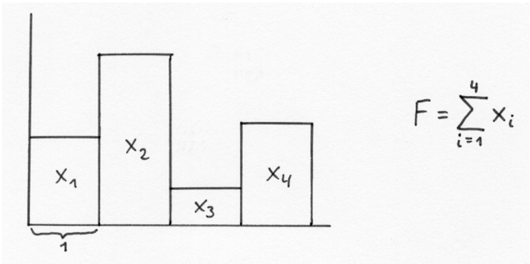
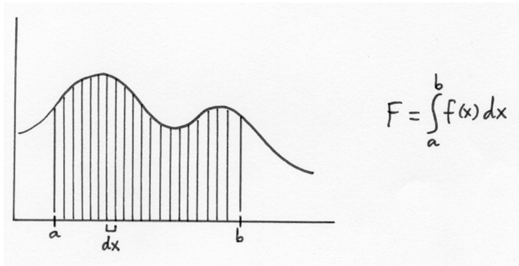
Integralrechnung als Verallgemeinerung der Summenbildung

Die Berechnung des bestimmten Integrals einer Funktion auf einem Intervall lässt sich als eine "unendlich feine" Addition auffassen (*Abb. 125*).

Abbildung 125





Aus der Fläche $F = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (bei gleicher Basislänge $\Delta x = 1$ der Rechtecke und bei positiven Funktionswerten) wird bei Übergang zu immer kleineren Basislängen im Grenzfall das Integral $F = \int_a^b f(x)dx$. Der formale Ausdruck "*dx*" hinter dem Integralzeichen kann hier als "unendlich kleine" Basislänge der Rechtecke aufgefasst werden.

Diese Interpretation des Integrals als Grenzfall einer Summe mit unendlich vielen, unendlich kleinen Summanden gilt nicht nur für die Flächenberechnung. Es gibt auch nicht-geometrische Anwendungen, z.B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bei einem Zufallsexperiment mit endlich vielen möglichen Ausgängen *x* ist der *Mittelwert* definiert als

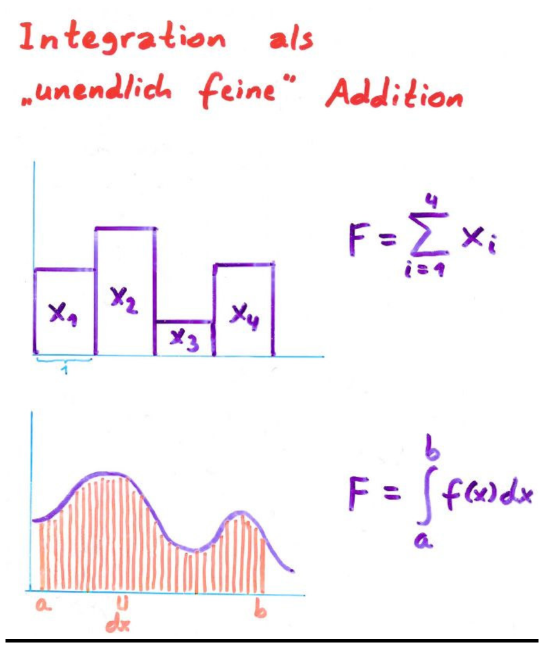
$$\bar{x} = \sum_{\text{alle Ergebnisse } x} x \cdot \textit{relative Häufigkeit}(x)$$

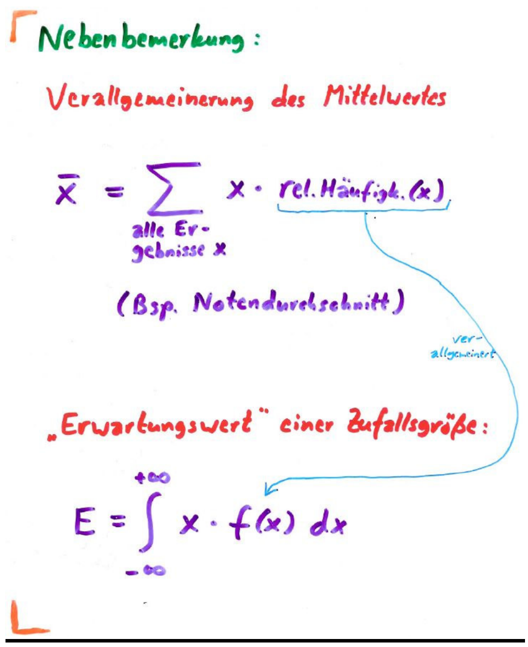
(man denke etwa an das Beispiel "Notendurchschnitt bei einer Klausur", wo *x* die Noten von 1 bis 6 durchläuft). In Verallgemeinerung hiervon definiert man den *Erwartungswert* einer Zufallsgröße, die *unendlich viele* Werte zwischen –∞ und +∞ annehmen kann, als das Integral

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Hierin ist $f(x)$ eine Funktion, die die Zufallsgröße charakterisiert, die sogenannte *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.* Zufallsgrößen und ihre Erwartungswerte werden in der Biometrie ausführlich behandelt.

