumes an, der von allen Bildvektoren unter der Abbildung gebildet wird. Je nachdem, wie groß diese Dimension ist, kann die Abbildung einen sehr unterschiedlichen Charakter annehmen.

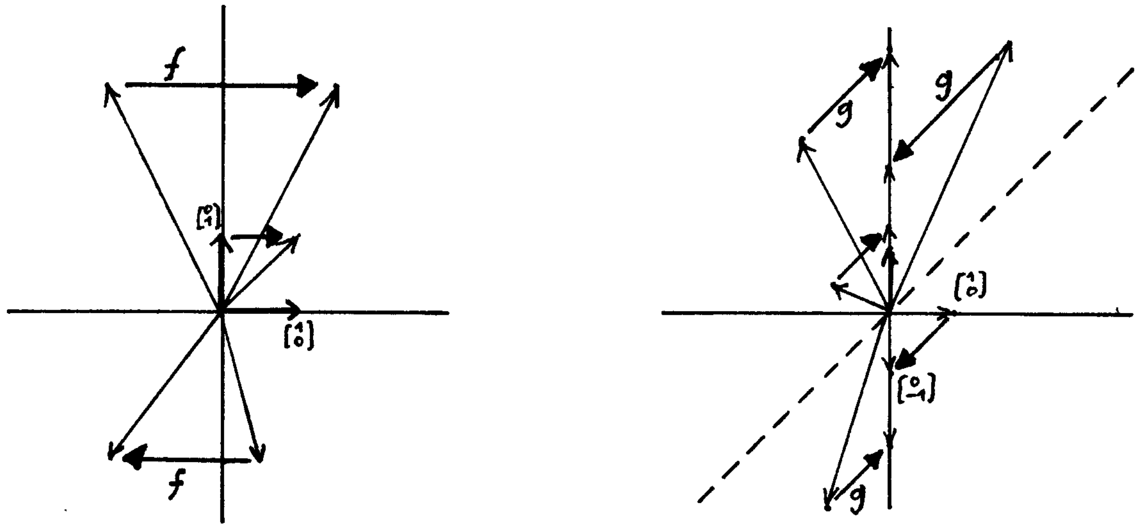
Dies wird an zwei gegensätzlichen Beispielen veranschaulicht:

Zwei Beispiele linearer Abbildungen

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Scherung (vgl. Bsp. 2.10)

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Projektion auf die y-Achse entlang der Hauptdiagonale.

Abbildung 32



$$f\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Matrix von $f: \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

die Bilder $f\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, f\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
(d.h. die Spaltenvektoren der Matrix von f)
sind linear unabhängig,
sie spannen die ganze Ebene $\mathbb{R}^2$ auf

$\Rightarrow$ jeder Vektor tritt als Bild auf
(f ist surjektiv)
Rang (f) = 2
(= Dimension der Ebene)

$$g\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Matrix von $g: \begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$

die Bilder $g\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, g\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
(d.h. die Spaltenvektoren der Matrix von g)
sind linear abhängig,
sie liegen auf derselben Geraden durch 0
(auf der y-Achse)
$\Rightarrow$ nur die y-Achse ist Bildbereich
(g ist nicht surjektiv)
Rang (g) = 1
(= Dimension der Geraden)

Definition 2.19: Der ***Rang*** einer Matrix A ist die maximale Zahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren von A. Bezeichnung: $r(A)$.

Es gilt: $r(A)$ ist zugleich auch die maximale Zahl der linear unabhängigen *Zeilenvektoren* von A.
(„Spaltenrang = Zeilenrang")
$r(A)$ = Rang des Systems der Spaltenvektoren von A.
= Dimension des Bildbereichs der zugehörigen linearen Abbildung (siehe obiges Bsp.)

Bemerkung: Der Rang einer Nullmatrix ist 0 (kleinstmöglicher Rang).
Der Rang einer $n\times n$-Einheitsmatrix ist n (größtmöglicher Rang für eine $n\times n$-Matrix).
Ist A vom Typ $(m; n)$, so gilt:

$$0 \leq r(A) \leq \min(m; n).$$

Es gibt eine Reihe von Operationen an Matrizen, die den Rang jeder Matrix unverändert (invariant) lassen:

Elementare Operationen

Der Rang einer Matrix bleibt erhalten

(1) nach Änderung der Reihenfolge der Zeilen (oder der Spalten),
(2) nach Multiplikation einer beliebigen Zeile (Spalte) mit einer Zahl $c \neq 0$,
(3) nach Hinzufügen oder Weglassen einer Zeile (Spalte), welche eine Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten) ist,
(4) wenn zu einer Zeile (Spalte) eine Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten) addiert wird.

Beispiel zu (4):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Zur Zeile $\vec{z}_3$ von A wird die Linearkombination $(-1)\cdot\vec{z}_1+3\cdot\vec{z}_2$ addiert:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die erste und zweite Zeile von A' sind offensichtlich linear unabhängig, die dritte Zeile (Nullzeile) ist linear abhängig. Somit:

$r(A) = r(A') = 2$

(Methode der Rangbestimmung durch elementare Operationen)

Satz: Jede Matrix lässt sich mit Hilfe elementarer Operationen in eine obere Dreiecksmatrix umformen.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A wird mit elementaren Operationen auf Dreiecksgestalt gebracht:

1. Vertauschen der ersten und der dritten Zeile (Operation (1)) liefert:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Das (-2)-fache der ersten Zeile wird zur dritten Zeile addiert (Operation (4)):

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Das 3-fache der zweiten Zeile wird zur dritten addiert (Op. (4)), es entsteht eine Dreiecksmatrix:

$$A''' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Satz: Der Rang einer oberen Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\neq 0$ ist die Anzahl ihrer von $\vec{0}$ verschiedenen Zeilen.

Beachte:

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \quad \text{(obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen} \neq 0\text{)}$$

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

(Diagonaleintrag 0; ziehe 2. Zeile von dritter Zeile ab)

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

(Diagonaleintrag 0; Vertauschen der letzten beiden Spalten liefert Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\neq 0$)

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \qquad \text{(eine Nullzeile)}$$

Beispiel zur Rangbestimmung:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 11 & 1 \\ -4 & -14 & 1 \end{bmatrix} \quad , \qquad r(A) = ?$$

Wir wenden elementare Zeilenoperationen an und schreiben die entstehenden Matrizen (ohne die Klammern) untereinander.
Vorgehensweise: Es werden zuerst Nullen in der ersten Spalte, unterhalb der ersten Zeile erzeugt. Dann Nullen in der zweiten Spalte, unterhalb der zweiten Zeile, usw., bis eine obere Dreiecksmatrix entstanden ist.

$$\begin{array}{rrrl}
2 & 6 & -4 & :2 \\
3 & 11 & 1 & \\
-4 & -14 & 1 & \\
\hline
1 & 3 & -2 & \cdot 3 \quad \cdot 4 \\
3 & 11 & 1 & - \\
-4 & -14 & 1 & \quad\;\; + \\
\hline
1 & 3 & -2 & \\
0 & 2 & 7 & \\
0 & -2 & -7 & + \\
\hline
1 & 3 & -2 & \\
0 & 2 & 7 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Dreiecksform, eine Nullzeile, zwei Diagonaleinträge $\neq 0 \Rightarrow$ der Rang dieser Matrix (und damit auch der Rang der Ausgangsmatrix) ist 2. (Das Verfahren kann in leicht abgewandelter Form später auch zum Lösen linearer Gleichungssysteme, zur Berechnung von Determinanten und zum Invertieren von Matrizen verwendet werden.)

Determinanten

Es sei A eine quadratische Matrix (also vom Typ $(n;\, n)$). Die ***Determinante*** von A, kurz $|A|$ oder det A, ist eine reelle Zahl, die nach gewissen Rechenregeln (siehe später) aus den Einträgen von A berechnet wird.

Schreibweise: $\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$ Matrix, $\begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$ Determinante.

In den Spezialfällen $n = 2$ und $n = 3$ lauten die Berechnungsformeln:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

Symbolische Bezeichnung für die Determinante:

$$det\, A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die Determinante einer Matrix vom Typ $(n;\, n)$ heißt Determinante n-ter Ordnung. Nur quadratischen Matrizen sind Determinanten zugeordnet. Die symbolische Schreibweise der Determinanten verläuft nach dem gleichen Schema wie die der Matrizen. Bei der Beschreibung von Teilen der Determinante werden die bei den Matrizen eingeführten Begriffe benutzt.

Subdeterminante / Minor

Gegeben sei die Determinante $|A|$. Durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Determinante $|A|$ erhalten wir eine ***Subdeterminante*** der Ordnung $n-1$.

Symbol: $|A_{ij}|$

Die reelle Zahl $|D_{ij}|=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ nennt man Minor (Adjunkte, algebraisches Komplement) zum Element a_{ij} in der Determinante $|A|$.

Man beachte in dieser Formel den Ausdruck $(-1)^{i+j}$, da dieser das Vorzeichen der Subdeterminante bestimmt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \end{vmatrix}$$

Berechnung der Determinante mit dem „Entwicklungssatz“

Zur Berechnung der Determinante kann folgende Berechnungsweise angewandt werden:

a) $|A|=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}|D_{ij}|=\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}|A_{ij}|$ für feste j-te Spalte.

b) $|A|=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}|D_{ij}|=\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}|A_{ij}|$ für feste i-te Zeile.

Man sagt, die Determinante wird nach einer beliebigen i-ten Zeile oder nach einer beliebigen j-ten Spalte *entwickelt*. In den Summen befinden sich die zu diesen Zeilen gehörenden Subdeterminanten (Minoren), welche um eine Ordnung niedriger als $|A|$ sind. Somit lässt sich eine „große“ Determinante auf „kleinere“ (d.h. niedrigerer Ordnung) zurückführen.

Beispiel 2.13: $n = 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\,a_{13} \\ a_{21}\,a_{22}\,a_{23} \\ a_{31}\,a_{32}\,a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Die Determinante wurde hier nach der 1. Zeile entwickelt und damit auf die bereits bekannten Determinanten zweiter Ordnung zurückgeführt.
Die Rechenregel für $n = 2$ wird „ Kreuzregel“ genannt, für $n = 3$ gilt die „Sarrus'sche Regel“:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Die Berechnung einer Determinante vierter Ordnung wird durch Entwicklung auf Determinanten dritter Ordnung zurückgeführt. Vorteilhaft ist es, nach solchen Spalten oder Zeilen zu entwickeln, die die meisten Nullen enthalten, da man dann weniger Determinanten zu berechnen braucht.

Beispiel 2.14:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3+8+0-21-0-24 = -34 \quad .$$

Rechenregeln:

Es gibt eine Reihe von Operationen, die die Determinante unverändert lassen oder sie auf einfache Weise verändern, und mit denen man die Berechnung der Determinante vereinfachen kann:

1. Werden in der Determinante zwei Zeilen oder Spalten vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
2. Sind in einer Determinante wenigstens zwei Zeilen (Spalten) gleich, so ist die Determinante gleich Null.
3. Enthält die Determinante eine Nullzeile (Nullspalte), so ist sie gleich Null.
4. Multipliziert man in der Determinante eine Zeile (Spalte) mit einer Zahl $k \neq 0$, so erhält man die k-fache Determinante. (Man kann den gemeinsamen Teiler einer Zeile oder Spalte vor die Determinante ausklammern.)
5. Ist eine Zeile (Spalte) der Determinante Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten), so ist die Determinante gleich Null.
6. Ist die Determinante gleich Null, so ist mindestens eine ihrer Zeilen (Spalten) eine Linearkombination von übrigen Zeilen (Spalten).
7. Die Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile (Spalte) eine Linearkombination von übrigen Zeilen (Spalten) addiert wird.
8. Wenn die Elemente irgendeiner Zeile (Spalte) die Summen zweier oder mehrerer Zahlen sind, so lässt sich die Determinante in die Summe zweier oder mehrerer Determinanten zerlegen, die in der zugehörigen Zeile (Spalte) einzelne Summanden haben: $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

9. Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Hauptdiagonal-Elemente.
10. Die Determinante verändert sich nicht beim Transponieren: $|A| = |A^T|$.

Anwendung der Eigenschaften bei der Berechnung von Determinanten

Beispiel 2.15: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Da für die Zeilenvektoren z_i gilt: $\vec{z}_3 = 2\,\vec{z}_1 + 2\,\vec{z}_2$

$\Rightarrow \quad |A| = 0$.

Beispiel 2.16: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 9 & 15 & 21 & 36 \\ 2 & 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 3 wird aus 3. Zeile ausgeklammert

$\Rightarrow \quad |A| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 12 \\ 2 & 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ Da $\vec{z}_3 = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \quad \Rightarrow \quad |A| = 0$.

Beispiel 2.17:

Berechnung der Determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & -4 \\ 0 & -9 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & -4 \\ 0 & -9 & 3 & 6 \\ 0 & -8 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Folgende Umformungen wurden durchgeführt:
- Die 1. und 2. Spalte wurden vertauscht.
- Die 1. Zeile wurde von der 2. abgezogen.
- Von der 3. Zeile wurde das Doppelte der 1. abgezogen.

Nun kann die Determinante durch Entwickeln nach der 1. Spalte optimal berechnet werden:

$$|A| = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & -4 \\ 0 & -9 & 3 & 6 \\ 0 & -8 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -9 & 3 & 6 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-3) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -30$$

Satz von Jacobi

Wenn in r Zeilen (Spalten) in einer Determinante n-ter Ordnung insgesamt $(n-r)$ Spalten mit Nullen besetzt sind, reduziert sich die Determinante auf das Produkt von Determinanten r-ter und n-ter Ordnung.

Beispiel 2.18:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3+1-6+1) = 7$$

Reguläre / singuläre Matrizen

Gegeben sei $A_{(n,n)}$. Die Matrix A heißt ***regulär***, wenn ihre Determinante $|A|$ ungleich Null ist. Ist $|A|=0$, dann heißt A ***singuläre*** Matrix.

Satz: Eine $n\times n$-Matrix A ist genau dann regulär (d.h. also det $A \neq 0$), wenn r(A) = n (maximal möglicher Rang). (A singulär genau dann, wenn r(A) < n.)

