KAPITEL 6: GRUNDLAGEN DER INTEGRALRECHNUNG

Grundlegende Kenntnisse der Integralrechnung sind für Forstleute nicht weniger wichtig als die Grundlagen der Differentialrechnung. Bekanntlich wird die Wachstumsfunktion einer forstlichen Taxationsgröße als Integral der „Zuwachsfunktion“ aufgefasst, und die Problematik des Baumvolumens und des Volumenzuwachses ist mit den Grundlagen der Integralrechnung eng verbunden. Erwartungswerte (Mittelwerte) in der Biometrie werden als Integrale definiert. Hier soll auf die Grundlagen der Integralrechnung der Funktion einer Variablen eingegangen werden. Zunächst zum unbestimmten Integral als inverse Operation zur Ableitung.

Unbestimmtes Integral oder Stammfunktion

Definition 6.1:

Die Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion zu $f(x)$ im Intervall $[a,b]$, wenn für $\forall x \in (a, b)$ gilt:

$$F'(x) = f(x);$$

$$\text{also } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x; \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x = f(x).$$

Bemerkung

Die Stammfunktion $F(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ immer stetig, da, wie aus der Differentialrechnung bekannt ist, eine in $x \in [a, b]$ differenzierbare Funktion in diesem Punkt immer stetig ist.

Beispiel 6.1:

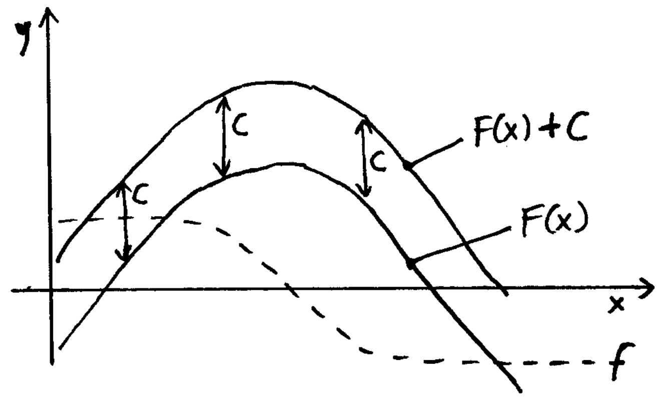
Die Funktion x^4+7 ist Stammfunktion zur Funktion $4x^3$ im Intervall $(-\infty,\infty)$, da $(x^4+7)'=4x^3$.

Satz 6.1:

Wenn $F(x)$ Stammfunktion zur Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ ist, dann stellt $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist, die Menge aller Stammfunktionen zur Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ dar.

Geometrische Bedeutung:

Ein Graph der Stammfunktion zur Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ ist nicht nur der Graph der Funktion $F(x)$, sondern auch der Graph jeder Funktion $F(x) + C$, der durch Verschiebung des Graphen von $F(x)$ in Richtung der y-Achse entsteht.



Definition 6.2:

Die Menge $F(x) + C$ aller Stammfunktionen zur Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ heißt *unbestimmtes Integral* der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$.

Bezeichnung: $\int f(x)\mathrm{d}x \;=\; F(x) + C$

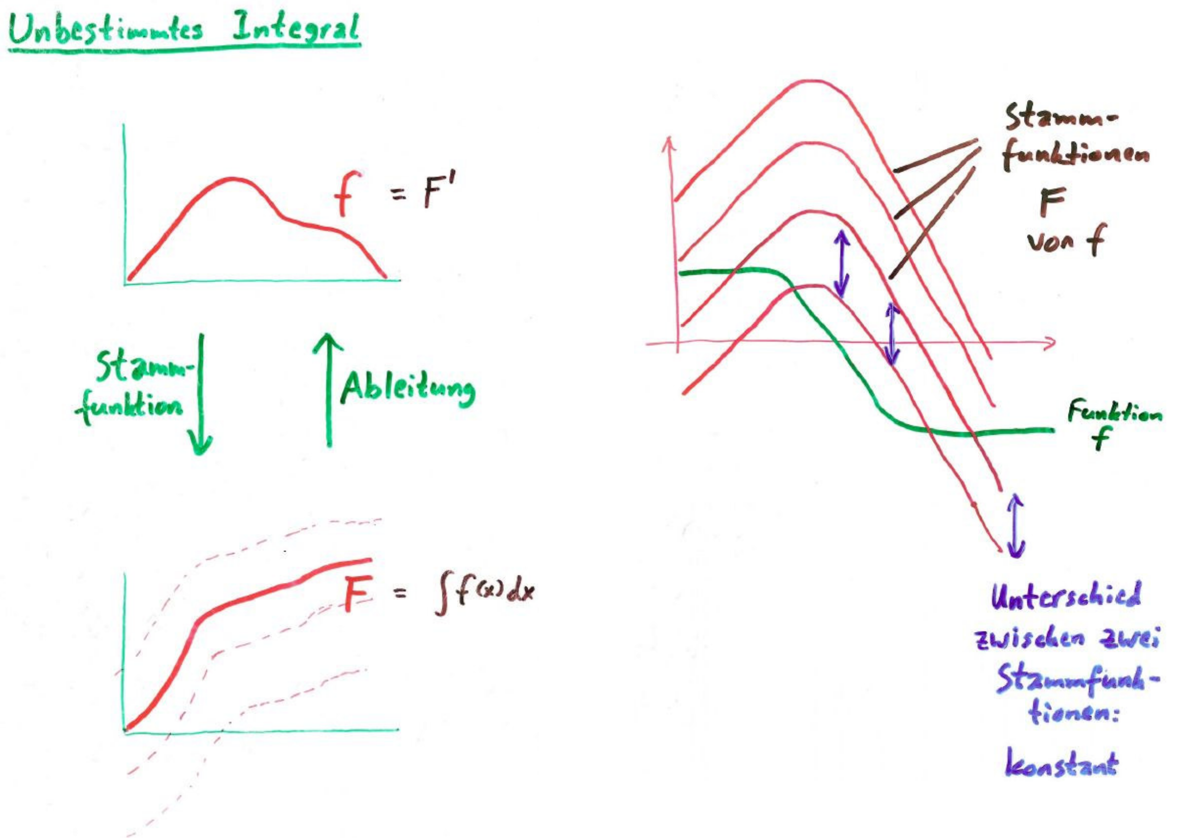
$f(x)$ heißt Integrand
x heißt Integrationsvariable
C heißt Integrationskonstante