Zusammenfassung:

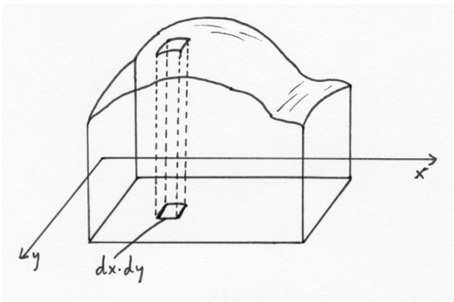




Integration von Funktionen mehrerer Variablen

Der Funktionsgraph einer Funktion von zwei Variablen ist eine Fläche im dreidimensionalen Raum. Das Volumen, das zwischen dieser Fläche und einem rechteckigen Ausschnitt B der xy-Ebene liegt, können wir durch Säulen immer kleinerer Basisfläche $\Delta x \cdot \Delta y$ ausschöpfen, bis wir im Grenzfall "unendlich viele, unendlich dünne" Säulen mit einer infinitesimal kleinen Basisfläche $dx \cdot dy$ erhalten (*Abb. 126*) — analog zum Übergang von der Summe zum Integral im Fall einer einzigen Variablen x.

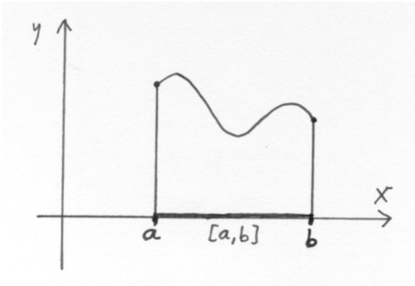
Abbildung 126

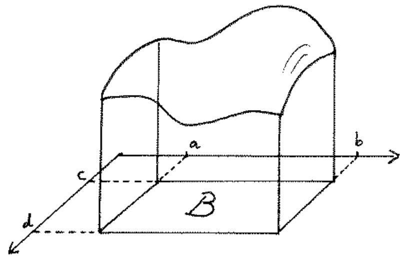


$$V = \int_B f(x, y)dxdy$$

Wir können somit das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a, b]$ verallgemeinern auf reellwertige Funktionen $f(x, y)$ mit zwei Variablen, wobei der Integrationsbereich B (welcher das Intervall auf zwei Dimensionen verallgemeinert) zunächst ein Rechteck ist. (Allgemeiner kann man auch nahezu beliebige Teilmengen der xy-Ebene als Integrationsbereich verwenden.) Man spricht von einem *Gebietsintegral* über dem Gebiet B. Abbildung 127 stellt die beiden Fälle (Integral einer Funktion mit einer und mit zwei Variablen) nebeneinander.

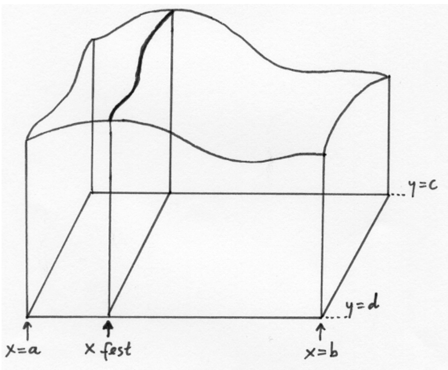
Abbildung 127





Wie lässt sich nun so ein Gebietsintegral konkret berechnen?
Glücklicherweise brauchen wir keine ganz neuen Rechenregeln für diesen Typ von Integral einzuführen, sondern es ist eine *Rückführung auf eine zweimalige "einfache" Integration* möglich. Abbildung 128 verdeutlicht dies: Für ein festes x können wir die Schnittfläche $S(x)$ des zu bestimmenden Volumens mit der durch den festen x-Wert definierten Ebene ausrechnen als ein einfaches Integral. Bei dieser Integration variiert nur noch y als Integrationsvariable.

Abbildung 128



Schnittfläche = $S(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ (x fest).

Das Volumen V bekommen wir nun, indem wir die Schnittflächen *für alle verschiedenen x* aufintegrieren: $V = \int_a^b S(x)dx$.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, zuerst die Schnitte für festes y zu bestimmen und dann über y zu integrieren.
Zusammenfassend erhalten wir für die Berechnung von Gebietsintegralen über rechteckigen Gebieten B den

<u>Satz von Fubini:</u>
Es sei B das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ in der xy-Koordinatenebene, dieses ist also begrenzt durch die Bedingungen $a \le x \le b$ und $c \le y \le d$. Die Funktion $f(x, y)$ sei auf B definiert und stetig. Dann gilt:

$$\int_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \ .$$

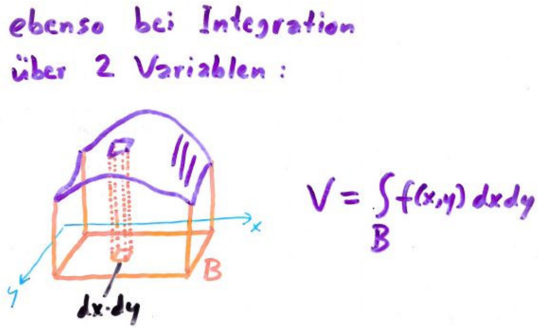
Das Gebietsintegral wird so also auf einfache Integrale zurückgeführt, wobei die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf.