Zusammenfassung:

Berechnung von Determinanten vom Format $n\times n$:

- wenn $n = 2$: Kreuzregel $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- wenn $n = 3$: Regel von Sarrus
- stets möglich: Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte (möglichst eine mit vielen Nullen)

  oder:
- elementare Umformungen (Regeln 1,4,7) → Dreiecksgestalt (dann Regel 9 anwenden: Produkt der Hauptdiagonalen)

Geometrische Bedeutung der Determinante

Im $\mathbb{R}^2$: Bis auf das Vorzeichen ist $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ der *Flächeninhalt* des von den Spaltenvektoren $\vec{a}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ aufgespannten *Parallelogramms*.

$$F=|det(\vec{a},\vec{b})|=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}| \quad .$$

Im $\mathbb{R}^3$: Bis auf das Vorzeichen ist $det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ das *Volumen* des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten *Spats* (Parallelepipeds).

Matrizenrechnung

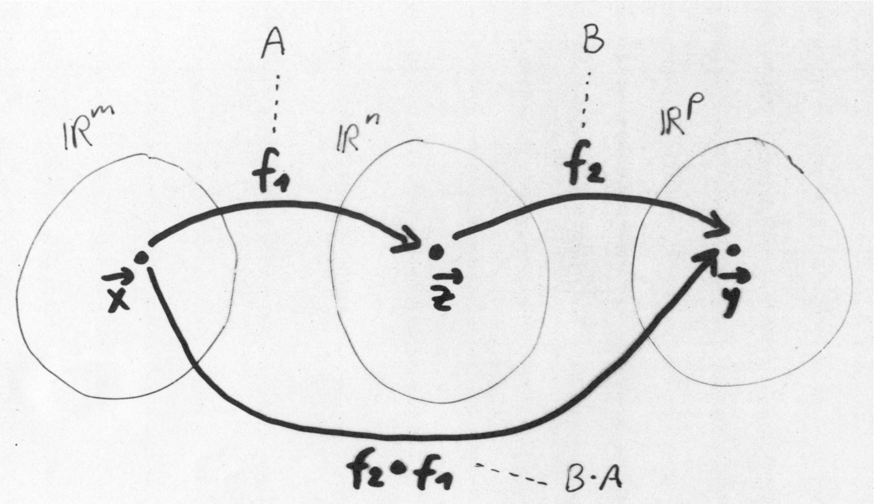
Nacheinanderausführung (Verkettung) von linearen Abbildungen

$f_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei beschrieben durch die Matrix *A*.

$f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sei beschrieben durch die Matrix *B*.

Wir schalten nun beide Abbildungen hintereinander und erhalten so eine neue Abbildung $f_2 \circ f_1$ (erst f_1, dann f_2, beachte die Schreibweise von rechts nach links) von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^p$, die ***Verkettung*** von f_1 und f_2 :

Abbildung 33

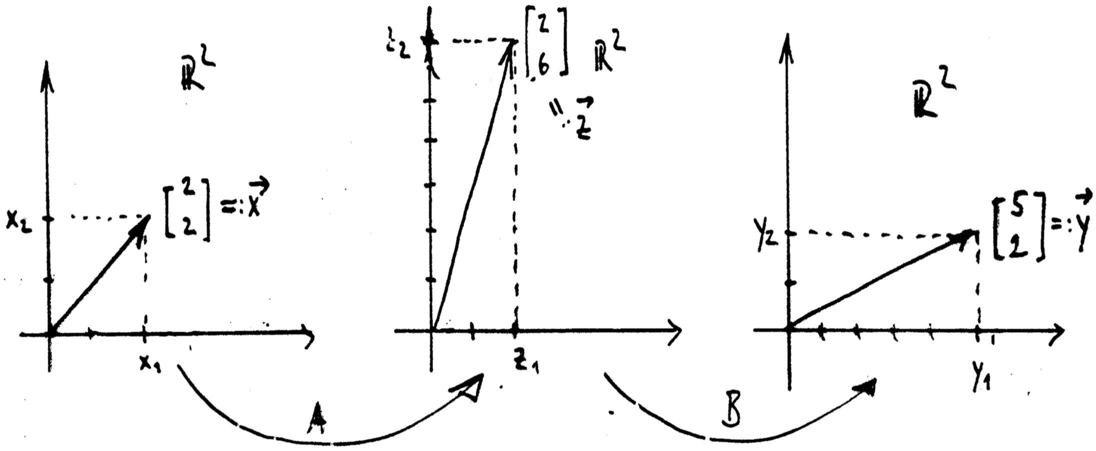


$f_2 \circ f_1$: $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ hat eine zugehörige Matrix *C* vom Typ (*p*; *m*). Diese nennt man das *Produkt* von *B* und *A*: $B_{(p,n)} \cdot A_{(n,m)} = C_{(p,m)}$.

Beispiel:

Sei $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Abgebildet werden soll der Vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Abbildung 34



Es gilt:

$$\vec{z} := A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{y} := B \cdot \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \underbrace{B \cdot A}_{C} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Die einzelnen Komponenten berechnen sich also wie folgt:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ z_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 &= b_{11} \cdot z_1 + b_{12} \cdot z_2 \\ y_2 &= b_{21} \cdot z_1 + b_{22} \cdot z_2 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11} \cdot (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2) + b_{12} \cdot (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2) \\ y_2 &= b_{21} \cdot (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2) + b_{22} \cdot (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2) \end{aligned}$$

Durch Umsortieren erhält man daraus die Komponenten der Matrix *C*:

$$\begin{aligned} y_1 &= \overset{c_{11}}{(b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21})} \cdot x_1 + \overset{c_{12}}{(b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22})} \cdot x_2 \\ y_2 &= \underset{c_{21}}{(b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21})} \cdot x_1 + \underset{c_{22}}{(b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22})} \cdot x_2 \end{aligned}$$

$$\vec{y} = B \cdot A \cdot \vec{x} = C \cdot \vec{x}$$

Also: $$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} & b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} \\ b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} & b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} \end{bmatrix}$$

Das Produkt zweier Matrizen wird berechnet, indem alle möglichen Skalarprodukte „Zeile der ersten Matrix · Spalte der zweiten Matrix“ ausgerechnet und in die Ergebnismatrix eingetragen werden. Das Produkt existiert nur dann, wenn die erste Matrix soviele Spalten hat wie die zweite Matrix Zeilen.

Definition 2.20: Das Produkt von zwei multiplizierbaren Matrizen $A_{(m,\,n)}$ und $B_{(n,\,p)}$ ist eine Matrix *C* vom Typ $(m;\, p)$ mit den Elementen $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\,;\, i = 1, \ldots, m\,;\, j = 1, \ldots., p$.

Symbolisch: $C = A \cdot B$

Es seien: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ und $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ $C_{(2,2)} = A_{(2,2)} \cdot B_{(2,2)}$

Dann ist: $C=\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

Man sagt, dass die Matrix B von links mit A oder die Matrix A von rechts mit B multipliziert wird.

Eigenschaften des Matrixproduktes

(1) $(AB)\,C = A\,(BC)$ *(Assoziativität)*
(2) im Allgemeinen ist $AB \neq BA$ *(<u>nicht</u> kommutativ − mit Ausnahmen)*
(3) $0A = A0 = 0$; $AE = EA = A$ *(falls Multiplizierbarkeit gegeben)*
(4) $(A + B)C = AC + BC$; $C(A + B) = CA + CB$ *(Distributivität)*

Aus $A \cdot B = 0$ lässt sich bei Matrizen − anders als bei Zahlen − nicht folgern, dass $A = 0$ oder $B = 0$ gelten muss, da die Nullmatrix z.B. auch aus dem folgenden Produkt resultieren kann:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Beispiel 2.18:</u>

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\ ,\quad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ ,\quad C = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{3} \\ \frac{9}{3} & \frac{4}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad \text{und}\quad r=-\frac{1}{2}\ .$$

Es gilt: $B = C$; $A \neq B$; $A \neq C$. A und B sind nicht vom gleichen Typ.
Die Summen (Differenzen) $A + B$, $A - B$, $A + C$, $A - C$ existieren nicht.

$$B+C=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\ ;\quad B-C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Multiplikation mit einer Zahl: $r\cdot A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $r\cdot B=\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Produkt von Matrizen: A und B sind multiplizierbar, da $A_{(3,3)}$ und $B_{(3,2)}$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & -1 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} = A \cdot C$$, $B \cdot A$ existiert nicht, da $B_{(3,2)}$ und $A_{(3,3)}$.

$C \cdot A$ existiert nicht, da $C_{(3,2)}$ und $A_{(3,3)}$.
$C \cdot B$ und $B \cdot C$ existieren nicht, da $B_{(3,2)}$ und $C_{(3,2)}$.

Definition 2.21: Gilt für eine quadratische Matrix $A = A^T$ (also $a_{ik} = a_{ki}$), so heißt A *symmetrisch.* Die Hauptdiagonale ist die Symmetrieachse.

Transposition des Produktes von Matrizen

Für die Transposition des Produktes von Matrizen $A_{(m,\ n)}$ und $B_{(n,\ p)}$ gilt $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (Man beachte die Vertauschung!)

A und A^T sind multiplizierbar. Das Produkt $A \cdot A^T$ ist eine symmetrische Matrix (sogenanntes Gramsches Produkt), da nach obiger Bemerkung gilt: $(A^T \cdot A)^T = A^T \cdot A^{TT} = A^T \cdot A$.

Beispiel 2.20: Gegeben: $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}$; $X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$

Gesucht: $$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{1=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}$$

Operationen mit Submatrizen

Werden Matrizen in Submatrizen aufgeteilt, so gelten ***für die aufgeteilten Matrizen die gleichen Operationen***. Sobald diese Operationen erlaubt sind, werden sie statt mit Elementen mit Submatrizen ausgeführt.

Produkt einer Matrix mit einem Vektor

Eine spezielle Form des Matrizenproduktes ist das Produkt einer Matrix $A_{(m,n)}$ mit einem (n; 1)-Spaltenvektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$. Als Ergebnis erhält man einen (m; 1)-Spaltenvektor $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \ ; \ A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

z.B.: $y_1 = (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n)$

Symbolisch: $A \cdot \vec{x} = \vec{y}\,;\qquad A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Anwendungsbeispiel Walddynamik

Die Altersstruktur eines Waldes zum Zeitpunkt *t* wird beschrieben durch den Altersklassenvektor:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{r} \text{Fläche mit Bäumen der 1. Altersklasse} \\ \text{der 2. Altersklasse} \\ \vdots \\ \text{der n. Altersklasse} \end{array}$$

$\vec{a}_t \in \mathbb{R}^n$ (*n* = Anzahl der aufeinanderfolgenden Altersklassen)

Zeitliche Fortschreibung: lineare Abbildung: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Es sei $p_{j,k}$ der Anteil der Fläche der *j*-ten Altersklasse, der in die *k*-te Altersklasse übergeht.

z.B.: $p_{3,4} = 0{,}7$

$p_{3,1} = 0{,}3$, d.h. 30% des Bestandes der Altersklasse 3 werden gefällt und die Flächen sofort neu aufgeforstet (→ Altersklasse 1)

$p_{3,k} = 0$ für alle übrigen *k*.

$$P := \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{„Altersklassen-Übergangs-Matrix“}$$

Dann gilt: $\vec{a}_{t+1} = P^T \cdot \vec{a}_t$

also im Falle *n* = 3: $\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,1} a_1 + p_{2,1} a_2 + p_{3,1} a_3 \\ p_{1,2} a_1 + p_{2,2} a_2 + p_{3,2} a_3 \\ p_{1,3} a_1 + p_{2,3} a_2 + p_{3,3} a_3 \end{bmatrix}$

Da Bäume in ihrem Alterungsprozess weder innehalten, noch Altersklassen überspringen oder jünger werden können, gilt:

$p_{i,i} = 0$

$p_{i,j} = 0$ für $j > i+1$ und für $j < i$, $j \neq 1$.

Somit vereinfacht sich der dreidimensionale Fall zu:

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \\ p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & p_{2,3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,1} a_1 + p_{2,1} a_2 + p_{3,1} a_3 \\ p_{1,2} a_1 \\ p_{2,3} a_2 \end{bmatrix} .$$

P beschreibt eine Durchforstungsstrategie.

Wird zwischen Zeitpunkt t und $t+1$ die Strategie *P* angewandt
und zwischen Zeitpunkt $t+1$ und $t+2$ die Strategie *Q*,
so ergibt sich insgesamt:

$$\vec{a}_{t+2} = Q^T \cdot \vec{a}_{t+1} = Q^T \cdot (P^T \cdot \vec{a}_t) = (Q^T \cdot P^T) \cdot \vec{a}_t = (P \cdot Q)^T \cdot \vec{a}_t$$

Das Matrizenprodukt *P* · *Q* entspricht der Nacheinanderanwendung der Durchforstungsstrategien.

Ist die Strategie in jedem Zeitschritt gleich, so gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a}_t &= P^T \cdot \vec{a}_{t-1} \\ &= P^T \cdot P^T \cdot \vec{a}_{t-2} \\ &= P^T \cdot P^T \cdot P^T \cdot \vec{a}_{t-3} \\ &= \dots \\ &= (P^T)^t \cdot \vec{a}_0 \end{aligned}$$

(Beachte: T: Transposition; t: Potenz der Matrix P^T, d. h. t-faches Produkt mit sich selbst)

Konvergenz auf eine stabile Altersklassenverteilung würde heißen:

$$\lim_{t \to \infty} (P^T)^t \cdot \vec{a}_0 = \vec{a}$$ (dazu später mehr).

Das Produkt einer Matrix mit einem Spaltenvektor stellt eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ dar; ihre Eigenschaften (Injektivität, Surjektivität, etc.) bestimmt die Matrix A. Wenn $\vec{y}$ gegeben ist, stellt das Produkt ein lineares Gleichungssystem von m Gleichungen (Zeilen) mit n Unbekannten x_i (den Spalten zugeordnet) dar.

Wenn es genauso viele Zeilen wie Spalten gibt ($m = n$) und $|A| \neq 0$, so ist $r(A) = m$, und das Produkt stellt eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in sich dar. Erst dann existiert auch die *inverse Abbildung* mit der zugehörigen Matrix A^{-1} mit $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$. Im Weiteren wird nach A^{-1} gesucht.