Die Methoden und Schritte, die zur Berechnung von $\int f(x)\mathrm{d}x$ führen, nennt man *Integration*.

Aus der Definition 6.2 folgt unmittelbar:

$$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x] = \mathrm{d}[F(x) + C] = \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$
$$[\int f(x)\mathrm{d}x\,]' = [F(x) + C]' = f(x).$$

Zusammenfassung:



Um die Grundaufgabe der Integralrechnung leichter lösen zu können, müssen wir die Grundformeln für die Integration kennen. Diese Formeln werden mit Hilfe der Differentialformeln abgeleitet (*siehe Tabelle 6.2*). Hier ist wie folgt verfahren worden:

Wenn gilt $[F(x) + C]' \;=\; f(x)$, so ist auch die Gleichung $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ richtig.
Die Übersichtstabelle (oder eine Formelsammlung) gibt uns Auskunft über die Stammfunktionen von wichtigen, elementaren Funktionen (z.B. Potenz, exp, sin, cos).

Tabelle 6.1

Übersichtstabelle zur Ableitung von elementaren Funktionen		
	Einfache Form	Geschachtelte Form
I	$[c]'=0$	
II	$[x^n]'=n\,x^{n-1}$	$[f(x)^n]'=n(f(x))^{n-1}f\,'(x)$
III	$[e^x]'=e^x$	$[e^{f(x)}]'=e^{(f(x))}f\,'(x)$
	$[a^x]'=a^x\ln a$	$[a^{f(x)}]'=a^{(f(x))}\ln a\cdot f\,'(x),\, a>0$
IV	$[\ln x]'=\dfrac{1}{x},\, x>0$	$[\ln f(x)]'=\dfrac{f\,'(x)}{f(x)},\, f(x)>0$
	$[\log_a x]'=\dfrac{1}{x\ln a},\, x>0$	$[\log_a f(x)]'=\dfrac{1}{f(x)\ln a}f\,'(x),\, f(x)>0$
V	$[\sin x]'=\cos x$	$[\sin f(x)]'=\cos f(x)\,f\,'(x)$
	$[\cos x]'=-\sin x$	$[\cos f(x)]'=-\sin f(x)\,f\,'(x)$
	$[tg\,x]'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$[tg\,f(x)]'=\dfrac{1}{\cos^2 f(x)}f\,'(x)$
	$[cotg\,x]'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$[cotg\,f(x)]'=-\dfrac{1}{\sin^2 f(x)}f\,'(x)$
VI	$[\arcsin x]'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arcsin f(x)]'=\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}f\,'(x)$
	$[\arccos x]'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arccos f(x)]'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}f\,'(x)$
	$[arctg\,x]'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$[arctg\,f(x)]'=\dfrac{1}{1+f^2(x)}f\,'(x)$
	$[arccotg\,x]'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$[arccotg\,f(x)]'=-\dfrac{1}{1+f^2(x)}f\,'(x)$
VII	$[u_1+u_2+\ldots+u_n]'=u_1'+u_2'+\ldots+u_n'$	
	$[uv]'=uv'+u'v$	$[c\cdot u(x)]'=c\cdot u'(x)$
	$[u_1u_2\ldots u_n]'=u_1'u_2\ldots u_n+u_1u_2'\ldots u_n+\ldots+u_1u_2\ldots u_n'$	
VIII	$\left[\dfrac{u}{v}\right]'=\dfrac{u\,'v-uv\,'}{v^2}$	$\left[\dfrac{u(x)}{c}\right]'=\dfrac{u'(x)}{c}$
IX	$[f(x)^{g(x)}]'=f(x)^{g(x)}[g\,'(x)\ln f(x)+g(x)\dfrac{f\,'(x)}{f(x)}],\, f(x)>0$	