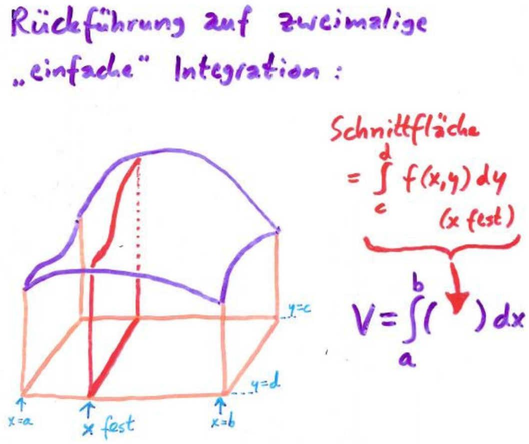
Beispiel:
$f(x, y) = x+y$, $[a, b] = [0; 1]$, $[c, d] = [2; 4]$:

$$\int_B f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_2^4 (x+y)dy \right) dx = \int_0^1 [xy + \tfrac{1}{2} y^2]_{y=2}^{y=4} \, dx = \int_0^1 (4x + 8 - 2x - 2)dx$$

$$= \int_0^1 (2x+6)dx = [x^2 + 6x]_0^1 = 1 + 6 = 7.$$

Zusammenfassung:

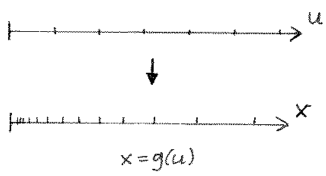




Die Substitutionsmethode bei Gebietsintegralen

Wenn wir eine Neuskalierung der Koordinatenachse durchführen (was einer Substitution etwa von $g(u)$ für x entspricht; Abb. 129 — Beispiel: logarithmische Skalierung, $x = \ln u$), so wird beim Integrieren von Funktionen $f(x)$, wie wir früher schon gesehen haben, ein *Korrekturfaktor* erforderlich:

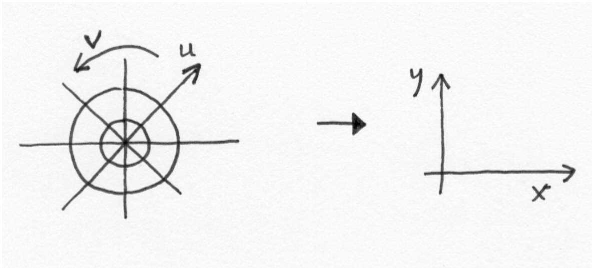
Abbildung 129



$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)\, du$ (Substitutionsregel für einfache Integrale).

Eine analoge Situation haben wir bei Gebietsintegralen. Allerdings betrifft hier eine Neuskalierung oder Koordinatentransformation im Allgemeinen *beide* Koordinatenachsen; die Transformation wird beschrieben durch zwei Funktionen g und h gemäß $x = g(u, v)$ und $y = h(u, v)$. Dabei ist (u, v) das Ausgangssystem und (x, y) das transformierte Koordinatensystem (Beispiel: Übergang von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten; *Abb. 130*).

Abbildung 130



Die Neuskalierung (Koordinatentransformation) erfordert für das Integral auch hier einen *Korrekturfaktor*, wenn man zu den neuen Integrationsvariablen übergeht. Wir nennen diesen Faktor, der sich etwas komplizierter berechnet als im eindimensionalen Fall, $\Delta(u, v)$:

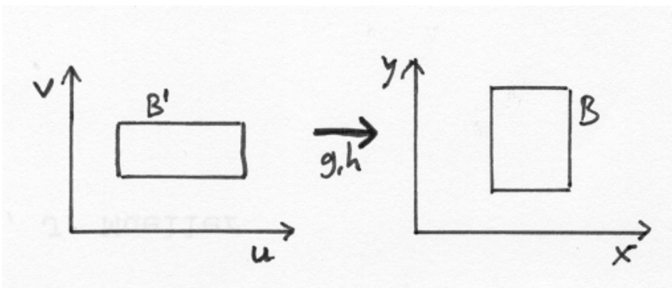
$$\int f(x, y)dxdy = \int f(g(u,v), h(u,v)) \cdot \Delta(u,v)\, dudv$$

Der Korrekturfaktor lässt sich berechnen als eine Determinante aus partiellen Ableitungen, die sogenannte *Funktionaldeterminante*:

$$\Delta(u,v) = \begin{vmatrix} g_u(u,v) & g_v(u,v) \\ h_u(u,v) & h_v(u,v) \end{vmatrix} .$$

Der Integrationsbereich muss — wie beim eindimensionalen Fall — ebenfalls mittransformiert werden. Damit gelangen wir zur

<u>Substitutionsregel für Gebietsintegrale:</u>
Es sei B eine Teilmenge der (x, y)-Ebene, $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ mit differenzierbaren Funktionen g und h (Koordinatentransformation). B' sei das Urbild von B in der (u, v)-Ebene unter g und h:



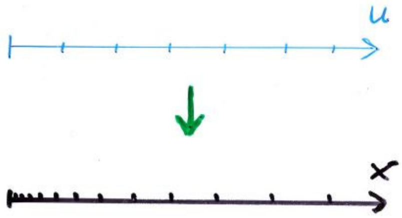
Dann gilt (unter geeigneten Voraussetzungen für die Funktionen f, g und h):

$$\int_B f(x, y)dxdy = \int_{B'} f(g(u,v), h(u,v)) \cdot \Delta(u,v)\, du\, dv \ .$$

Darin ist $\Delta(u, v)$ die Funktionaldeterminante der Substitution (g, h) (siehe oben).