Inverse Matrix

Definition 2.22: Eine Matrix B heißt ***inverse Matrix*** zu einer Matrix A, wenn gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A = E \quad .$$

Symbolisch: $B = A^{-1}$; $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

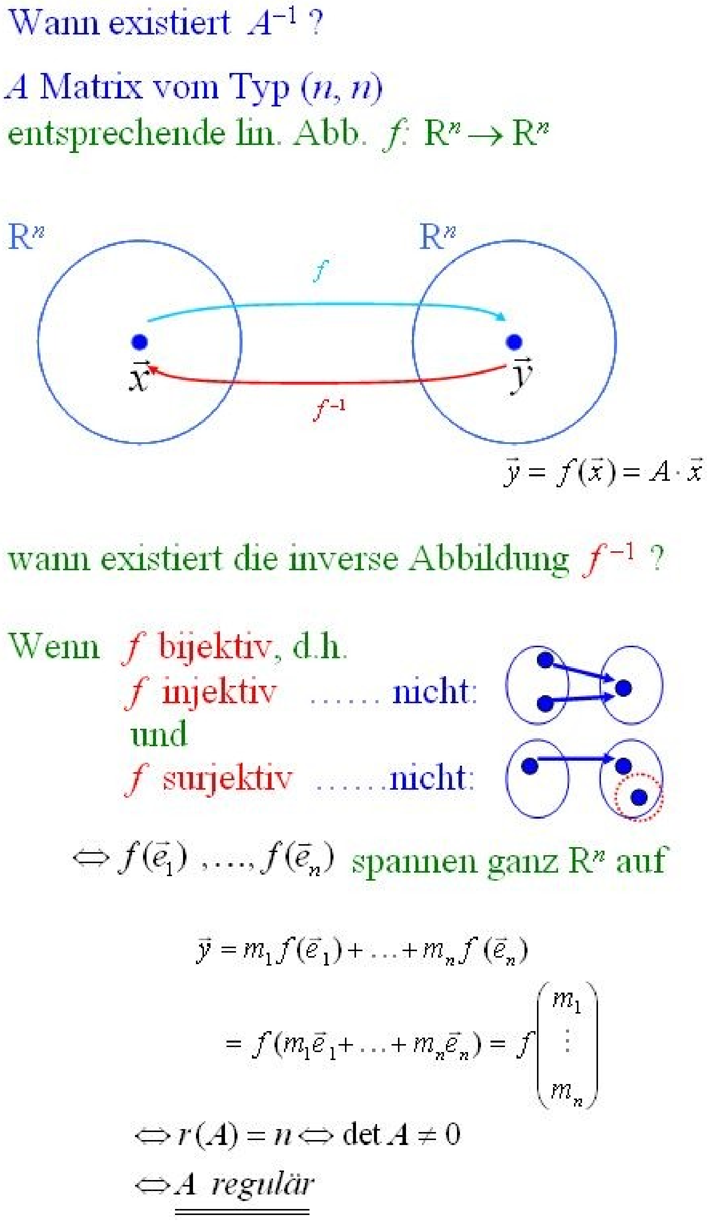
Damit die inverse Matrix zu A existiert, muss insbesondere A eine quadratische Matrix sein (also genauso viele Zeilen wie Spalten haben).

Aus Definition 2.22 folgt: Falls B inverse Matrix zu A ist, ist auch A inverse Matrix zu B, d.h.

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad .$$

Aus dem Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen folgt:

Für die Existenz von A^{-1} ist notwendig und hinreichend, dass A *regulär* ist $(|A| \neq 0)$.



Wann existiert A^{-1} ?

A Matrix vom Typ (n, n)
entsprechende lin. Abb. f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\vec{y} = f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$

wann existiert die inverse Abbildung f^{-1} ?

Wenn f bijektiv, d.h.
f injektiv …… nicht:
und
f surjektiv ……nicht:

$\Leftrightarrow f(\vec{e}_1)$,…, $f(\vec{e}_n)$ spannen ganz $\mathbb{R}^n$ auf

$$\vec{y} = m_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + m_n f(\vec{e}_n)$$

$$= f(m_1\vec{e}_1 + \ldots + m_n\vec{e}_n) = f\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\Leftrightarrow A$ *regulär*

Adjungierte Matrix

Ersetzt man in einer Matrix A jedes Element a_{ij} durch $|D_{ij}|$ (d.h. durch den zu a_{ij} gehörenden Minor (Adjunkt)) und transponiert man die Matrix, so erhält man die sogenannte *adjungierte Matrix* zu A (Vorzeichen beachten!).

Symbolisch: $A_{ad} = \begin{bmatrix} |D_{11}| & |D_{21}| & \ldots & |D_{n1}| \\ |D_{12}| & |D_{22}| & \ldots & |D_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ |D_{1n}| & |D_{2n}| & \cdots & |D_{nn}| \end{bmatrix}$

Der Sinn der Einführung von A_{ad} ergibt sich aus:

$$A\cdot A_{ad}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} |D_{11}| & |D_{21}| & \dots & |D_{n1}| \\ |D_{12}| & |D_{22}| & \dots & |D_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ |D_{1n}| & |D_{2n}| & \cdots & |D_{nn}| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A| & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A \cdot \frac{1}{|A|} A_{ad} = E$$

Zusammenfassung der Schritte:

$$A \rightarrow A_{ad} \rightarrow A \cdot A_{ad} = \text{Skalarmatrix} \rightarrow \frac{1}{|A|} \cdot A \cdot A_{ad} = E \text{ , somit:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{ad} \quad \text{(Berechnungsformel für } A^{-1}\text{).}$$

<u>**Beispiel 2.21:**</u> Gegeben ist: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, gesucht wird A^{-1} . $|A|=1 \rightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kontrolle: } A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zur Berechnung von A^{-1} ist die Formel bei größeren Matrizen meist zu aufwändig. Es lässt sich aber vorteilhaft obige Bemerkung heranziehen, die besagt, dass für aufgeteilte Matrizen die gleichen Operationen gelten: Zur quadratischen Matrix $A_{(n,\, n)}$ fügen wir eine (n, n)-Einheitsmatrix wie folgt ein:

$$M = [\, A \mid E \,] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & \dots & 1 \end{array}\right]$$

Multiplizieren wir M mit A^{-1} von links, ergibt sich: $A^{-1} \cdot M = [A^{-1} \cdot A \mid A^{-1} \cdot E] = [E \mid A^{-1}]$.

Nach dem Vergleich von $[A \mid E]$ mit $[E \mid A^{-1}]$ ist ersichtlich, dass nach Umformung von M mit elementaren Operationen die Submatrix aus den ersten n Spalten in die Einheitsmatrix und schließlich die Submatrix aus den letzten n Spalten in die Inverse A^{-1} übergeht.

Beispiel 2.22: Gesucht wird A^{-1} zur Matrix A nach obigem Schema: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Das Schema ist $\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ mit $\vec{z}_2 - 3\vec{z}_1$ und $\vec{z}_3 - 3\vec{z}_2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Weitere Anwendungen der Matrizenrechnung

Koordinatentransformation

Es seien U und V jeweils eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

$$U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$$
$$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \quad .$$

Die *Matrix des Basiswechsels von U nach V* enthält in ihren Spalten die Koordinaten der Basisvektoren aus U bezüglich der neuen Basis V.

$$M(V \leftarrow U) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} , \qquad \begin{matrix} \vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + \dots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vdots \\ \vec{u}_n = a_{1n}\vec{v}_1 + \dots + a_{nn}\vec{v}_n \end{matrix}$$

Beispiel: U = Standardbasis = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$$V = \{\vec{a}, \vec{b}\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$M(V \leftarrow U) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{, da } \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-2}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ,$$

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Dann gilt:

1. Die Koordinaten eines Vektors $\vec{x}$ bezüglich der neuen Basis V ergeben sich aus denen bezüglich U gemäß:

$$(\vec{x})_V = M(V \leftarrow U) \cdot (\vec{x})_U$$

Beispiel: $\vec{x}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = (\vec{x})_U \quad (U = \text{Standardbasis}),$

$$(\vec{x})_V = \begin{bmatrix}\frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \leftarrow \text{neue Koordinaten von } \vec{x}$$

2. Die Matrix des umgekehrten Basiswechsels ist:

$$M(U \leftarrow V) = M(V \leftarrow U)^{-1}$$

Beispiel: $\begin{bmatrix}\frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$\uparrow \quad \uparrow$

. Koordinaten von $\vec{a}, \vec{b}$ bezüglich Standardbasis U.

3. Die Hintereinanderschaltung zweier Koordinatentransformationen verläuft gemäß:

$$M(W \leftarrow U) = M(W \leftarrow V) \cdot M(V \leftarrow U)$$

(Matrizenprodukt)

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition 2.23: Das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$; $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$; A vom Typ (m; n), komponentenweise aufgeschrieben:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\vdots \qquad\qquad\qquad &\quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

heißt System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Die Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ heißen die ***Koeffizienten*** des Systems.
Die Zahlen $b_i \in \mathbb{R}$ heißen absolute Glieder (zusammen: *rechte Seite*) des Systems.
Ist $b_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$, so heißt das Gleichungssystem ***homogen;***
gibt es mindestens ein $b_i \neq 0$, dann heißt es ***inhomogen*** (nicht homogen).

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ Koeffizientenmatrix,

$$A_{erw}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$ heißt die ***erweiterte Matrix*** des Systems.

Die Symbole x_i heißen *Unbekannte* des Systems.

Definition 2.24: Ein geordnetes *n*-Tupel $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_i \in \mathbb{R}$, heißt ***Lösung des Systems***, wenn es nach Einsetzen für $\vec{x}$ das Gleichungssystem erfüllt. Hat das System mindestens eine Lösung, heißt es lösbares System ***(konsistentes Gleichungs system)***, andernfalls heißt es unlösbares Gleichungssystem ***(inkonsistentes GS)***. Zwei Gleichungssysteme, die die gleiche Lösung besitzen, heißen ***äquivalent***.

Obiges Gleichungssystem zu lösen, heißt, *alle* Lösungen (die *allgemeine Lösung*) dieses Systems zu bestimmen. Für jedes lineare Gleichungssystem trifft genau einer der folgenden drei Fälle zu:

(1) das System hat genau eine Lösung,
(2) das System hat unendlich viele Lösungen,
(3) das System hat keine Lösung.

Beispiel 2.23: Das LGS $\left\{\begin{matrix} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+x_2=7 \end{matrix}\right\}$ hat genau eine Lösung: $\vec{x}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, also $x_1=2$, $x_2=3$: es gilt 2 + 3 = 5, $2 \cdot 2 + 3 = 7$, es gibt keine weiteren Zahlenkombinationen, die beide Gleichungen zugleich erfüllen.

Beispiel 2.24: Das LGS $\left\{\begin{matrix} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+2x_2=7 \end{matrix}\right\}$ hat keine Lösung: Die beiden Gleichungen widersprechen sich, sind „inkonsistent".

Beispiel 2.25: Das LGS $\left\{\begin{matrix} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+2x_2=10 \end{matrix}\right\}$ hat unendlich viele Lösungen, die alle von der Gestalt $\vec{x}=\begin{bmatrix} 5-a \\ a \end{bmatrix}$ sind ($a \in \mathbb{R}$), d.h. $x_1=5-a$ und $x_2=a$.

Satz von Frobenius:

Das System $A \cdot \vec{x}=\vec{b}$ von *m* Gleichungen mit *n* Unbekannten ***hat genau dann Lösungen, wenn der Rang der Matrix A und der Rang der erweiterten Matrix*** A_{erw} ***gleich sind***:

$r(A)=r(A_{erw})$. Außerdem gilt:

(1) Ist $r(A)=r(A_{erw})=n$, hat das System ***genau eine*** Lösung.

(2) Ist $r(A)=r(A_{erw})<n$, hat das System ***unendlich viele*** Lösungen, wobei $n-r(A)$ Unbekannte beliebig gewählt werden können. Es ist nur darauf zu achten, dass diese Wahl nicht im Widerspruch zum Gleichungssystem steht.

(3) Ist $r(A)\neq r(A_{erw})$, so hat das System ***keine*** Lösung.

Anwendung auf obige Beispiele:

Beispiel 2.23: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ gesucht, $\vec{b}=\begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}$, somit

$A_{erw}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 7\end{bmatrix}$, und es ist $r(A)=r(A_{erw})=2=n$

⇒ es gibt genau eine Lösung.

Beispiel 2.24: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$, $A_{erw}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 7\end{bmatrix}$,

$r(A)=1$, $r(A_{erw})=2$

⇒ es gibt keine Lösung.

Beispiel 2.25: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$, $A_{erw}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 10\end{bmatrix}$,

$r(A)=r(A_{erw})=1$ (zweite Zeile ist Vielfaches der ersten),

$1 < n = 2$

⇒ es gibt unendlich viele Lösungen und 2 − 1 = eine Unbekannte kann beliebig gewählt werden (z.B. $x_2=a$, dann muss $x_1=5-a$ sein).

Zusammenhang mit linearen Abbildungen, Herleitung des Frobeniussatzes:

$A\cdot\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{x}$ unbekannt, ist gleichbedeutend mit $f(\vec{x})=\vec{b}$, wenn *f* die zu *A* gehörige lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$, $f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$ ist.

Dann gilt:

Es existiert *keine* Lösung ⇔ $\vec{b}$ liegt *nicht* im Bildbereich von *f*

⇔ $\vec{b}$ ist nicht als Linearkombination der Spalten von *A* darstellbar

. ⇔ $r(A)<r(A_{erw})$.

Es existiert (mindestens) eine Lösung ⇔ $\vec{b}$ liegt im Bildbereich von *f*

. ⇔ $\vec{b}$ ist Linearkombination der Spalten von *A*

. ⇔ $r(A)=r(A_{erw})$.

2 Unterfälle:

$r(A)<n$ ⇔ die Spalten von *A* sind lin. abhängig

⇔ es gibt mehrere (und dann sogar unendlich viele) Darstellungen von $\vec{b}$ als Linearkombination der Spalten von *A*.