Tabelle 6.2

Übersichtstabelle zur Integration von elementaren Funktionen		
	Einfache Form	Geschachtelte Form
I	$\int dx = x+C$	
II	$\int \lambda\, dx = \lambda x + C$	
III	$\int \lambda x\, dx = \lambda \int x\, dx$	$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$
IV	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\, n \neq -1$	$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C,\, n \neq -1$
V	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + C$
VI	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
VII	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
VIII	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\int \sin f(x) f'(x) dx = -\cos f(x) + C$
IX	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$\int \cos f(x) f'(x) dx = \sin f(x) + C$
X	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tg\, f(x) + C$
XI	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -cotg\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -cotg\, f(x) + C$
XII	$\int \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\lambda} + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{\lambda^2 - f^2(x)}} dx = \arcsin \frac{f(x)}{\lambda} + C$
XIII	$\int \frac{1}{\sqrt{\lambda + x^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + \lambda}\right\| + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{\lambda + f^2(x)}} dx = \ln\left\|f(x) + \sqrt{f^2(x) + \lambda}\right\| + C$
XIV	$\int \frac{1}{\lambda^2 + x^2} dx = \frac{1}{\lambda} arctg \frac{x}{\lambda} + C$	$\int \frac{f'(x)}{\lambda^2 + f^2(x)} dx = \frac{1}{\lambda} arctg \frac{f(x)}{\lambda} + C$
XV	$\int \frac{1}{\lambda^2 - x^2} dx = \frac{1}{2\lambda} \ln\left\|\frac{\lambda + x}{\lambda - x}\right\| + C$	$\int \frac{f'(x)}{\lambda^2 - f^2(x)} dx = \frac{1}{2\lambda} \ln\left\|\frac{\lambda + f(x)}{\lambda - f(x)}\right\| + C$
XVI	$\int \frac{1}{x^2 - \lambda^2} dx = \frac{1}{2\lambda} \ln\left\|\frac{\lambda - x}{\lambda + x}\right\| + C$	$\int \frac{f'(x)}{f^2(x) - \lambda^2} dx = \frac{1}{2\lambda} \ln\left\|\frac{\lambda - f(x)}{\lambda + f(x)}\right\| + C$
XVII	$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	
XVIII	$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)] = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + \ldots + k_n \int f_n(x) dx$	

Elementare Integrationsverfahren

Integration durch Umformung des Integranden und durch Zerlegung des Integranden.

Beispiel 6.2:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2\,dx}{\sqrt{3-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+C$$

Siehe Formel XII in der *Tabelle 6.2*, mit $f(x) = 2x;\ f'(x) = 2;\ \lambda = \sqrt{3}$.

Beispiel 6.3:

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3}}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(\sqrt{5}x)^2+3}}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+3}\right|+C$$

Siehe Formel XIII in der *Tabelle 6.2* mit $f(x)=\sqrt{5}x;\ f'(x)=\sqrt{5},\lambda=3$.

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1+(\sin x)^2}dx = arctg\,\sin x+C$$

Siehe Formel XIV in der *Tabelle 6.2* mit $f(x) = \sin x;\ f'(x) = \cos x;\lambda = 1$.

$$\int \frac{e^x}{9-e^{2x}}dx = \int \frac{e^x}{9-(e^x)^2}dx = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{3+e^x}{3-e^x}\right|+C$$

Siehe Formel XV in der *Tabelle 6.2* mit $f(x) = e^x;\ f'(x) = e^x,\lambda = 3$.

Partielle Integration

Eine allgemeine Formel zur Integration des Funktionsproduktes gibt es nicht. In einigen Fällen lässt sich das Produkt mit der sogenannten *partiellen Integration* integrieren:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)dx \quad .$$

Bemerkung:

Die Funktionen $u(x)$, $v(x)$ seien in $[a, b]$ differenzierbar.
Nach *Tabelle 6.1*, Formel VII gilt:

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x) \quad .$$

Nach Definition des unbestimmten Integrals gilt folglich die Gleichung

$$\int [u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)]dx = u(x)\cdot v(x) \quad .$$

Diese kann wie folgt vereinfacht geschrieben werden:

$$(a)\int u'v\,dx = uv-\int uv'\,dx$$
$$(b)\int uv'\,dx = uv-\int u'v\,dx \quad .$$

Diese Gleichungen heißen die Formeln für die *partielle Integration*. Sie ermöglichen uns in einigen Fällen, das gegebene Integral zu berechnen oder zu vereinfachen. Soll eine der Formeln zur Berechnung des Integrals $\int f(x)\,dx$ angewandt werden, so muss der Integrand $f(x)$ in das Produkt zweier Funktionen $u'v$ oder uv' zerlegt werden. Für u' bzw. v' muss die Stammfunktion bekannt sein (u' bzw. v' kann auch 1 sein). Die Formel (a) führt die Berechnung des Integrals $\int u'v\,dx$ in die Berechnung von $\int uv'\,dx$ über.

Zusammenfassung:

Integrationsregeln

$$\int 1\,dx = x + C$$

$$\int k\,dx = k\cdot x + C$$

$$\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C \quad (k \neq -1)$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

„Partielle Integration"

$$\boxed{\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx}$$

Beispiel:

$$\int \underbrace{(\sin x)}_{u'}\cdot\underbrace{x}_{v}\,dx = \underbrace{(-\cos x)}_{u}\cdot\underbrace{x}_{v} - \int\underbrace{(-\cos x)}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'}\,dx$$

$u(x) = -\cos x$

$$= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cdot\cos x + \sin x + C$$

Beispiel für die Anwendung der partiellen Integration:

$$\int \underbrace{(\sin x)}_{u'}\cdot\underbrace{x}_{v}\,d\,x = \underbrace{(-\cos x)}_{u}\cdot\underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'}\,d\,x, \quad da\ u(x) = -\cos x \Rightarrow u'(x) = \sin x$$

$$= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,d\,x$$

$$= -x\cdot\cos x + \sin x + C$$

Bemerkung

Diese Methode ist dann vorteilhaft, wenn das Integral $\int uv'\,dx$ bereits bekannt oder einfacher als $\int u'v\,dx$ ist. Die Formeln für die partielle Integration lassen sich auch mehrfach hintereinander anwenden. Die Anwendung folgt an einigen typischen Beispielen (Zwischenrechnungen in senkrechten Doppelstrichen).