Zusammenfassung:

Neuskalierung der Koordinatenachse $\hat{=}$ Substitution:



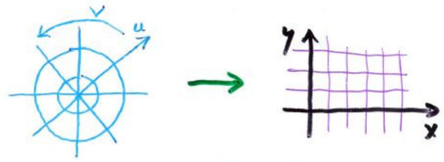
$x = g(u)$

dies erfordert beim Integrieren einen Korrekturfaktor:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)\,du$$

(Substitutionsregel)

Analog bei 2 Koordinaten:



$x = g(u,v)$
$y = h(u,v)$

Neuskalierung (Koordinatentransformation) erfordert Korrekturfaktor:

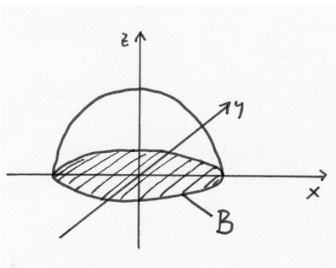
$$\int f(x,y)\,dx\,dy = \int f(g(u,v), h(u,v)) \cdot \Delta(u,v)\,du\,dv$$

$$\Delta(u,v) = \begin{vmatrix} g_u(u,v) & g_v(u,v) \\ h_u(u,v) & h_v(u,v) \end{vmatrix}$$

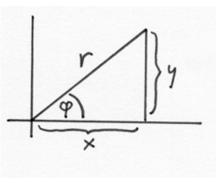
Det. der partiellen Abl. („Funktionaldeterminante")

Beispiel:
Transformation auf Polarkoordinaten (r, φ).
Es sei B die Kreisscheibe mit Radius 1; $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ beschreibt eine Halbkugelschale über B. Gefragt ist nach dem darunter befindlichen Volumen (untere Begrenzung: xy-Ebene; *Abb. 131*).

Abbildung 131



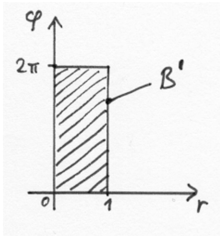
Polarkoordinaten:



$x = g(r, \varphi) = r \cdot \cos \varphi$, $\qquad y = h(r, \varphi) = r \cdot \sin \varphi$.

Für die Funktionaldeterminante benötigen wir die partiellen Ableitungen von g und h:
$g_r(r, \varphi) = \cos \varphi$, $\quad g_\varphi(r, \varphi) = -r \sin \varphi$,
$h_r(r, \varphi) = \sin \varphi$, $\quad h_\varphi(r, \varphi) = r \cos \varphi$.
Daraus erhalten wir: $\Delta(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$.

Ein Kreis hat in Polarkoordinaten eine besonders einfache Darstellung: Der Kreis B ist dadurch charakterisiert, dass r von 0 bis 1, und φ von 0° bis 360°, bzw. (in Bogenmaß) von 0 bis 2π läuft. Somit ist
$B' = [0; 1] \times [0; 2\pi]$. — Das heißt, wir haben aus dem Kreis ein Rechteck gemacht!



Somit gilt:

$$V = \int_B f(x,y)dxdy = \int_{B'} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\cdot\Delta(r,\varphi)\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi \qquad \text{(wegen } \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\text{);}$$

das innere Integral lösen wir durch die Substitution $t = 1 - r^2$ ($\frac{dt}{dr} = -2r$, somit $dt = -2r\cdot dr$);
wir führen den Faktor $1 = (-1/2)\cdot(-2)$ ein, der den Wert nicht ändert:

$$V = \int_0^{2\pi}\left((-\tfrac{1}{2})\cdot\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot(-2r)\,dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(-\tfrac{1}{2}\cdot\int_{t=1}^{t=0}\sqrt{t}\cdot dt\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\tfrac{2}{3}\cdot 1 - \tfrac{2}{3}\cdot 0)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tfrac{2}{3}\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi = \frac{1}{3}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi \;.$$

(Ein Vergleich mit der Formelsammlung zeigt, dass wir richtig gerechnet haben: Das Volumen der Vollkugel mit Radius R ist $\frac{4}{3}\pi\cdot R^3$; in unserem Fall ist $R = 1$.)