⇔ es existieren unendlich viele Lösungen.

$r(A)=n$ ⇔ die Spalten von A sind linear unabhängig
⇔ es existiert nur eine Lösung.

- Aus dem bisher Gesagten folgt, dass ein homogenes Gleichungssystem $(\vec{b}=\vec{0})$ *immer* lösbar ist, da die triviale Lösung $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0$ immer existiert.
- Aus dem Frobeniussatz folgt: Ist A eine (n, n)-Matrix, dann hat ein homogenes Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung genau dann, wenn $|A|=0$ (wenn also A nicht regulär ist, also nicht den maximal möglichen Rang hat).

Beispiel für ein homogenes LGS:

$$\left\{\begin{matrix} x_1+x_2=0 \\ 2x_1+2x_2=0 \end{matrix}\right\} \qquad A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix},\quad A_{erw}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Triviale Lösung: $x_1=x_2=0$.

r (A) = 1 < n = 2

auch: det A = $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 2=0$

⇒ es gibt nichttriviale Lösungen.

Allgemeine Lösung: Setze z.B. $x_2 = p$.

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-p\\ p\end{bmatrix},\quad p\in\mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems.

Beachte: Die allgemeine Lösung des *in*homogenen Systems

$$\left\{\begin{matrix} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+2x_2=10 \end{matrix}\right\}$$

war $\vec{x}=\begin{bmatrix}5-p\\ p\end{bmatrix}$, also

$$\vec{x}=\underset{\substack{\nearrow\\ \text{spezielle}\\ \text{Lösung des}\\ \text{inhomogenen}\\ \text{Systems}}}{\begin{bmatrix}5\\ 0\end{bmatrix}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{allgemeine}\\ \text{Lösung des}\\ \text{homogenen}\\ \text{Systems}}}{\begin{bmatrix}-p\\ p\end{bmatrix}}$$

Kennt man die allgemeine Lösung des zum System $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$ zugehörigen homogenen Systems $A\vec{x}=\vec{0}$ und eine spezielle Lösung $\vec{x}_1$ des ursprünglichen Systems, d.h. $A\vec{x}_1=\vec{b}$, so ist $\vec{y}=\vec{x}+\vec{x}_1$ allgemeine Lösung des ursprünglichen (inhomogenen) Systems. Denn es ist für $\vec{x}$ und $\vec{x}_1$: $A\vec{x}=\vec{0}$ und $A\vec{x}_1=\vec{b}$.

Durch Addition ergibt sich: $A\vec{x}+A\vec{x}_1=\vec{b}+\vec{0}$

$$A(\vec{x}+\vec{x}_1)=\vec{b} \quad\rightarrow\quad A\vec{y}=\vec{b}$$

Lösungsverhältnisse des homogenen Gleichungssystems ($m = n$)

A sei eine (n, n)-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{0}$ hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn $|A| = 0$. Es gibt dann unendlich viele Lösungen $\vec{x}$, und diese Lösungen bilden einen Teilraum, nämlich die Linearkombinationen dieser Lösungen (s. Bsp. 2.27).

Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Übersicht

1. „naive" Verfahren (Einsetzen, Gleichsetzen) → nur bei kleinen LGS sinnvoll

2. Gauß-Jordan'sches Eliminationsverfahren
   Vorteil: klappt immer; auf dem Rechner sehr effizient
   Nachteil: eventuell längere Umformung, Brüche

3. Cramersche Regel
   benutzt Determinanten
   Vorteil: Lösungsformel in einem Schritt
   Nachteil: geht nur bei $r(A)=n$ (eindeutige Lösung),
   Determinantenberechnung aufwändig bei großen LGS.

4. Matrixinvertierung
   man benötigt die Kenntnis der inversen Matrix A^{-1}.

$$A\cdot\vec{x}=\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{b}$$

   Vorteil: A^{-1} eventuell noch anderweitig verwendbar
   Nachteil: geht nur bei $r(A)=n$,
   A^{-1} aufwändig zu berechnen.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Bei diesem Verfahren wird die erweiterte Matrix A_{erw} des Systems mit Hilfe elementarer Operationen auf Dreiecksgestalt gebracht. Man erhält so eine Matrix, die dem umgeformten Gleichungssystem entspricht. Aus dieser Matrix berechnet man den Rang der Matrix des Systems und den Rang der erweiterten Matrix, wodurch die Frage nach der Lösbarkeit des Systems beantwortet wird. Wenn die Lösung existiert, lässt sie sich aus dem dreieckförmigen System auch leichter bestimmen.

Beispiel 2.26: Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1-2\mathrm{x}_2+x_3 &= 0 \\ 3x_1-5x_2-2x_3 &= -3 \\ 7x_1-3x_2+\ x_3 &= 16 \end{aligned}$$

Die zugehörige erweiterte Matrix ist: $A_{erw}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & -3 \\ 7 & -3 & 1 & 16 \end{array}\right]$.

Durch elementare Umformungen erhält man: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 49 & 49 \end{array}\right] \rightarrow r(A)=r(A_{erw})=3$.

Da $n=r(A)=r(A_{erw})$, hat das Gleichungssystem nach dem Satz von Frobenius genau eine Lösung.

Es ist:
$$\begin{aligned} x_1-2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 5x_3 &= -3 \\ 49x_3 &= 49 \end{aligned}$$

Nach Elimination erhält man: $x_3=1,\quad x_2=2,\quad x_1=3$, so dass die Lösung lautet: $\vec{x}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Beispiel 2.27: Lösen Sie das Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3+ 3x_4 &= 0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+ 2x_4 &= 0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4 &= 0 . \end{aligned}$$

Das System ist homogen, die triviale Lösung $x_1=0, \ldots, x_4=0$.

Die erweiterte Matrix des Systems ist:

$$A_{erw}=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] .$$

$r(A)=r(A_{erw})=2;\quad n=4 \rightarrow r(A_{erw})<n$ $\Rightarrow$ Das System hat nach Frobenius unendlich viele Lösungen. $n-r(A)=2$ Parameter können frei gewählt werden, z.B. x_1, x_2 . Die Parameter x_3, x_4 können nicht beide gleichzeitig frei gewählt werden, da laut Gleichungssystem *(siehe Dreiecksform)* gilt: $7x_3+5x_4=0$.

Wahl: $x_1=p;\quad x_2=q \Rightarrow x_3=5q-\frac{5}{2}p;\quad x_4=\frac{7}{2}p-7q$.

Also lautet die Lösung: $\vec{x}=\begin{bmatrix} p \\ q \\ 5q-\frac{5}{2}p \\ \frac{7}{2}p-7q \end{bmatrix}$; $p\in\mathbb{R},\; q\in\mathbb{R}$.

Gauß-Jordan-Methode der vollständigen Elimination

Hier wird die Matrix A eines Gleichungssystems vom Typ (m, n), $m \geq n$, mit Hilfe von elementaren Operationen auf die Diagonalform gebracht, so dass alle Elemente in den ersten m Spalten (außer den Diagonalelementen) gleich Null sind und in der Hauptdiagonale die Werte 1 stehen. Werden diese Operationen gleichzeitig am Vektor $\vec{b}$ (also an der erweiterten Matrix A_{erw}) durchgeführt, so wird dieser dadurch in den gesuchten Lösungsvektor transformiert. Da dieses Verfahren oft in der linearen Optimierung (Betriebswirtschaftslehre) angewandt wird, soll ein Schritt an einer allgemeinen Matrix gezeigt werden.

Es sei: $$A_{erw} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Der Jordansche Eliminationsschritt wird mit dem Element a_{rs} mit $r = 1, \dots, m$ und $s = 1,\dots, n$ wie folgt ausgeführt:

(1) Man dividiert die r-te Zeile (Schlüsselzeile) durch das Schlüsselelement a_{rs} (Pivot).

(2) Die so erhaltene Zeile wird die neue r-te Zeile der Matrix.

(3) Von der i-ten Zeile der Matrix $A_{erw}, i \neq r$, subtrahiert man die neue, mit dem Element a_{is} multiplizierte r-te Zeile, und dies für alle $i \neq r$.

So ergibt sich die reduzierte Matrix:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & 1 & \dots & a_{rn} & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & 0 & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Der Jordansche Schritt beinhaltet die systematisch geordneten elementaren Operationen der Matrizen

$$[\,A \mid \vec{b}\,] = [\,E \mid \vec{x}\,]$$

Beispiel 2.28:

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Lösung: Vertauschen Sie die erste und dritte Zeile:

$$A_{erw} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array}\right] \text{; Wahl des Schlüsselelements } a_{11} = 1 \text{ (Pivot)}$$

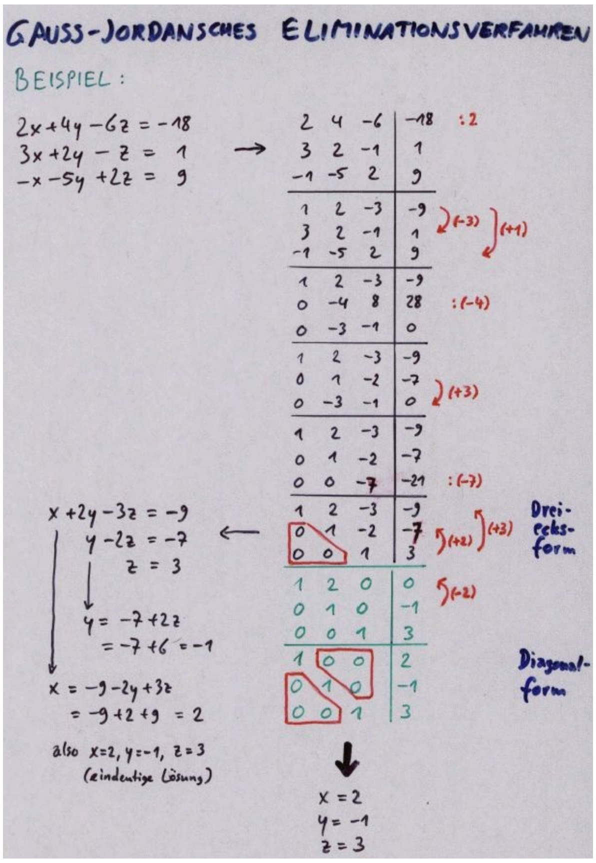
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \\ 0 & 1 & -13 & 28 \end{array}\right] \quad \text{da } z_4 = z_3 + z_2 \quad \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \end{array}\right]$$

$$\text{Wahl des Pivots } a_{22} \quad \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array}\right]$$

$$\text{Wahl des Pivots } a_{33} \quad \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$\vec{x}^T = (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -2)$ ist die eindeutige Lösung.

weiteres Beispiel:



GAUSS-JORDANSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN

BEISPIEL:

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 6z &= -18 \\ 3x + 2y - z &= 1 \\ -x - 5y + 2z &= 9 \end{aligned} \quad \to$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 4 & -6 & -18 & :2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & \\ -1 & -5 & 2 & 9 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & -9 & (-3)\ (+1) \\ 3 & 2 & -1 & 1 & \\ -1 & -5 & 2 & 9 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & -9 & \\ 0 & -4 & 8 & 28 & :(-4) \\ 0 & -3 & -1 & 0 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & -9 & \\ 0 & 1 & -2 & -7 & (+3) \\ 0 & -3 & -1 & 0 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & -9 & \\ 0 & 1 & -2 & -7 & \\ 0 & 0 & -7 & -21 & :(-7) \\ \hline 1 & 2 & -3 & -9 & \\ 0 & 1 & -2 & -7 & (+2)\ (+3) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \text{Dreiecksform} \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & (-2) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \text{Diagonalform} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \end{array}$$

$$\downarrow$$

$x = 2$
$y = -1$
$z = 3$

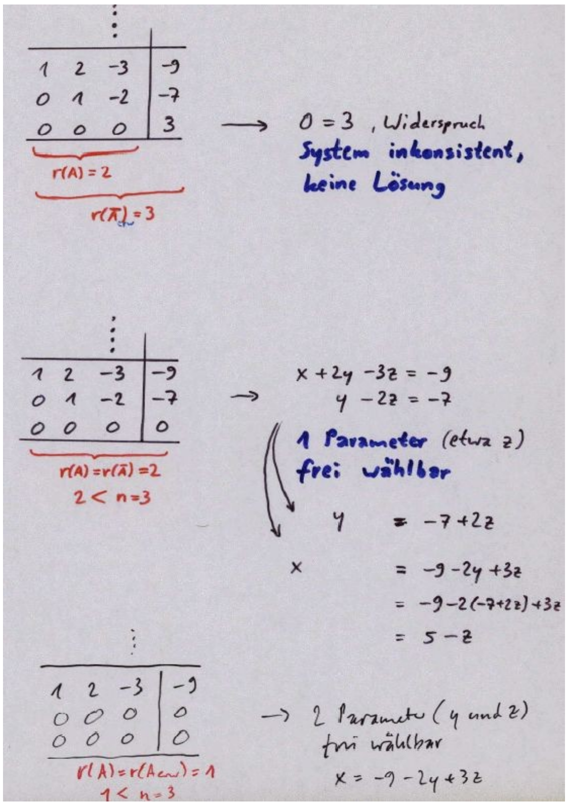
$$\longleftarrow \quad \begin{aligned} x + 2y - 3z &= -9 \\ y - 2z &= -7 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -7 + 2z \\ &= -7 + 6 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -9 - 2y + 3z \\ &= -9 + 2 + 9 = 2 \end{aligned}$$

also $x=2, y=-1, z=3$
(eindeutige Lösung)

leicht veränderte Fälle:



$$\begin{array}{ccc|c} & \vdots & & \\ \hline 1 & 2 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$r(A) = 2$

$r(\bar{A}) = 3$

$\to$ $0 = 3$, Widerspruch

System inkonsistent, keine Lösung

$$\begin{array}{ccc|c} & \vdots & & \\ \hline 1 & 2 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$r(A) = r(\bar{A}) = 2$

$2 < n = 3$

$$\to \quad \begin{aligned} x + 2y - 3z &= -9 \\ y - 2z &= -7 \end{aligned}$$

1 Parameter (etwa z) **frei wählbar**

$$\begin{aligned} y &= -7 + 2z \\ x &= -9 - 2y + 3z \\ &= -9 - 2(-7 + 2z) + 3z \\ &= 5 - z \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} & \vdots & & \\ \hline 1 & 2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