Beispiel 6.4:

$$(a)\quad I = \int x e^x dx = \left\| \begin{matrix} u' = e^x & u = e^x \\ v = x & v' = 1 \end{matrix} \right\| = x e^x - \int e^x\,d\,x = x e^x - e^x + C\ ,$$

ähnlich : $\int x \sin x\,dx$, $\int x \cos x\,dx$.

$$(b)\quad I = \int arctg\,x\,d\,x = \left\| \begin{matrix} u' = 1 & u = x \\ v = arctg\,x & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right\| = x\cdot arctg\,x - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$\left\| \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| \right\| = x\,arctg\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

ähnlich: $\int \arcsin x\,dx$, $\int \arccos x\,dx$.

$$(c)\ I = \int \ln x\,dx = \left\| \begin{matrix} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \dfrac{1}{x} \end{matrix} \right\| = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

$$(d)\ I = \int \ln^2 x\,dx = \left\| \begin{matrix} u' = 1 & u = x \\ v = \ln^2 x & v' = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} \end{matrix} \right\| = x\ln^2 x - \int 2\ln x\,dx = \left\| siehe \int \ln x\,dx \right\|$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

$$(e)\ I = \int x^2 e^x dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v = e^x & v' = e^x \end{matrix} \right\| = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = \left\| siehe \int x e^x dx \right\| = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Bemerkung 1:

Bei der Wahl der Funktionen müssen wir uns folgende Tatsachen klarmachen:
1. Zu $u'(x)$ muss die Stammfunktion bekannt sein.
2. Das Integral auf der rechten Seite soll einfacher sein als das ursprüngliche Integral auf der linken Seite.

Bemerkung 2:

Wird die Wahl im letzten Beispiel (e) umgekehrt getroffen, so erhält man auf der rechten Seite ein komplizierteres Integral als das ursprüngliche:

$$\int x^2 e^x dx = \left\| \begin{matrix} u' = x^2 & u = \dfrac{x^3}{3} \\ v = e^x & v' = e^x \end{matrix} \right\| = \frac{x^3}{3} \cdot e^x - \frac{1}{3} \int x^3 e^x dx \quad .$$

Mit Hilfe der partiellen Integration löst man Integrale, bei denen gewisse Funktionen in höheren Potenzen auftreten, z.B. $\int \sin^n x\, dx$, $\int x^n e^x\, dx$.

Substitutionsmethode

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi: I_1 \to I$ differenzierbar. Sei F eine Stammfunktion von f, also $F'(x) = f(x)$. Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{d}{dt} F(\phi(t)) = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \frac{d\phi}{dt} \quad .$$

Hieraus folgt, dass $F(\phi(t))$ Stammfunktion ist von $f(\phi(t)) \dfrac{d\phi(t)}{dt}$, d.h.

$$\int f(\phi(t)) \frac{d\phi}{dt} dt = F(\phi(t)) = f(x)dx \,\Big|_{x=\phi(t)} \quad .$$

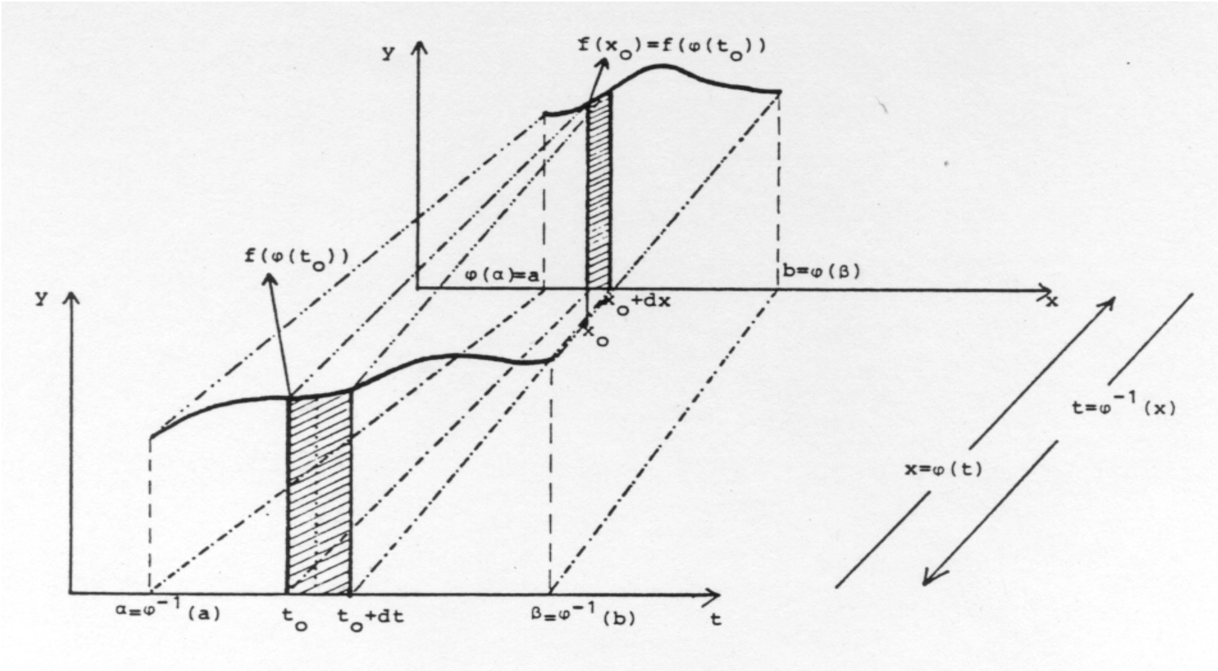
Geometrische Bedeutung der Substitutionsmethode:

Wir greifen hier etwas vor auf die Interpretation von Integralen als Flächen; siehe nächster Abschnitt: „Der Begriff des bestimmten Integrals“. Aus *Abbildung 107* ist ersichtlich, dass das im *x,y*-Koordinatensystem markierte Flächenstück zwar die gleiche Höhe, aber nicht die gleiche Breite wie das entsprechende Flächenstück im *t,y*-Koordinatensystem hat. Wegen $x = \varphi(t)$ gilt

$$dx = \phi(t_0 + dt) - \phi(t) = \phi'(t_0) dt$$

$$so\ dass\ f(x_0)dx = f(\phi(t_0)) \cdot \phi'(t_0) dt .$$

Abbildung 107



Damit geht die Integration über die Variable x in die Integration über die Variable t über.

Substitutionsregel:

$$\int f(x)\,dx \ \langle \textit{Substitution}\ x = g(t) \rangle \ = \ \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

merke: aus $x = g(t)$ *folgt*

$$\frac{dx}{dt} \ = \ \frac{d\,g(t)}{dt} \ = \ g'(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad dx \ = \ g'(t)\,dt\,,$$

ersetze also das dx hinter dem Integral durch $g'(t)dt$.

Auch in der Form:

$$\int f(u(x))\,dx \ = \ \int f(u)\cdot x'(u)\,du$$

(selbes Prinzip: $\frac{dx}{du} \ = \ x'(u) \ \Rightarrow \quad dx \ = \ x'(u)\,du$ *einsetzen für dx.)*

Beispiel:

$$\int \sqrt{3x+7}\ dx = ?$$

Substitution: $u \ = \ 3x+7 \ \Rightarrow \quad u'(x) \ = \ \frac{du}{dx} \ = \ 3 \ \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}\,du$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{3x+7}\ dx \ = \ \int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}\ du \ = \ \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\ du \ = \ \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\ du \ = \ \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C \ = \ \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C$$

Resubstitution: $u \ = \ 3x+7 \ \Rightarrow \ \frac{2}{9}(3x+7)^{\frac{3}{2}}+C \ = \ \frac{2}{9}\sqrt{(3x+7)^3}+C$

Zusammenfassung:

Substitutionsregel:

$$\boxed{\int f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution} \\ x = g(t)}}{=} \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt}$$

merke:
aus $x = g(t)$ folgt

$\frac{dx}{dt} = \frac{d\,g(t)}{dt} = g'(t)$,

formal also

$dx = g'(t)\cdot dt$

ersetze also das dx hinter dem Integral durch $g'(t)dt$.

auch in der Form:

$$\int f(u(x))\,dx = \int f(u)\cdot x'(u)\,du$$

(selbes Prinzip:
$\frac{dx}{du} = x'(u) \Rightarrow dx = x'(u)du$
einsetzen für dx.)

Beispiel: $\int \sqrt{\underbrace{3x+7}}\,dx = ?$

$u = 3x+7 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 3$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{3}du$

$\int\sqrt{3x+7}\,dx = \int\sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int\sqrt{u}\,du$

$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$

Rück-Substitution!

$= \frac{2}{9}(3x+7)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\cdot\sqrt{(3x+7)^3} + C$

anderes Beispiel:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx = ?$$

Substitution: $u = \sqrt{x}-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = u+1$

$\Leftrightarrow x = (u+1)^2$

$\Leftrightarrow \frac{dx}{du} = 2(u+1)$

$\Leftrightarrow dx = 2(u+1)\,du$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}-1}dx = \int\frac{1}{u}\cdot 2(u+1)\,du = 2\int\frac{u+1}{u}\,du = 2\int\left(1+\frac{1}{u}\right)du = 2\left[\int 1\,du + \int\frac{1}{u}\,du\right]$$

$= 2\left[u+\ln|u|\right]+C$

Resubstitution: $u = \sqrt{x}-1 \Rightarrow$ *Ergebnis:* $2\cdot(\sqrt{x}-1+\ln|\sqrt{x}-1|)+C$

Beispiel 6.5:

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{1-(3\cos x+5)^2}}dx = \left\|\begin{matrix} t = 3\cos x+5 \\ dt = -3\sin x\,dx\end{matrix}\right\| = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\Big|_{t=3\cos x+5} = -\frac{1}{3}\arcsin t + C$$

$= -\frac{1}{3}\arcsin(3\cos x+5)+C$

Bei der praktischen Anwendung wird oft die Funktion $f(x)$ integriert, indem man $x = \varphi(t)$ substituiert, mit dem Zweck, das Integral auf der rechten Seite:

$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$ in ein einfacheres zu überführen, wobei dx durch $\varphi'(t)$ dt ersetzt wurde. Die Funktion $x = \varphi(t)$ muss in $[a, b]$ streng monoton sein, damit in $[a, b]$ die Inverse $t = \varphi^{-1}(x)$ existiert.