Zusammenfassung

Unser Beispiel war:

B = Einheitskreisscheibe,

$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ beschreibt Halbkugelschale über B

Polarkoordinaten:

$x = g(r,\varphi) = r\cdot\cos\varphi$

$y = h(r,\varphi) = r\cdot\sin\varphi$

Kreis in Polarkoord. $= B' = [0;1]\times[0;2\pi]$ (Rechteck)

$\Delta(r,\varphi) = \begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix} = r$

ist der Korrekturfaktor bei der Integration.

Somit gilt:

$$V = \int_B f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{B'} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\cdot\Delta(r,\varphi)\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\cdot\sin^2\varphi}\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$$= \int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^1 1\cdot\sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr}\,d\varphi$$

inneres Integral lösen durch Subst.: $t = 1 - r^2$

$\Rightarrow \frac{dt}{dr} = -2r$

$\Rightarrow dt = -2r\cdot dr$

$1 = (-\frac{1}{2})\cdot(-2)$

$$= \int_0^{2\pi}\left((-\tfrac{1}{2})\cdot\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot(-2r)\,dr\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\tfrac{1}{2}\cdot\int_{t=1}^{t=0}\sqrt{t}\cdot dt\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt\right)d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\tfrac{2}{3}\cdot 1 - \tfrac{2}{3}\cdot 0)\,d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tfrac{2}{3}\,d\varphi \qquad = \tfrac{1}{3}\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi$$

$\int_0^{2\pi} 1\,dx \to [x]_0^{2\pi}$

$$= \tfrac{1}{3}[\varphi]_0^{2\pi} \qquad = \tfrac{1}{3}\cdot 2\pi$$

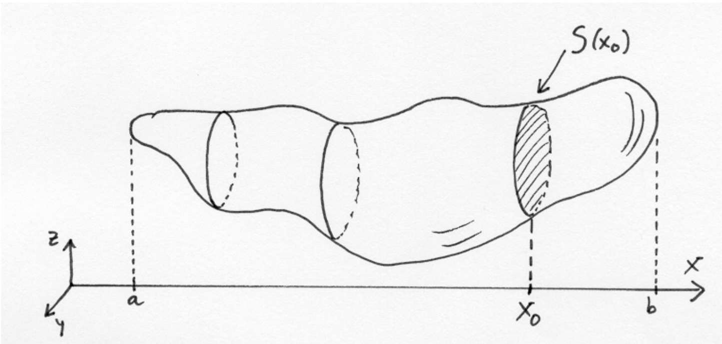
$$= \tfrac{2}{3}\pi \;.$$

(Vol. der Vollkugel mit Radius R: $\frac{4}{3}\pi\cdot R^3$, hier $R=1$.)

Mehr über Volumenberechnung

Sind die *Querschnittsflächen* $S(x)$ eines Körpers parallel zur yz-Ebene bekannt, so vereinfacht sich die Volumenberechnung. Man braucht dann kein doppeltes Integral zu bilden, sondern kann direkt die Querschnittsflächen aufintegrieren (Abb. 132):

Abbildung 132



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Diese Formel gilt insbesondere bei *Rotationskörpern*. Bei einem Körper, der durch Rotation einer Kurve um die x-Achse entsteht, sind alle Querschnitte parallel zur yz-Ebene kreisförmig mit einem von x abhängigen Radius r; das heißt: $S(x)$ ist dann die Kreisfläche $\pi \cdot (r(x))^2$.
Man erhält also für das Volumen eines Rotationskörpers, der durch Drehung einer stetigen Kurve $r(x)$ um die x-Achse erzeugt wird und sich auf der x-Achse von a nach b erstreckt:

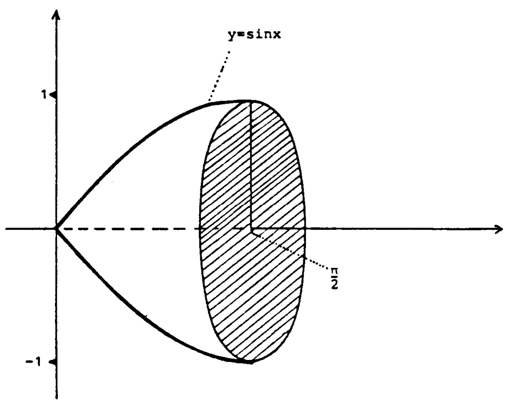
$$V = \pi \cdot \int_a^b r^2(x)dx\,.$$

Analog sind natürlich die Fälle zu behandeln, dass eine Kurve um die y- oder um die z-Achse rotiert: Es sind einfach die Integrationsvariablen entsprechend auszutauschen.

Beispiel:

Man bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der durch die Rotation der Kurve $y = \sin x$ um die x-Achse im Intervall $[0; \pi/2]$ erzeugt wird (*Abb. 133*).