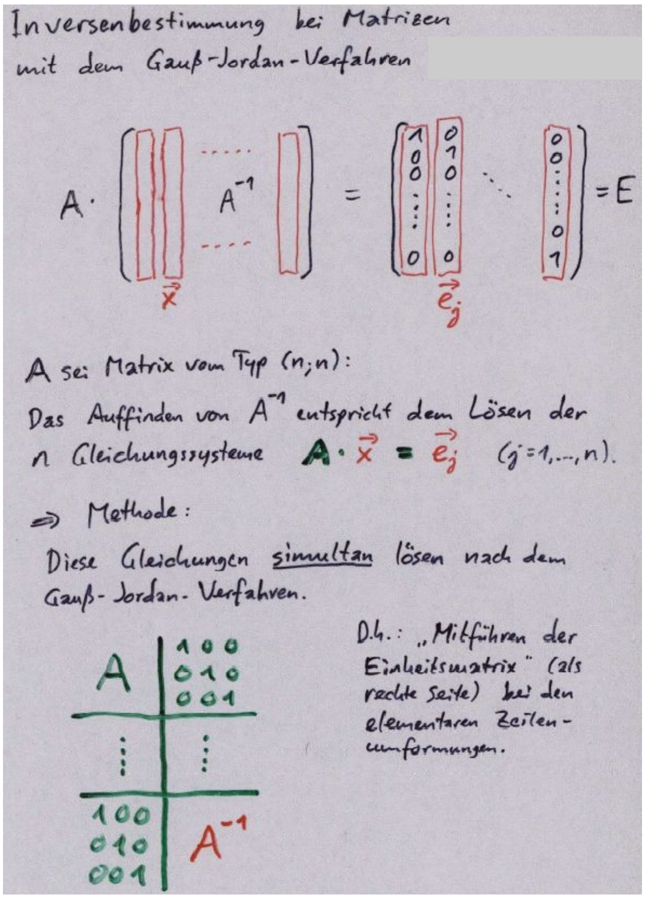
$r(A) = r(A_{erw}) = 1$

$1 < n = 3$

$\to$ 2 Parameter (y und z) frei wählbar

$x = -9 - 2y + 3z$

Invertieren von Matrizen (vgl. Bsp. 2.22):


Inversenbestimmung bei Matrizen
mit dem Gauß-Jordan-Verfahren [redacted]

$$A \cdot \left(\vec{x} \;\cdots\; A^{-1} \;\cdots \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = E$$

A sei Matrix vom Typ $(n;n)$:

Das Auffinden von A^{-1} entspricht dem Lösen der n Gleichungssysteme $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j$ $(j=1,\ldots,n)$.

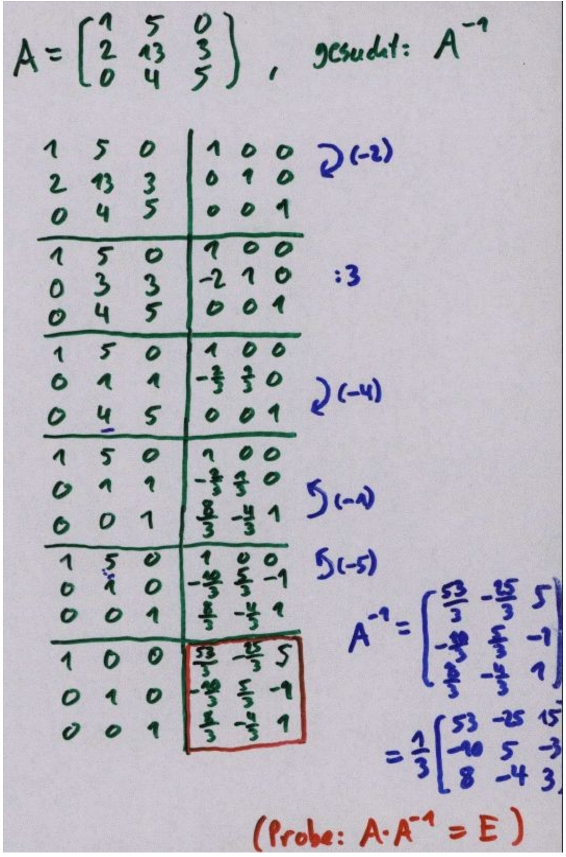
⇒ Methode:

Diese Gleichungen simultan lösen nach dem Gauß-Jordan-Verfahren.

$$\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} & A^{-1} \end{array}$$

D.h.: „Mitführen der Einheitsmatrix“ (als rechte Seite) bei den elementaren Zeilenumformungen.

Beispiel:


$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 13 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, gesucht: A^{-1}

$$\begin{array}{ccc|ccc|l}
1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & (-2) \\
2 & 13 & 3 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline
1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 3 & 3 & -2 & 1 & 0 & :3 \\
0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline
1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & (-4) \\
0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline
1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & (-1) \\
0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & \\ \hline
1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & (-5) \\
0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} & -1 & \\
0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & \\ \hline
1 & 0 & 0 & \frac{53}{3} & -\frac{25}{3} & 5 & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} & -1 & \\
0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & 1 &
\end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{53}{3} & -\frac{25}{3} & 5 \\ -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 53 & -25 & 15 \\ -10 & 5 & -3 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(Probe: $A \cdot A^{-1} = E$)

„Determinantenmethode“ zur Lösung linearer Gleichungssysteme von *n* Gleichungen mit *n* Unbekannten (Cramersche Regel)

Eine weitere Lösungsmethode für lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten arbeitet mit der Determinante.

Als Beispiel: Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \cdot a_{21} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \cdot(-a_{11}) \ . \end{array}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit a_{21} und die zweite mit $-a_{11}$, so ergibt sich nach Addition der beiden Gleichungen:

$$a_{12} \cdot a_{21} x_2 - a_{11} a_{22} x_2 = b_1 \cdot a_{21} - b_2 a_{11} \quad . \ (\ x_1 \ \textit{wurde hier eliminiert.})$$

Für x_2 folgt: $x_2 = \dfrac{b_1 a_{21} - b_2 a_{11}}{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}} = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$.

Es zeigt sich, dass Zähler (D_2) und Nenner (D) hier Determinanten sind:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$$

Beispiel 2.29: $5x_1 - 3x_2 = 24 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$-2x_1 + \ x_2 = 9 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 24 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{24\cdot 1-(-3)\cdot 9}{5\cdot 1-(-3)\cdot(-2)} = \frac{24+27}{5-6} = -51$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 24 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5\cdot 9-24\cdot(-2)}{5\cdot 1-(-3)\cdot(-2)} = \frac{45+48}{5-6} = -93$$

Diese Vorgehensweise lässt sich mit mehr oder weniger großem Rechenaufwand auf komplexere Systeme ($n \geq 2$) verallgemeinern.

Allgemein gilt:

Satz von Cramer (auch: Cramersche Regel)

Das lineare Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten hat genau eine Lösung, wenn die Determinante des Systems, $|A|$, von Null verschieden ist ($|A| \neq 0$).

Diese Lösung lässt sich errechnen gemäß: $x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \qquad k = 1, \ldots, n$.

$|A_k|$ entsteht aus $|A|$, indem die k-te Spalte in $|A|$ durch die rechte Seite des Systems, $\vec{b}$ (absolute Glieder), ersetzt wird.

Zur Herleitung der Cramerschen Regel:

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ sei gegeben; A sei (n, n)-Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Multipliziert man $A\vec{x} = \vec{b}$ von links mit A^{-1} , erhält man wegen $A^{-1}A\vec{x} = E\vec{x} = \vec{x}$:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{ad} \cdot \vec{b} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} |D_{11}| & |D_{21}| & \ldots & |D_{n1}| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ |D_{1n}| & |D_{2n}| & \ldots & |D_{nn}| \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} \sum_i b_i & |D_{i1}| \\ \vdots & \vdots \\ \sum_i b_i & |D_{in}| \end{bmatrix}$$

Hieraus folgt für die j-te Komponente von $\vec{x}$:

$$x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} b_i \; |D_{ij}|$$, wobei hier

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \left|D_{ij}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left|A_j\right| \text{ ; es ist also } \quad x_j = \frac{\left|A_j\right|}{\left|A\right|} \quad .$$

Beispiel 2.30:

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \quad x_3 &= \ 0 \\ 7x_1 - 3x_2 + \quad x_3 &= \ 16 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 \ &= -3 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -49 \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 16 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -147 \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 16 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -98$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 7 & -3 & 16 \\ 3 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -49$$

Nach der Cramerschen Regel ist: $x_1 = \frac{-147}{-49} = 3$, $x_2 = \frac{-98}{-49} = 2$, $x_3 = \frac{-49}{-49} = 1$.

Übersicht: Anwendungen der Matrizenrechnung

1. Matrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}_m \rightarrow \mathbb{R}_n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Spalten = Bilder der Basisvektoren, also $f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m)$

2. Matrix eines Basiswechsels von $U = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ nach $V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

$$M(V \leftarrow U) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Spalten = Koordinatenvektoren der alten Basisvektoren bzgl. der neuen Basis, also $(\vec{u}_1)_V, \dots, (\vec{u}_n)_V$.

3. Altersklassen-Übergangsmatrix eines Bestandes / einer Population $P=(p_{ij})$
Einträge = Übergangskoeffizienten von Altersklasse *i* in Altersklasse *j*.

4. Matrix *A* und erweiterte Matrix A_{erw} eines linearen Gleichungssystems (LGS)
m Gleichungen
n Unbekannte

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\ =b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\ =b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_{erw}=\left[\begin{array}{c|c} & b_1 \\ A & \vdots \\ & b_m \end{array}\right]$$

A ist vom Typ (*m*, *n*): *m* Zeilen
n Spalten

Lineare Abbildungen und ihre Eigenschaften

A sei eine (*n*, *n*)-Matrix und $\vec{x}$ ein (*n*, 1)-Spaltenvektor. Dann ergibt das Produkt $A\cdot\vec{x}$ wieder einen (*n*, 1)-Spaltenvektor. Wie schon erwähnt wurde, stellt $A\vec{x}=\vec{y}$ eine *lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ dar.

Im Folgenden sollen einige Eigenschaften solcher linearer Abbildungen deutlich gemacht werden − wegen der besseren Anschaulichkeit in $\mathbb{R}^2$ (*n* = 2).

Beispiel 2.31:

Gegeben sei eine Matrix *A* der speziellen Form *A* = $\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$ für einen festen Wert ϕmit $0<\phi<\pi$. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Abbildung $A\vec{x}=\vec{y}$ eine *Drehung* der Vektoren $\vec{x}$ um den Winkel ϕ um den Nullpunkt des Koordinatensystems darstellt. Die Einheitsvektoren $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ werden wie folgt abgebildet:

$$A\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{bmatrix} \quad ; \quad A\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{bmatrix}$$

(Bilder = Spalten der Matrix *A*).

Abbildung 35

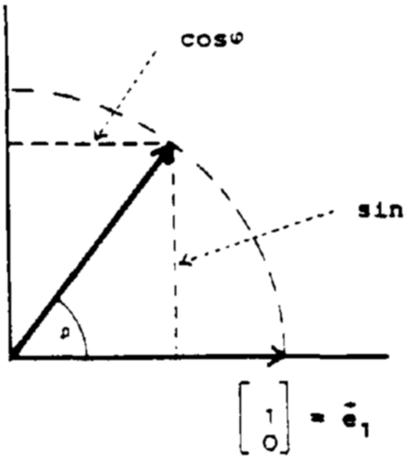
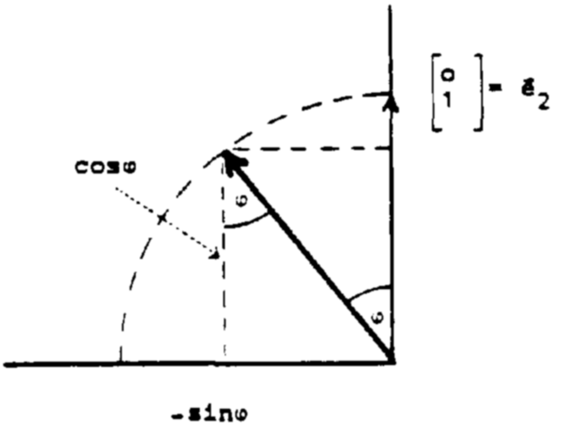


Abbildung 36



Das heißt, diese Einheitsvektoren (und damit auch alle anderen $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$) werden um den Winkel ϕ gedreht. Man nennt A eine ***Drehungsmatrix***.

Beispiel 2.32:

Gegeben sei $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ mit einem festen Wert $\lambda \neq 0$.