Beispiel 6.6:

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx \;=\; \left\| \begin{array}{l} t=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{a}} \quad x=\sqrt{a}\,\cos t \\ dx \;=\; -\sqrt{a}\,\sin t\,dt \end{array} \right\| \;=\; -a\int \sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\sin t\,dt = a\int \sin^2 t\,dt$$

$= \|$ *bereits gelöst* $\|$

Zwei typische Beispiele für die Anwendung der Substitutionsregel:

$(a)\;\; I \;=\; \int x+\sqrt[3]{x^2}\,dx\;; \quad \| t \;=\; \sqrt[3]{x} \|$

$(b)\;\; I \;=\; \int \dfrac{1}{\cos x+\sin x}\,dx\;; \quad \| t \;=\; tg\dfrac{x}{2} \|$

(gilt allgemein für Funktionen der Form R(sin x, cos x))

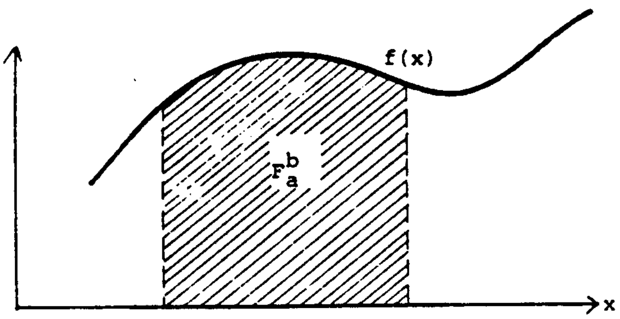
Der Begriff des bestimmten Integrals und Anwendungen

Die historische Entwicklung des Integralrechnung ist durch das Bedürfnis gekennzeichnet, den Flächeninhalt von „krummlinig begrenzten Figuren“ zu bestimmen (*siehe Abbildung 108*). Für forstliche Anwendungen sind aber auch andere Deutungen von grundlegender Bedeutung. Die Volumenbestimmung von Bäumen, die durch Rotation ihrer Schaftform modelliert werden, Erwartungswerte der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsvariablen (z.B. Brusthöhendurchmesser, Höhe etc.) sowie Wachstumskurven und Wuchsleistungen sind einige der wichtigsten forstlichen Deutungen des bestimmten Integrals (die Integration der Funktion des laufenden Zuwachses über die Zeit ergibt die „Wachstumskurve“ selbst).
Nunmehr zur Einführung des bestimmten Integrals:

Bemerkung

f sei eine stetige Funktion, die im Intervall $I = [a, b]$ definiert ist und überall in $[a, b]$ positiv ist ($f(x) > 0$) (*siehe Abbildung 108*). Die Aufgabe lautet nun: Bestimmung des Flächeninhaltes F_a^b .

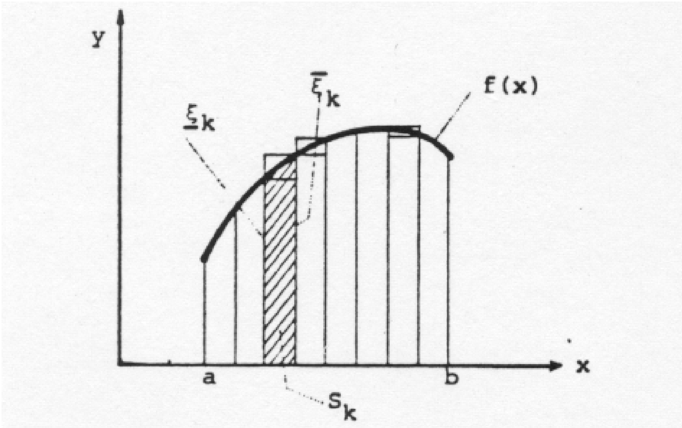
Abbildung 108



F_a^b wird wie folgt approximiert:

1. Wir unterteilen $I = [a, b]$ in n gleiche Teilintervalle I_k ; $k = 1, 2, \ldots, n$, wobei
$I_k \;=\; [a+(k-1)\cdot\Delta x,\; a+k\,\Delta x], mit\,\Delta x \;=\; \dfrac{(b-a)}{n}$. Mit den Geraden g_k: $x \;=\; a+k\cdot\Delta x$
wird die untersuchte Fläche in n Streifen S_k , $k = 1, 2, \ldots, n$, zerlegt.
Siehe *Abbildung 109.*

Abbildung 109



2. Der Inhalt F_k jedes Streifens S_k wird durch den Inhalt eines Rechtecks angenähert.
Da f in I stetig ist, nimmt $f(x)$ in jedem I_k ein Maximum und ein Minimum an. Das Maximum (Minimum) werde in $\bar{\xi}_k(\xi_k)$ angenommen. $f(\bar{\xi}_k)\cdot\Delta x$ $(f(\xi_k)\cdot\Delta x)$ ist dann der Inhalt eines Rechtecks, welches den Streifen S_k enthält (in S_k enthalten ist).