Abbildung 133



Lösung:
Bei der Berechnung des Integrals verwenden wir die Formel cos 2α = 1 – 2 sin²α, die wir nach sin²α auflösen.

$$V_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} \ .$$

Volumen eines Baumschaftes

Der Baumschaft sei durch eine Schaftformfunktion f gegeben.
In der ertragskundlichen Literatur sind verschiedene Funktionsansätze (Schaftformmodelle) für f in Gebrauch, zum Beispiel:

$$f(x) = a \cdot f(0) \cdot \log \frac{b+H-x}{b}$$ (HÖJER 1903),

$$f(x) = \frac{(x-1{,}3) \cdot f(1{,}3)}{a(H-1{,}3)+b(x-1{,}3)}$$ (BEHRE 1923),

$$f(x) = a \cdot f(1{,}3) \cdot \left(\frac{H-x}{H}\right)^{\gamma}$$ (DEMAERSCHALK 1973),

$$f(x) = M_{\lambda}(x) \cdot \left(1 - e^{-K(x)\cdot t} \left(1 - \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{-K(x)}{k}}\right)^{N}$$ (SLOBODA 1977),

$$f(x) = i + (f(1{,}3) - i)\, e^{p(1{,}3-x)} - \frac{p_i}{p+q}\left(e^{q(x-H)} - e^{q(1{,}3-H)+p(1{,}3-x)}\right)$$ (BRINK & v. GADOW 1986).

(x ist die Höhe in m, H die Gesamthöhe des Schaftes, $f(x)$ gibt den Radius in der Höhe x an, alle weiteren Buchstaben sind Parameter.)

Bei der praktischen Anwendung entscheidet man sich für eines der Modelle und passt die Parameter so an, dass für ein empirisch gewonnenes Kollektiv realer Schaftformkurven eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen Modell und realen Kurven besteht. Für die Berechnung des Volumens muss man sich ebenfalls auf eine der Modellkurven für f festlegen.

Ein Punkt auf der Schaftoberfläche sei zum Zeitpunkt t durch den Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gegeben. Üblicherweise betrachtet man einen Schnitt durch den liegenden Baumstamm, d.h. auf der x-Achse ist die Höhe h und auf der y- Achse der Radius des Baumes abgetragen. Das Volumen des Baumstammes kann man mit Hilfe des Rotationskörpers bestimmen, der entsteht, wenn man die Schaftformfunktion um die x-Achse rotieren lässt. Dabei nimmt man stillschweigend an, dass der Baum in alle Himmelsrichtungen gleichmäßig gewachsen ist und seine Stammscheiben somit kreisförmig sind. Das bestimmte Integral über diesen Rotationskörper gibt dann das Volumen des Schaftes oder, je nach Wahl der Grenzen, eines Stammabschnittes an.
Anschaulich kann man sich das Rotationsintegral als Summe lauter zylinderförmiger Stammscheiben der Breite Δx vorstellen. Das Volumen eines Zylinders berechnet sich allgemein aus der Grundfläche (Kreis: $\pi \cdot r^2$) multipliziert mit der Höhe. Die Grundfläche der Stammschei-

ben wird durch den Radius in der jeweiligen Höhe x_i bestimmt, der wiederum an jeder Stelle durch den Funktionswert der Schaftformfunktion zum Zeitpunkt t: $f_t(x_i)$ gegeben ist.

$$\begin{array}{llll} & \text{Grundfläche Stammscheibe} & = & \pi \cdot f_t^{\,2}(x_i) \\ & \text{Höhe} \quad \text{Stammscheibe} & = & \Delta x \\ \Rightarrow & \text{Volumen} \quad \text{Stammscheibe} & = & \pi \cdot f_t^{\,2}(x_i) \cdot \Delta x \\ \Rightarrow & \text{Volumen Baumstamm} & = & \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f_t^{\,2}(x_i) \cdot \Delta x \quad \text{(näherungsweise)} \end{array}$$

Lässt man nun die Breite der Stammscheiben gedanklich unendlich klein werden: $\Delta x \to dx$, so konvergiert die Summe gegen das Integral $V_t = \int_0^h \pi f_t^{\,2}(x)\,dx$ und die Volumenangabe wird exakt.

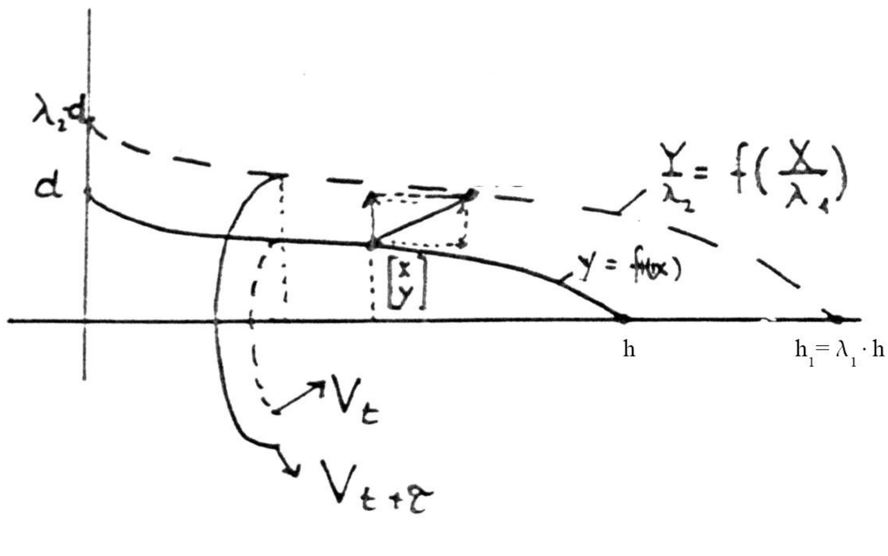
Bei Kenntnis der Baumschaftfunktion zum Zeitpunkt t lässt sich also das Volumen des Baumes durch $V_t = \int_0^h \pi f_t^{\,2}(x)\,dx$ bestimmen.