Die folgende Abbildung $A\vec{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$ *streckt* alle Vektoren $\vec{x}$ auf λ-fache Länge in gleicher Richtung. Beachte: Nur *ein* Parameter λ kommt in der Matrix vor. (Für $|\lambda| < 1$ ergibt sich eine Stauchung). Dies ist die sogenannte ***äquiforme Abbildung***. Parallelität und die Größe aller Winkel bleiben erhalten. Anwendung: Baumschaftformwachstum *(Abb. 37, 38).*

Abbildung 37

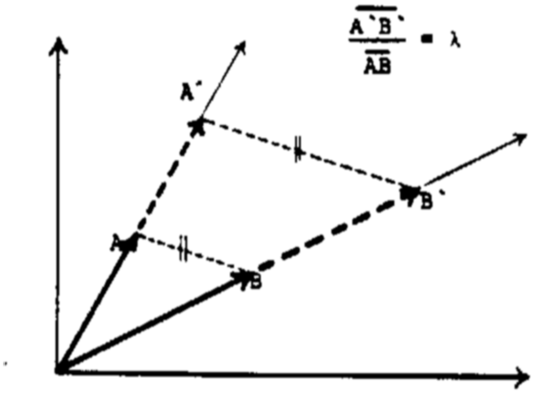
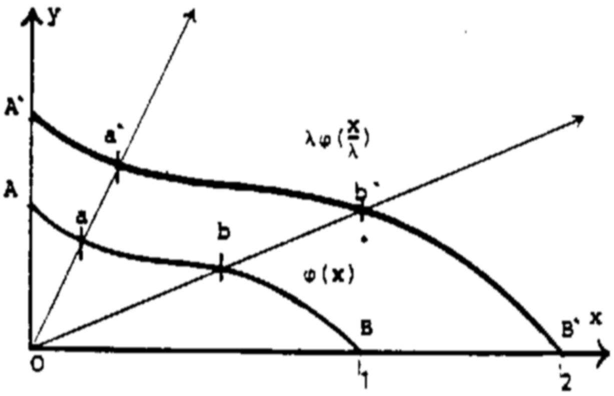


Abbildung 38



Beispiel 2.37:

Gegeben sei die Matrix $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ mit *zwei* festen Werten $\lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Bei dieser Abbildung erfahren lediglich Vektoren der Form $\vec{x}_1=\begin{bmatrix}a\\ 0\end{bmatrix}$ und $\vec{x}_2=\begin{bmatrix}0\\ b\end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$,

nur eine Streckung! Alle übrigen Vektoren $\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ mit $a, b \neq 0$ werden *gestreckt und gedreht*, da die Streckfaktoren λ_1 für die x-Richtung und λ_2 für die y-Richtung unterschiedlich groß sind:

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 a\\ \lambda_2 b\end{bmatrix} \quad \textit{(siehe Abbildung 39).}$$

Man spricht von einer ***zentroaffinen Abbildung***. In der forstlichen Praxis spielt sie eine große Rolle. Anwendung: Wachstum der Schaftform bei Bäumen, Statistik!

Abbildung 39

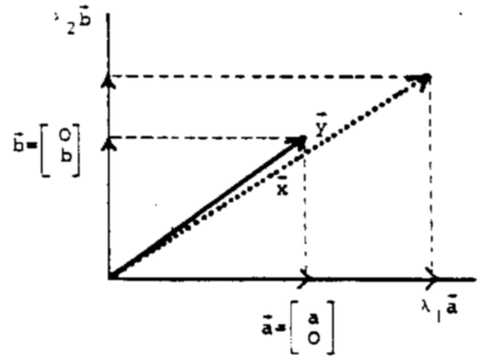
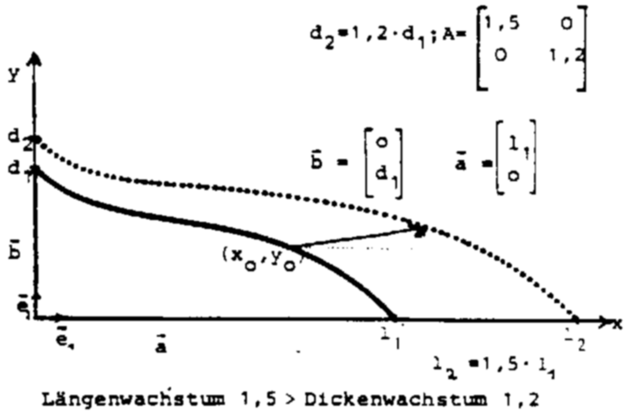


Abbildung 40



Flächenänderung bei der linearen Abbildung $f: \vec{x} \rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\cdot\vec{x}$, ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$):

Sei P das von $\vec{a}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm.

Fläche von P = | det ($\vec{a}, \vec{b}$) | = $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

Was ist die Fläche des „Bildparallelogramms" $f(P)$, das von $f(\vec{a})$ und $f(\vec{b})$ aufgespannt wird?

$$f(\vec{a})=\begin{bmatrix}\lambda_1 a_1\\ \lambda_2 a_2\end{bmatrix} \quad , \quad f(\vec{b})=\begin{bmatrix}\lambda_1 b_1\\ \lambda_2 b_2\end{bmatrix}$$

Fläche von $f(P)$ = | det $f(\vec{a}), f(\vec{b})$ |

$$
\begin{aligned}
&= \mid \det \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_1 b_1 \\ \lambda_2 a_2 & \lambda_2 b_2 \end{bmatrix} \mid \\
&= |\lambda_1 a_1 \lambda_2 b_2 - \lambda_2 a_2 \lambda_1 b_1| \\
&= |\lambda_1 \cdot \lambda_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)| \\
&= |\lambda_1| \cdot |\lambda_2| \cdot |(a_1 b_2 - a_2 b_1)| \\
&= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \cdot \text{ Fläche von } P.
\end{aligned}
$$

Also: Die Fläche verändert sich um den Faktor $\lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ (Fall der äquiformen Abbildung): Flächenfaktor λ^2 .

Wie ändert sich das *Spatvolumen* unter $f : \vec{x} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$?

(Anwendung: Baumschaft, gleiche Faktoren λ_1 für Durchmesser in *x*- und *y*-Richtung, anderer Faktor λ_2 für Höhenwachstum)

$$\text{Vol (Spat } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{)} = \mid \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \mid$$

$$\text{Vol (} f \text{ (Spat } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{))} = \mid \det \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1 c_1 \\ \lambda_1 a_2 & \lambda_1 b_2 & \lambda_1 c_2 \\ \lambda_2 a_3 & \lambda_2 b_3 & \lambda_2 c_3 \end{bmatrix} \mid$$

$$= \mid \lambda_1 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \mid$$

$$= \lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \quad \cdot \text{Vol (Spat)}$$

Im äquiformen Fall: Volumenfaktor λ^3 .

Die Begriffe „Eigenwert“ und „Eigenvektor“

Bei der linearen Abbildung $f : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{bmatrix}$ (zentroaffine Abbildung) sind die beiden Richtungsvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ unter allen Richtungen in der Ebene besonders ausgezeichnet: Auf sie wirkt f als eine reine *Streckung*.
Allgemein ist die Angabe von Richtungsvektoren mit dieser Eigenschaft eine wichtige Möglichkeit, lineare Abbildungen zu beschreiben. Man spricht von ***Eigenvektoren*** der linearen Abbildung, bzw. der zugehörigen Matrix. Die zugehörigen Streckfaktoren heißen ***Eigenwerte***.

Beispiel: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ist Eigenvektor der Matrix $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}$ zum Eigenwert 3:

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ ist ebenfalls Eigenvektor der Matrix $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}$ zum Eigenwert 3:

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ist Eigenvektor der Matrix $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}$ zum Eigenwert 7:

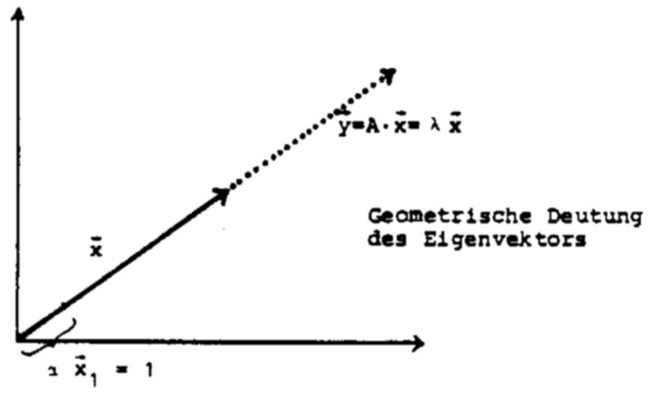
$$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix}=7\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Allgemein: $A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$, dabei $\vec{x}\neq\vec{0}$.

<u>Definition 2.25:</u>

A sei eine (*n*, *n*)-Matrix. Falls eine Zahl λ existiert, so dass die Gleichung $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ eine Lösung $\vec{x}_\lambda\neq\vec{0}$ besitzt, dann heißt λ *Eigenwert* und $\vec{x}_\lambda$ *Eigenvektor* der Matrix *A*.

Abbildung 41



Ist $\vec{x}_\lambda$ Eigenvektor und $a\neq 0$, so ist auch $a\cdot\vec{x}_\lambda$ ein Eigenvektor. Der Parameter λ kann so gewählt werden, dass die Länge von $a\cdot\vec{x}_\lambda$ gleich 1 wird, d.h.

$$a\cdot\sqrt{\vec{x}^T\cdot\vec{x}}=1$$

Ein Eigenvektor ist also ein Vektor $\vec{x}\neq\vec{0}$, für den $A\cdot\vec{x}$ die gleiche Richtung und die λ-fache Länge wie $\vec{x}$ besitzt.

Aber nicht jede Abbildung, die durch eine ($n\times n$)-Matrix definiert ist, besitzt Eigenwerte: Zum Beispiel besitzt die Drehungsmatrix keine Eigenvektoren (und damit auch keine Eigenwerte), falls nicht ϕ ein Vielfaches von 180° ist ($\sin \phi = 0$).

Die Gleichung $A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$ lässt sich wegen $\vec{x}=E\vec{x}$ wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x} &\Leftrightarrow A\cdot\vec{x}-\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0} \\ &\Leftrightarrow A\vec{x}-\lambda E\vec{x}=\vec{0} \\ &\Leftrightarrow (A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0} \end{aligned}$$

Diese Vektorgleichung stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem dar, welches nur dann eine nichttriviale Lösung $\vec{x}\neq\vec{0}$ besitzt, wenn die dem Gleichungssystem zugeordnete Determinante $det(A-\lambda E)$ gleich Null ist. Daraus ergibt sich:

Verfahren zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer gegebenen Matrix *A*

1. Eigenvektoren von *A* sind nichttriviale Lösungen (d.h. Lösungsvektoren ≠ $\vec{0}$) von $A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$ bzw. von $A\cdot\vec{x}-\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0}$. Solche existieren genau dann, wenn det $(A-\lambda E)=0$ ist. Man bestimmt also zunächst die Lösungen λ der *Zahlen*gleichung det $(A-\lambda E)=0$.

Diese heißt *charakteristische Gleichung* von *A*, det $(A-\lambda E)$ heißt *charakteristisches Polynom* von *A*.

Die Gleichung det $(A-\lambda E)=0$ speziell für $A_{(2,2)}$ lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}=0 \quad \text{(quadratische Gleichung)}$$

Die formale Lösung lautet:

$$\lambda_{I,II} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\pm\sqrt{\frac{(a_{11}+a_{22})^2}{4}-\frac{4a_{11}a_{22}}{4}+a_{12}a_{21}} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\pm\sqrt{\frac{(a_{11}-a_{22})^2}{4}+a_{12}a_{21}}$$

Für die Existenz von reellen Lösungen muss der Ausdruck unter der Wurzel nichtnegativ sein, d.h. $\frac{(a_{11}-a_{22})^2}{4}+a_{12}a_{21}\geq 0$.

Beispiel: $$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A-\lambda E = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} - \lambda\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1-2\lambda+\lambda^2-\frac{1}{4}$$

$$= \lambda^2-2\lambda+\frac{3}{4}\overset{!}{=}0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}}=1\pm\frac{1}{2}, \quad \lambda_1=\frac{1}{2}, \quad \lambda_2=\frac{3}{2}$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bzw. die Lösungen der charakteristischen Gleichung von A, hier also $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$.

Genau für $\lambda=\frac{1}{2}$ und $\lambda=\frac{3}{2}$ hat $A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$ bzw. $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ Lösungsvektoren $\vec{x}\neq\vec{0}$, also Eigenvektoren.

2. Bestimmung dieser Eigenvektoren: Die allgemeine Lösung des homogenen LGS $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ ist (für jeden Eigenwert λ einzeln) auszurechnen.

Beispiel (s.o.):

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1=\frac{1}{2}$: $(A-\frac{1}{2}E)\vec{x}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $x_1+(-x_2)=0$. 1 Parameter frei wählbar, z.B. $x_2=c$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x_1=c$, $x_2=c$, also $\vec{x}=\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$

($c\neq 0$, da $\vec{x}$ Eigenvektor sein soll)

Es reicht die Angabe eines Vektors dieser Richtung:

z.B. $\vec{x}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\frac{1}{2}$.

Probe: $A \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ √

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2=\frac{3}{2}$: $(A-\frac{3}{2}E)\vec{x}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \hline 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $x_1+x_2=0$. 1 Parameter frei wählbar, z.B. $x_2=c$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x_1=-c$, $x_2=c$, also $\vec{x}=\begin{bmatrix}-c\\c\end{bmatrix}$, $c\neq 0$

z.B. $\vec{x}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\frac{3}{2}$.

Probe:

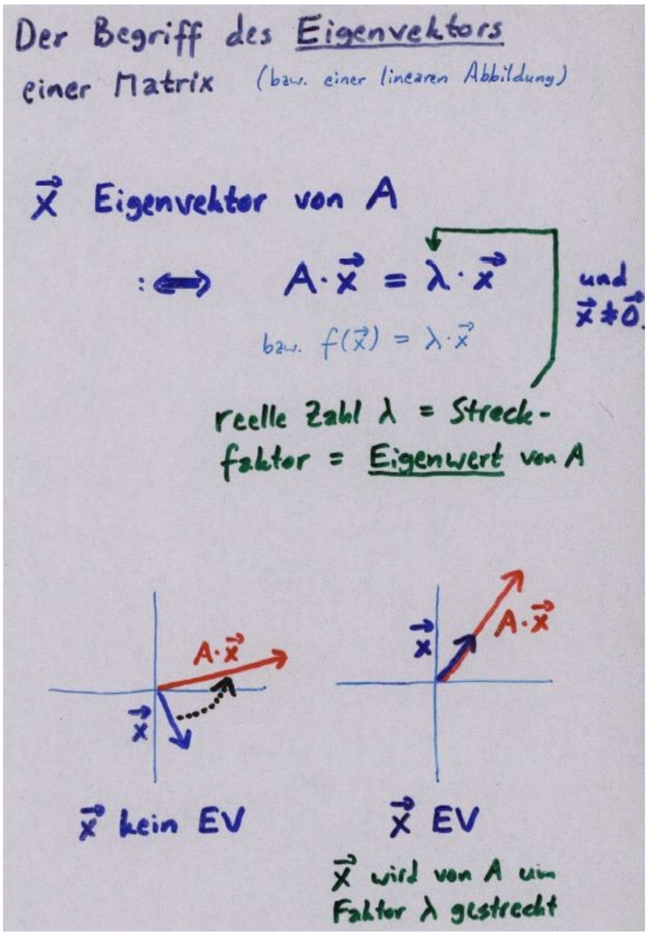
$$A \cdot \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \quad √$$

Beachte: Das Verfahren geht genauso für $n \times n$-Matrizen. det $(A-\lambda E)$ ist dann ein Polynom in der Unbekannten λ vom Grad n, d.h. von der Form $c_n\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+c_1\lambda+c_0$. Es hat höchstens n Nullstellen, A kann also höchstens n verschiedene Eigenwerte haben.