3. Es gilt: $f(\bar{\xi}_k)\Delta x \ \geq \ F_k \ \geq \ f(\xi_k)\Delta x; \quad k=1,2,\ldots,n.$
Aus der Summation folgt unmittelbar:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)\cdot\Delta x \geq \sum_{k=1}^{n} F_k = F_a^b \geq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x = s_n \ ,$$

wobei S_n bzw. s_n die Obersumme bzw. Untersumme von F_a^b genannt wird.

4. Die Funktion f heißt in I *gleichmäßig stetig*, falls es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ gibt, so dass $\forall x_0 \in I: \ |f(x_0+h)-f(x_0)| < \varepsilon \quad \textit{für} \quad h<\delta$.
(Jede in einem abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion ist in I gleichmäßig stetig.)
Da f in I gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon := \dfrac{\varepsilon'}{b-a}$ ist, wenn $|x_1-x_2| < \delta$ ist.

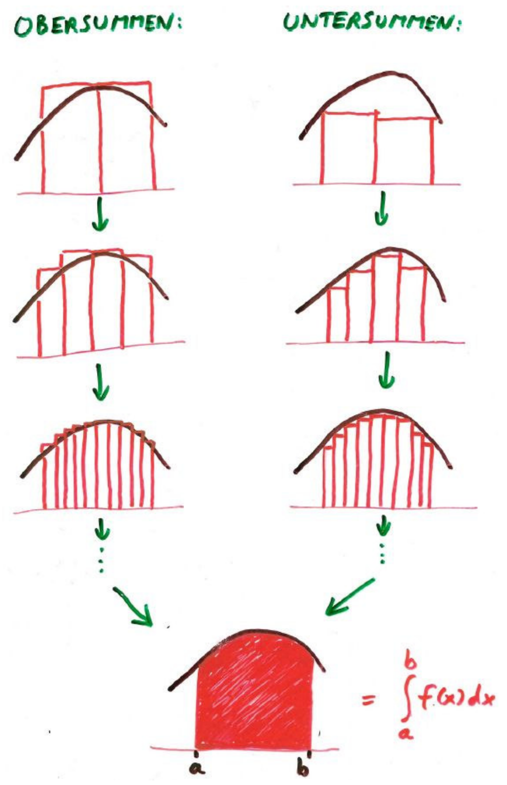
Da $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n} = 0$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} < \delta$ für alle $n \geq N$.

Da für alle i = 1, 2, …, n also gilt: $f(\bar{\xi}_i)-f(\xi_i) < \dfrac{\varepsilon'}{b-a}$, so gilt auch für alle $n \geq N$:

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} (f(\bar{\xi}_i)-f(\xi_i))\cdot\Delta x < \frac{\varepsilon'}{b-a}\cdot n\cdot\Delta x = \varepsilon' \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n \ .$$

Da für jedes n gilt: $S_n \geq F_a^b \geq s_n$, folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = F_a^b = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.
Der Flächeninhalt F_a^b lässt sich auf diese Weise beliebig genau von oben und von unten approximieren. F_a^b wird das *bestimmte Integral* der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ genannt und mit Integralzeichen geschrieben: $F_a^b = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$
Zur Veranschaulichung siehe die folgende *Abbildung 110.*

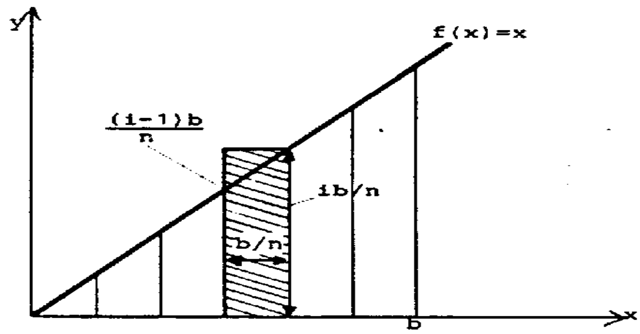
Abbildung 110



Beispiel 6.7:

Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = x$. Gesucht wird $F_0^b = \int_0^b x\,dx$. (*siehe Abbildung 111*).

Abbildung 111



1. Die Unterteilung von $[0, b]$ ist hier mit

$$0 = x_0,\; x_1 = \frac{b}{n},\; x_2 = \frac{2b}{n},\; \ldots,\; x_{i-1} = \frac{(i-1)b}{n},\; x_i = \frac{i \cdot b}{n},\; \ldots,\; x_n = b \text{ gegeben.}$$

2. Für F_i (Flächeninhalt von S_i) gilt:

$$\frac{(i-1)b}{n} \cdot \frac{b}{n} \le F_i \le \frac{i \cdot b}{n} \cdot \frac{b}{n};\quad f(\underline{\xi}_i) = \frac{(i-1) \cdot b}{n};\quad f(\overline{\xi}_i) = \frac{i \cdot b}{n};\quad \Delta x = \frac{b}{n}\;.$$

3. Die Obersumme S_n lautet: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot b}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2n}$.

Die Untersumme s_n lautet: $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1) \cdot b}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n^2-n}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2n}$.