Geht man nun von zentroaffinem Wachstum, also einem Streckfaktor λ_1 in x-Richtung für das Höhenwachstum und einem Streckfaktor λ_2 in y-Richtung für das Dickenwachstum aus, so wird der Übergang vom Zeitpunkt t zum zukünftigen Zeitpunkt $t+\tau$ durch die lineare Abbildung:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{bmatrix}$$

beschrieben. Diese Abbildung ist auf jeden Punkt der Schaftoberfläche anzuwenden. Aus der Schaftformfunktion f_t zum Zeitpunkt t ergibt sich daraus eine neue Schaftformkurve $f_{t+\tau}$ zum Zeitpunkt $t+\tau$.

Abbildung 134



Wäre $f_{t+\tau}$ bekannt, ließe sich das Volumen des weitergewachsenen Baumes wie oben bestimmen:

$$V_{t+\tau} = \int_0^{h_1} \pi f_{t+\tau}^{\,2}(x)\,dx \quad .$$

Wie bereits in *Beispiel 6.11* (S. 200) soll auch hier $V_{t+\tau}$ in ein Integral über die Funktion f_t überführt und mit Hilfe einer Substitution bestimmt werden.

Es gilt:

$$x_t \quad \mapsto \quad \lambda_1 \cdot x_t = x_{t+\tau} \qquad \Rightarrow \qquad x_t = \frac{x_{t+\tau}}{\lambda_1}$$

$$f_t(x_t) \mapsto \lambda_2 \cdot f_t(x_t) = f_{t+\tau}(x_{t+\tau}) \qquad \Rightarrow \qquad f_{t+\tau}(x_{t+\tau}) = \lambda_2 \cdot f_t(x_t) = \lambda_2 \cdot f_t\left(\frac{x_{t+\tau}}{\lambda_1}\right)$$

Zu bestimmen ist also:

$$V_{t+\tau} = \int_0^{h_1} \pi \cdot \left(\lambda_2 \cdot f_t\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)\right)^2 dx \; = \; \int_0^{h_1} \pi \cdot \lambda_2^2 \cdot f_t^2\left(\frac{x}{\lambda_1}\right) dx \quad .$$

Substitution:

Sei $z = \frac{x}{\lambda_1}$ dann gilt: $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\lambda_1}$ $\Rightarrow$ $dx = \lambda_1 \cdot dz$

Substitution der oberen Grenze: $x = h_1 = \lambda_1 \cdot h$ wird zu $z = \frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1 \cdot h}{\lambda_1} = h$

Damit ergibt sich:

$$V_{t+\tau} = \int_0^h \pi \cdot \lambda_2^2 \cdot f_t^2(z) \cdot \lambda_1 \cdot dz = \int_0^h \pi \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 \cdot f_t^2(z) dz = \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 \cdot \int_0^h \pi \cdot f_t^2(z) dz$$

$$= \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 \cdot V_t$$

Man sieht, dass sich das Volumen des weitergewachsenen Baumes sehr einfach mit Hilfe der Streckfaktoren aus dessen vorherigem Volumen berechnen lässt:

$$V_{t+\tau} = \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 \cdot V_t$$

Die Streckfaktoren können durch Messungen von Höhe und Durchmesser bestimmt werden:

$$\lambda_1 = \frac{h_{t+1}}{h_t} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{d_{t+1}}{d_t} \quad .$$

Bei äquiformem Wachstum ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) gilt: $V_{t+\tau} = \lambda^3 \cdot V_t$.

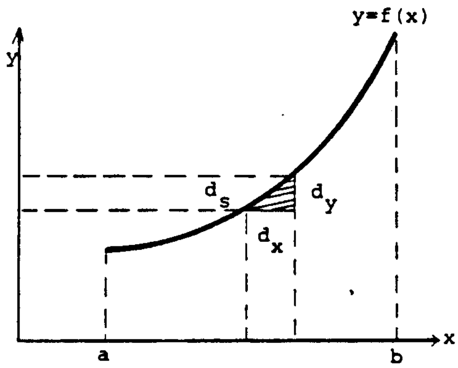
Weitere Anwendungen der Integralrechnung

Längen von ebenen Kurven

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Für den infinitesimal kleinen Kurvenabschnitt ds (*siehe Abb. 135*) können wir die Krümmung der Kurve vernachlässigen, erhalten ein geradlinig begrenztes rechtwinkliges Dreieck und können die Länge mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \ .$$

Abbildung 135



Für dy setzen wir das Differential $dy = f'(x)\ dx$ ein, ziehen dx vor die Wurzel und erhalten so:

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx \ .$$

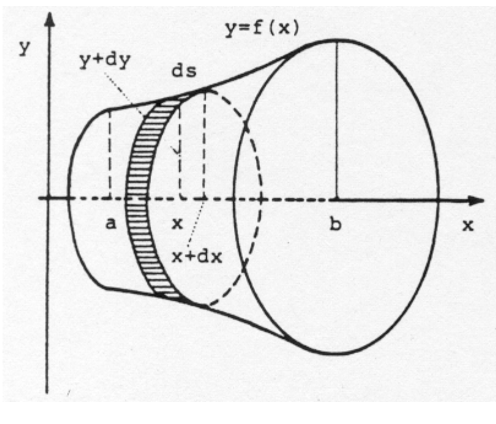
Durch die Integration dieses Ausdrucks erhalten wir die Formel für die Berechnung der Länge der Kurve:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \ .$$

Oberflächen von Rotationskörpern

Gegeben sei ein Rotationskörper mit der in $[a, b]$ differenzierbaren Konturkurve $y = f(x)$, z.B. eine Baumschaftkurve. Bei der Untersuchung des Stammabflusses oder der Respiration von Bäumen ist die Frage nach dem Flächeninhalt der Stammoberfläche von Bedeutung. Auch die Bestimmung von Oberflächen ist mit dem bestimmten Integral möglich und wird, wie bei der Längenberechnung, durch den Übergang zu infinitesimal "schmalen" Flächenstücken hergeleitet, deren Krümmung dann vernachlässigt werden kann (*Abb. 136*).

Abbildung 136



Der infinitesimal schmale Kegelstumpf zwischen x und $x+dx$ mit den Grundflächenradien $f(x)$ und $f(x+dx)$ hat die (in Abb. 136 schraffierte) Mantel-Oberfläche

$$dM = 2\pi \frac{y + (y + dy)}{2} \cdot ds = 2\pi\, y \cdot ds + \pi \cdot dyds$$

Bei den infinitesimal kleinen Größen dy und ds kann das Produkt $dyds$ im Grenzprozess gegenüber ds vernachlässigt werden. Mit $ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$ (siehe oben, Längenberechnung) ergibt sich für dM: $dM = 2\pi\, f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$.

Somit wird der gewünschte Oberflächen-Inhalt geliefert durch das Integral

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \ .$$

Schwerpunkt einer Fläche, Guldinsche Regel

Gegeben ist eine ebene Figur, die von einer Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Grenzen $x=a$, $x=b$ eingeschlossen wird. Wir nehmen an, dass die gesamte Figur eine homogene Massenverteilung aufweist (z.B. aus Papier ausgeschnitten ist, das überall gleich dick ist). Denkt man sich die Masse der Figur in ihrem *Schwerpunkt* konzentriert, so hat sie das gleiche Drehmoment (in Bezug auf einen beliebigen anderen Punkt) wie die homogene Massenbelegung. Die Fläche kann also z.B. durch Unterstützung in ihrem Schwerpunkt balanciert werden.
Der Schwerpunkt hat die folgenden Koordinaten (wir verzichten hier auf die Herleitung):

$$(x_0, y_0) = \frac{1}{\int_a^b f(x)\, dx} \left(\int_a^b x f(x) dx,\ \tfrac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx \right) .$$

Man beachte, dass der Zähler von y_0 gleich $(1/2\pi)\cdot V$ ist, wobei V das Volumen des von $f(x)$ erzeugten Rotationskörpers in den Grenzen a und b darstellt (siehe oben). Im Nenner steht die Fläche F unter der Kurve. Somit ist $y_0 = \frac{\frac{1}{2\pi} V}{F}$. Daraus ergibt sich die sogenannte *Guldinsche Regel*:

$$V = 2\pi \cdot y_0 \cdot F.$$

Darin ist $2\pi \cdot y_0$ der Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt bei der Rotation um die x-Achse zurücklegt. Man kann also das Volumen eines Rotationskörpers auch berechnen, indem man die Fläche zwischen der Konturkurve und der Rotationsachse bestimmt und mit der Weglänge multipliziert, die deren Schwerpunkt bei der Rotation zurücklegt.

Das sollte man nach dem Besuch von Vorlesung und Übung beherrschen:

- Berechnung der Stammfunktion (unbestimmtes Integral) zu einer Funktion f, Integrationsregeln
- insbesondere: partielle Integration; Substitutionsmethode
- Herleitung des bestimmten Integrals als Grenzwert von Ober- und Untersummen
- Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Fläche unter einem Funktionsgraphen
- Berechnung bestimmter Integrale mittels der Stammfunktion (Hauptsatz der Integralrechnung)
- Anwendung der Substitutionsmethode bei der Berechnung von bestimmten Integralen
- Berechnung von Gebietsintegralen von Funktionen zweier Veränderlicher über rechteckigen Gebieten
- Substitutionsregel für Gebietsintegrale, Transformation von kartesischen auf Polarkoordinaten
- Volumenberechnung von Rotationskörpern
- Volumenfortschreibung von Baumschäften unter der Annahme zentroaffinen Wachstums.