Im Allgemeinen kann es zu ein- und demselben Eigenwert λ auch mehrere Eigenvektoren mit verschiedenen Richtungen geben.

Beispiel: Für $A=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ ist jeder Vektor $\vec{x}\neq\vec{0}$ Eigenvektor zum Eigenwert 5.

Zusammenfassung:



Der Begriff des Eigenvektors
einer Matrix (bzw. einer linearen Abbildung)

$\vec{x}$ Eigenvektor von A

$:\Longleftrightarrow\quad A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$ und $\vec{x}\neq\vec{0}$.

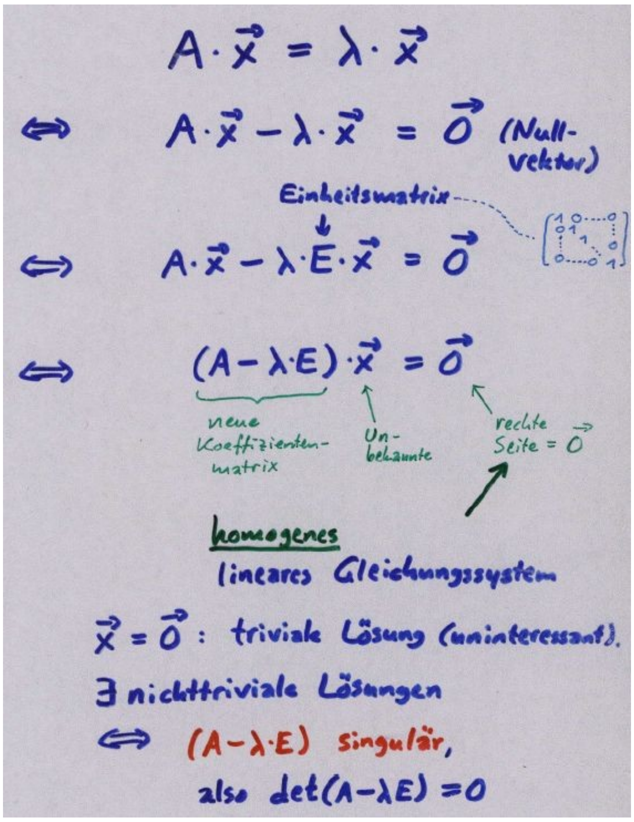
bzw. $f(\vec{x})=\lambda\cdot\vec{x}$

reelle Zahl λ = Streckfaktor = Eigenwert von A

$\vec{x}$ kein EV

$\vec{x}$ EV

$\vec{x}$ wird von A um Faktor λ gestreckt



$$A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$$

$$\Longleftrightarrow\quad A\cdot\vec{x}-\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0}\ \text{(Nullvektor)}$$

Einheitsmatrix $\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & & 1 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\Longleftrightarrow\quad A\cdot\vec{x}-\lambda\cdot E\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \underbrace{(A-\lambda\cdot E)}_{\text{neue Koeffizientenmatrix}}\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

Unbekannte

rechte Seite = $\vec{0}$

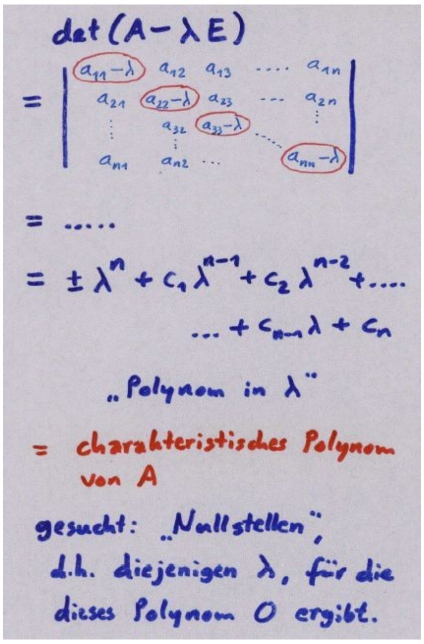
homogenes lineares Gleichungssystem

$\vec{x}=\vec{0}$: triviale Lösung (uninteressant).

$\exists$ nichttriviale Lösungen

$\Longleftrightarrow$ $(A-\lambda\cdot E)$ singulär,

also $\det(A-\lambda E)=0$



$$\det(A-\lambda E)$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & a_{32} & a_{33}-\lambda & & \vdots\\ & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\ \ldots\ldots$$

$$=\pm\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+\ldots\ \ldots+c_{n-1}\lambda+c_n$$

„Polynom in λ“

= charakteristisches Polynom von A

gesucht: „Nullstellen“, d.h. diejenigen λ, für die dieses Polynom 0 ergibt.

Falls die charakteristische Gleichung $det(A-\lambda E)=0$ im Fall einer 2×2-Matrix *A* Lösungen $\lambda_{I,II}$ besitzt, so errechnet man aus der formalen Lösung der charakteristischen Gleichung für das Produkt $\lambda_I \cdot \lambda_{II}$:

$$\lambda_I \cdot \lambda_{II} = a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = |A| \quad .$$

Daraus ersieht man, dass mindestens einer der Eigenwerte gleich Null ist, wenn die Determinante von *A* gleich Null ist (sog. entartete Abbildung). Geometrisch bedeutet dies, dass $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^1$ (Ebene auf Gerade) abgebildet wird. Alle Vektoren ≠ $\vec{0}$, die auf der Bildgeraden liegen, sind Eigenvektoren von *A*. (Ein Beispiel ist die Projektion auf die *y*-Achse, vgl. Abb. 32 rechts).

Eine besondere Rolle spielen im Hinblick auf Eigenwerte die *symmetrischen* Matrizen. Ist $a_{12}=a_{21}$, so ist sofort ersichtlich , dass

$\frac{(a_{11}-a_{22})^2}{4}+a_{12}^2 \geq 0$ ist. Eine symmetrische Matrix besitzt also immer reelle Eigenwerte, die jedoch nicht voneinander verschieden zu sein brauchen.

Ist $\frac{(a_{11}-a_{22})^2}{4}+a_{12}^2=0$, so muss gleichzeitig $a_{11}=a_{22}$ und $a_{12}=a_{21}=0$ sein. In diesem Fall sind beide Eigenwerte gleich (*siehe Bsp. zur äquiformen Abb.).*

Die symmetrischen Matrizen besitzen noch eine wichtige Eigenschaft:
Sind die beiden Eigenwerte λ_I, λ_{II} verschieden, dann stehen die zugehörigen Eigenvektoren senkrecht aufeinander (wichtig für multivariate statistische Methoden, z.B. Faktorenanalyse).

Ganz analoge Aussagen lassen sich für *n* > 2 treffen. Die charakteristische Gleichung ist im allgemeinen Fall eine Polynomgleichung *n*-ten Grades. Es gibt daher höchstens *n* reelle Eigenwerte. Ist | *A* | = 0, so muss auch hier für *n* > 2 mindestens einer der Eigenwerte gleich Null sein.

Definition 2.26: Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt ***Fixpunkt*** von *f*, wenn $f(\vec{x})=\vec{x}$ gilt (wenn also $\vec{x}$ unter der Abbildung *f* „fest" bleibt).

$\vec{x}$ heißt ***anziehender Fixpunkt***, punktförmiger Attraktor oder *Strudelpunkt* von *f*, wenn es zusätzlich eine Umgebung von $\vec{x}$ gibt, so dass für jedes $\vec{y}$ aus dieser Umgebung die Folge

$$\vec{y},\ f(\vec{y}),\ f(f(\vec{y})),\ \ldots$$

gegen $\vec{x}$ konvergiert.

Beachte: Die Fixpunkte von *linearen* Abbildungen sind genau die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sowie der Nullvektor.

$$f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}=\vec{x} \, .$$
$$\Leftrightarrow \quad A\cdot\vec{x}=1\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x} \quad mit\, \lambda=1 \quad .$$

Beispiele: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (Scherung): jeder Punkt auf der x-Achse ist Fixpunkt.

$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ (Streckung): Nur der Nullpunkt ist Fixpunkt.

(Es gibt keine Eigenvektoren zum Eigenwert 1; einziger Eigenwert ist 2.) 0 ist nicht anziehend.

$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (Stauchung): Der Nullpunkt ist anziehender Fixpunkt.

Definition 2.27: Eine ***stochastische Matrix*** ist eine $n \times n$-Matrix, in der die Summe der Einträge jeder Spalte = 1 ist.

Satz: Jede stochastische Matrix A hat den Eigenwert 1. Die zugehörige lineare Abbildung hat somit einen Fixpunkt $\neq \vec{0}$.

Beweis: A hat den Eigenwert 1 $\Leftrightarrow det(A-1\cdot E)=0$

$\Leftrightarrow A-1\cdot E$ ist singulär (also nicht regulär)

$\Leftrightarrow r(A-E)<n$.

Es reicht also zu zeigen: Die Zeilen von $A-E$ sind linear abhängig.
Spaltensummen von A sind $=1$
$\Rightarrow$ Spaltensummen von $A-E$ sind $=0$
$\Rightarrow$ für die Zeilen von $A-E$ gilt $\vec{z}_1+\vec{z}_2+...+\vec{z}_n=\vec{0}$
$\Rightarrow$ die Zeilen von $A-E$ sind linear abhängig, was zu beweisen war.

Anwendungsbeispiel Epidemiologie

Die Ausbreitung einer Krankheit kann als stochastischer Prozess (Zufallsprozess) aufgefasst werden.
Für einen Baum einer bestimmten Art gebe es zwei Zustände:
„gesund" (Zustand 0) und
„krank" (Zustand 1).

Für einen gesunden Baum sei die Wahrscheinlichkeit, nach einem Jahr erkrankt zu sein, $\frac{1}{4}$, d.h.:

$p_{01}=\frac{1}{4}$, bzw. $p_{00}=\frac{3}{4}$ (= Wahrscheinlichkeit, gesund zu bleiben).

Für kranke Bäume trete nach einem Jahr mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ spontane Heilung ein.

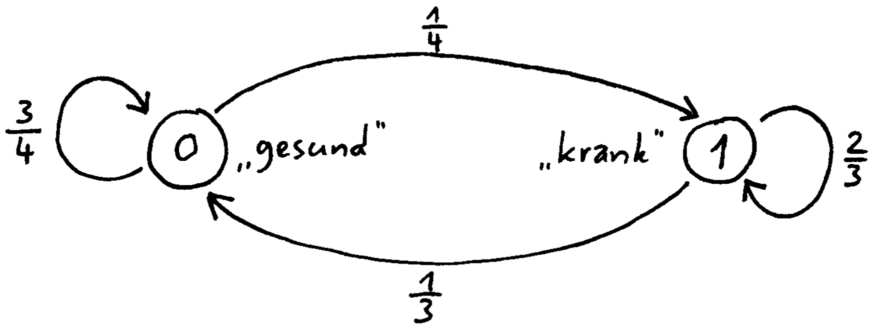
$p_{10}=\frac{1}{3}$, $p_{11}=\frac{2}{3}$.

$P=\begin{bmatrix}p_{00} & p_{01}\\ p_{10} & p_{11}\end{bmatrix}$ heißt ***Übergangsmatrix***.

Ein stochastischer Prozess dieser Art, bei dem die Wahrscheinlichkeit des Übergangs in einen neuen Zustand nur vom gerade erreichten Zustand abhängt, heißt ***Markoff-Kette***.

Grafische Darstellung der Übergänge:

Abbildung 42



$$P^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$ ist stochastische Matrix.

Ist g_1 bzw. k_1 der Anteil der gesunden bzw. kranken Bäume im 1. Jahr, so sind die durchschnittlichen Anteile im 2. Jahr:

$$\begin{bmatrix} g_2 \\ k_2 \end{bmatrix} = P^T \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \cdot g_1 + \frac{1}{3} \cdot k_1 \\ \frac{1}{4} \cdot g_1 + \frac{2}{3} \cdot k_1 \end{bmatrix}$$

↑ ↗

Zustandsvektoren

Frage: Wie ist der Prozentsatz der kranken Bäume, wenn man den Bestand viele Jahre sich selbst überlässt?
(Voraussetzung: Die Übergangswahrscheinlichkeiten ändern sich im Laufe der Jahre nicht.)

Antwort: Es stellt sich ein Zustandsvektor ein, der sich nicht mehr nennenswert ändert – der also Fixpunkt bezüglich der linearen Abbildung $\vec{x} \rightarrow P^T \cdot \vec{x}$ ist. Als stochastische Matrix hat P^T den Eigenwert 1. Es ist nur noch ein zugehöriger Eigenvektor $\begin{bmatrix} g' \\ k' \end{bmatrix}$ (Fixpunkt) zu bestimmen:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} - 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g' \\ k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gauß-Jordan-Verfahren:

$$\begin{array}{cc:c} -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \hdashline 3 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ \hdashline 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad 3 \cdot g - 4 \cdot k = 0$$

allgemeine Lösung: $\begin{bmatrix} g' \\ k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot c \\ 3 \cdot c \end{bmatrix}$, $c \neq 0$

⇒ Anteil der kranken Bäume = $\frac{k}{g+k} = \frac{3}{4+3} = \frac{3}{7}$.

<u>Bemerkung:</u> $\begin{bmatrix} g' \\ k' \end{bmatrix}$ ist tatsächlich *anziehender* Fixpunkt (Strudelpunkt), wenn man sich auf feste Gesamtzahl $g + k$ beschränkt.

<u>Beachte:</u> Der Anteil $\frac{3}{7}$ ist unabhängig vom Gesundheitszustand der Bäume im 1. Jahr!
Man nennt (g , k) auch *ergodische Verteilung* der Markoffkette.

Weitere Beispiele für die Verwendung von Markoffketten in der Botanik

- Anlegen von Lateralknospen bei der Ontogenese von Jahrestrieben

  Zustand 0: unverzweigtes Internodium
  Zustand 1: verzweigtes Internodium

- Anlegen von Blütenknospen
- Polyzyklismus (Johannistriebbildung) in aufeinander folgenden Jahren an der selben Sprossachse

  Zustand 0: kein Johannistrieb
  Zustand 1: Johannistrieb wurde gebildet

Fortsetzung zur Walddynamik

$\vec{a}_t$ sei der Altersklassenvektor eines Bestandes zum Zeitpunkt t:

$$\vec{a}_t = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \leftarrow \quad \begin{array}{r} \text{Fläche mit Bäumen der 1. Altersklasse} \\ \text{der 2. Altersklasse} \\ \vdots \\ \text{der n. Altersklasse} \end{array}$$

Der Übergang zum nächsten Zeitschritt $t+1$:

$$P^T \cdot \vec{a}_t = \vec{a_{t+1}} \quad ,$$

darin ist $P := \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix}$ (und P^T die transponierte Matrix)

mit p_{jk} = *Anteil* der Fläche der j-ten Altersklasse, der in die k-te Altersklasse übergeht. (p_{jk} zwischen 0 und 1)

P beschreibt die Durchforstungsstrategie (+ eventuelle Kalamitäten etc.).

Nach k Schritten: $\vec{a_{t+k}} = (P^T)^k \cdot \vec{a}_t$.

Frage: Gibt es zu P eine *stabile Altersklassenverteilung* $\vec{a}^*$, $P^T \cdot \vec{a}^* = \vec{a}^*$, und wird diese irgendwann „von selbst“ erreicht (wenn P in allen Zeitschritten unverändert bleibt)?

P^T ist „stochastische Matrix“ :

$p_{j1} + p_{j2} + ... + p_{jn}$ = j-te Zeilensumme von P = 1 (weil Flächenanteile sich zu 1 addieren)

= j-te *Spalten*summe von P^T .

⇒ P^T hat den Eigenwert 1,

d.h. es existiert $\vec{a}^* \neq \vec{0}$ mit $P^T \cdot \vec{a}^* = 1 \cdot \vec{a}^* = \vec{a}^*$.

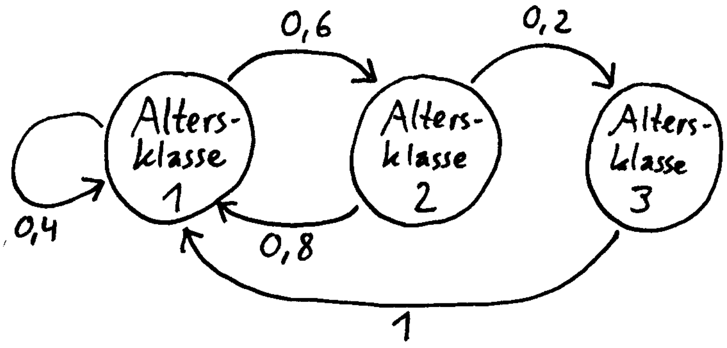
$\vec{a}^*$ ist *Eigenvektor zum Eigenwert* 1 von P^T ,

und damit Fixpunkt von f: $\vec{x} \mapsto P^T \cdot \vec{x}$.

Man kann beweisen: Wenn in P nicht mehr Nullen vorkommen als für Altersklassen-Übergangsmatrizen notwendig, ist $\vec{a}^*$ sogar *anziehender* Fixpunkt (Strudelpunkt), d.h. für jede Start-Altersklassenverteilung $\vec{a}_0$ *konvergiert* die Folge $\vec{a}_0$, $P^T \cdot \vec{a}_0$, $(P^T)^2 \cdot \vec{a}_0$, $(P^T)^3 \cdot \vec{a}_0$, ... gegen $\vec{a}^*$, sofern nur die Gesamt-Bestandesfläche (= Summe der Komponenten) von $\vec{a}_0$ und $\vec{a}^*$ übereinstimmt.

Beispiel 2.34: Es werden drei Altersklassen betrachtet.
Die Übergänge seien wie folgt:

Abbildung 43



$p_{1,1} = 0{,}4$
$p_{1,2} = 0{,}6$

$p_{2,1} = 0{,}8$
$p_{2,3} = 0{,}2$

$p_{3,1} = 1$
Rest = 0

⇒ $P=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $P^T=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}8 & 1\\ 0{,}6 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0\end{bmatrix}$

P^{T} hat Spaltensumme = 1 in allen Spalten ⇒ P^{T} hat den Eigenwert 1.

Gesucht: Eigenvektor $\vec{a}^*$ zum Eigenwert 1.

$P^T\cdot\vec{a}^*=1\cdot\vec{a}^*$. ⇔ $(P^T-E)\cdot\vec{a}^*=\vec{0}$.

$$P^T-E=\begin{bmatrix}0{,}4-1 & 0{,}8 & 1\\ 0{,}6 & 0-1 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}6 & 0{,}8 & 1\\ 0{,}6 & -1 & 0\\ 0 & 0{,}2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcccc|c}
 & -0{,}6 & 0{,}8 & 1 & & 0\\
 & 0{,}6 & -1 & 0 & & 0\\
 & 0 & 0{,}2 & -1 & & 0\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ \hline
 & 3 & -4 & -5 & & 0\\
 & 3 & -5 & 0 & & 0\\
 & 0 & 1 & -5 & & 0\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ \hline
 & 3 & -4 & -5 & & 0\\
\Rightarrow & 0 & -1 & 5 & & 0\\
 & 0 & 1 & -5 & & 0\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ \hline
 & 3 & 0 & -25 & & 0\\
 & 0 & -1 & 5 & & 0\\
 & 0 & 0 & 0 & & 0\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ \hline
 & 1 & 0 & -\frac{25}{3} & & 0\\
 & 0 & 1 & -5 & & 0
\end{array}$$

⇒ $a_1-\frac{25}{3}a_3=0$, $a_2-5a_3=0$

⇒ $a_1=\frac{25}{3}a_3$, $a_2=5a_3$ a_3 zunächst frei wählbar: $a_3=c$ $\neq 0$.

⇒ allgemeine Lösung: $\vec{a}^* = \begin{bmatrix}\frac{25}{3}c\\ 5c\\ c\end{bmatrix}$, $c\neq 0$.

Probe: $P^T\cdot\vec{a}^* = \begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}8 & 1\\ 0{,}6 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{25}{3}c\\ 5c\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{10}{3}c+4c+c\\ 5c\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{25}{3}c\\ 5c\\ c\end{bmatrix}$. √

Sei die Gesamt-Bestandesfläche z.B. 86 ha.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 86$$

$$\Rightarrow \quad \frac{25}{3}c + 5c + c = 86 \quad \Rightarrow \quad c \cdot \left(\frac{25}{3} + 5 + 1\right) = c \cdot \frac{43}{3} = 86$$

$$\Rightarrow \quad c = 86 \cdot \frac{3}{43} = 2 \cdot 3 = 6$$

also: $a_1 = \frac{25}{3} \cdot 6 = 50$ $\quad a_2 = 5 \cdot 6 = 30$ $\quad a_3 = 6$

$$\vec{a}^{\,*} = \begin{bmatrix} 50 \text{ ha} \\ 30 \text{ ha} \\ 6 \text{ ha} \end{bmatrix}$$

Dieses ist die stationäre Altersklassen-Verteilung, auf die das System (bei gleich bleibender Durchforstungsstrategie *P*) „zustrebt".

Beachte: 1. Es wird keine Aussage gemacht, ob diese stationäre Verteilung besonders „naturnah", „erwünscht" oder „vielfältig" ist.
2. Bei *nichtlinearen* Systemen in der Physik oder Ökologie (= nicht mehr durch $\vec{x} \mapsto P^T \cdot \vec{x}$ beschreibbar) kann es Attraktoren (sich „von selbst" einstellende Zustandsmengen/Verteilungen) geben, die *nicht punktförmig* sind:
- zyklische Attraktoren (z.B. beim Pendel),
- „seltsame Attraktoren" (→ Chaostheorie), dort ist keine Vorhersage über längere Zeiträume möglich.

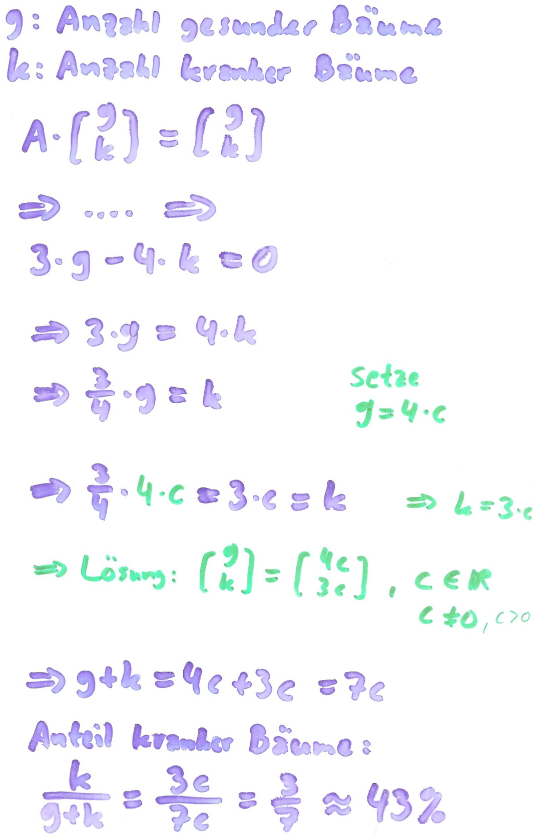
D.h., wir haben nur einen sehr einfachen „Idealfall" behandelt.

Das sollte man nach dem Besuch der Vorlesung und Übungen beherrschen:

- rechnerische Anwendung der Operationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit Skalar, Skalarprodukt, Vektorprodukt)
- lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit ermitteln
- Berechnen der Länge von Vektoren
- Unterschied: Matrix – Determinante
- Regeln zur Berechnung von Determinanten (Kreuzregel, Sarrussche Regel, Entwicklungsformeln)
- Eigenschaften der Determinante
- Summe und Differenz von Matrizen
- Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

- Multiplizierbarkeit von Matrizen miteinander, Anwendung
- Transponieren einer Matrix
- Satz von Frobenius (Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme)
- Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens
- Gauß-Jordan-Methode der vollständigen Elimination
- Eigenvektoren / Eigenwerte und deren Berechnung
- Fixpunktbestimmung
- Wie ist die Übergangsmatrix *P* in der Populationsdynamik aufgebaut? Wie ändert sich ein Vektor durch Multiplikation mit *P*? Wie ändert er sich, wenn er unendlich oft mit *P* multipliziert wird?

Anhang zu Kapitel 2



g: Anzahl gesunder Bäume

k: Anzahl kranker Bäume

$A \cdot \begin{bmatrix} g \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ k \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow$

$3 \cdot g - 4 \cdot k = 0$

$\Rightarrow 3 \cdot g = 4 \cdot k$

$\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot g = k$

Setze

$g = 4 \cdot c$

$\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot c = 3 \cdot c = k$ $\Rightarrow k = 3 \cdot c$

$\Rightarrow$ Lösung: $\begin{bmatrix} g \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c \\ 3c \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$

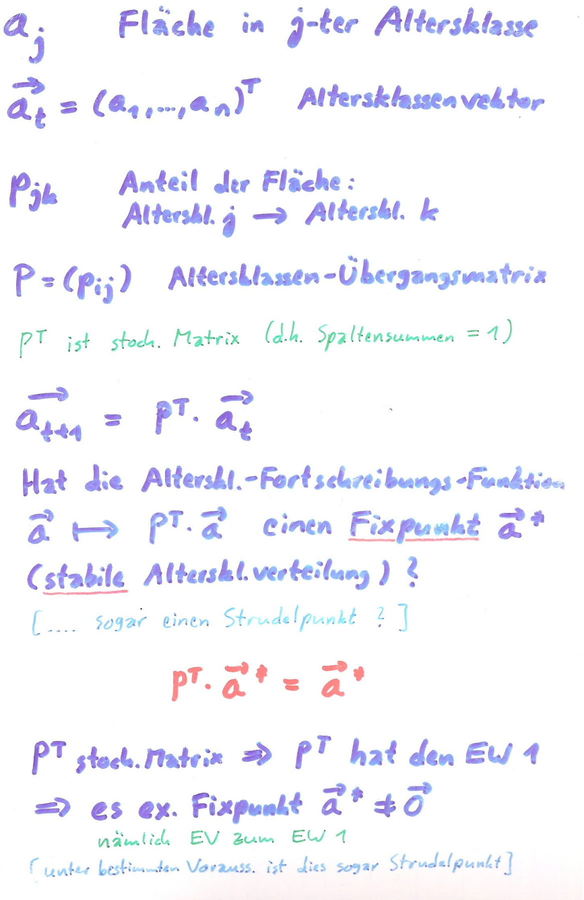
$c \neq 0$, $c > 0$

$\Rightarrow g + k = 4c + 3c = 7c$

Anteil kranker Bäume:

$\frac{k}{g+k} = \frac{3c}{7c} = \frac{3}{7} \approx 43\%$

Abbildung A14



a_j Fläche in j-ter Altersklasse

$\vec{a}_t = (a_1, \ldots, a_n)^T$ Altersklassenvektor

p_{jk} Anteil der Fläche:

Alterskl. $j \rightarrow$ Alterskl. k

$P = (p_{ij})$ Altersklassen-Übergangsmatrix

P^T ist stoch. Matrix (d.h. Spaltensummen $= 1$)

$\vec{a}_{t+1} = P^T \cdot \vec{a}_t$

Hat die Altersk l.-Fortschreibungs-Funktion

$\vec{a} \mapsto P^T \cdot \vec{a}$ einen Fixpunkt $\vec{a}^*$

(stabile Alterskl.verteilung) ?

[.... sogar einen Strudelpunkt ?]

$P^T \cdot \vec{a}^* = \vec{a}^*$

P^T stoch. Matrix $\Rightarrow$ P^T hat den EW 1

$\Rightarrow$ es ex. Fixpunkt $\vec{a}^* \neq \vec{0}$

nämlich EV zum EW 1

[unter bestimmten Vorauss. ist dies sogar Strudelpunkt]

Abbildung A15