Wir erhalten also:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{2}+\frac{b^2}{2n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{2n} = \frac{b^2}{2} \Rightarrow F_0^b = \frac{b^2}{2} .$$

Die Definition des bestimmten Integrals

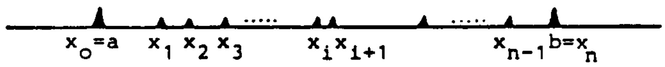
Definition 6.3:

Eine Menge Z von n+1 Zahlen $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\};\ Z \subseteq [a,b] = I$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ nennen wir eine Einteilung oder *Zerlegung* des Intervalles I (vgl. *Abb. 112*). Die Zahl

$$n(Z) = \max_k (x_{k+1}-x_k); \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

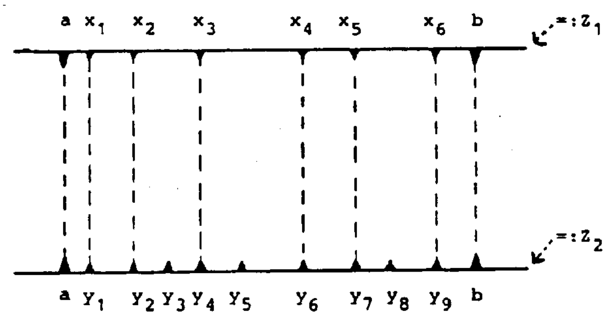
heißt Norm der Einteilung Z (maximale Distanz zwischen zwei Teilungspunkten der Menge Z).

Abbildung 112



Ist $Z_1 \subseteq Z_2$, dann heißt Z_2 eine *Verfeinerung* von Z_1.

Abbildung 113



Aus *Abbildung 113* geht hervor: $Z_1 \subseteq Z_2$ und $n(Z_1) > n(Z_2)$.

Bemerkung

Sei I_k das Intervall $[x_{k-1}, x_k];\ \xi_k \in I_k;\ m_k = \inf_{x\in I_k} f(x);\ M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$.

Es ist $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$; $k = 0, 1, \ldots, n$.

Jeder Zerlegung Z von $[a, b]$ und jeder Funktion f ordnen wir folgende drei Summen zu:

$$S(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$I(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

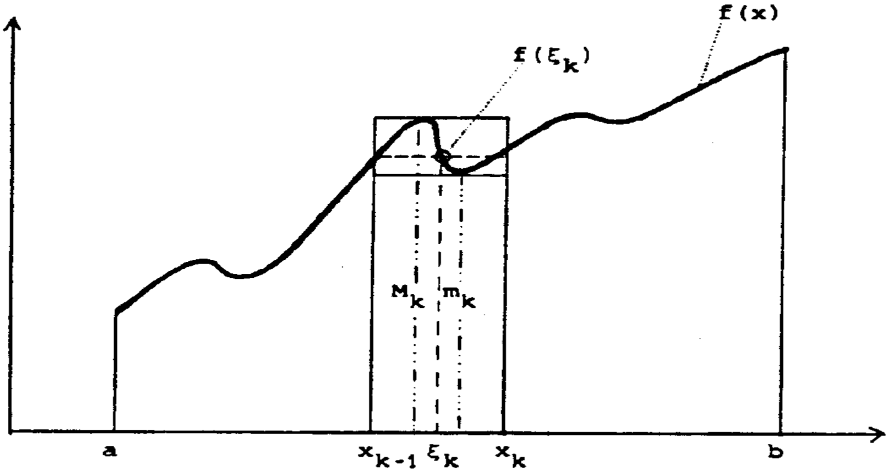
$$s(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

(vgl. *Abb. 114*).

Für jede beliebige Zerlegung von Z gilt: $S(Z,f) \geq I(Z,f) \geq s(Z,f)$.

Im weiteren wird die Zerlegung so verfeinert, dass die Norm $n(Z)$ gegen Null strebt: $n(Z) \to 0$, d.h. $\max_k (x_{k+1} - x_k) \to 0$.

Abbildung 114



Definition 6.4:

Existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{n(Z)\to 0} S(Z,f)$; $\lim\limits_{n(Z)\to 0} s(Z,f)$ und gilt $\lim\limits_{n(Z)\to 0} S(Z,f) = \lim\limits_{n(Z)\to 0} s(Z,f) = \lim\limits_{n(Z)\to 0} I(Z,f)$, so heißt f in $[a, b]$ integrierbar, und

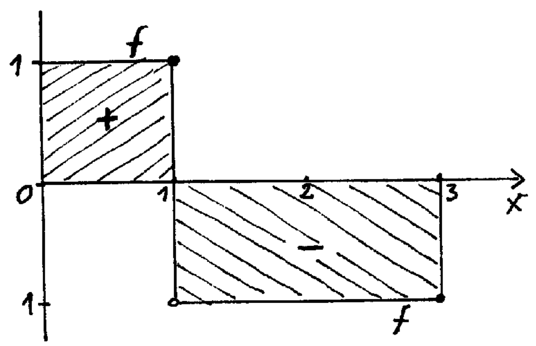
$$\lim_{n(Z)\to 0} I(Z,f) =: \int_a^b f(x)\,dx$$

heißt *bestimmtes Integral* (Riemann-Integral) der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$.
a heißt untere und b obere *Integrationsgrenze*.

Beachte:

Obgleich durch die Flächenberechnung motiviert, ist das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\; dx$ im Allgemeinen keine Fläche:

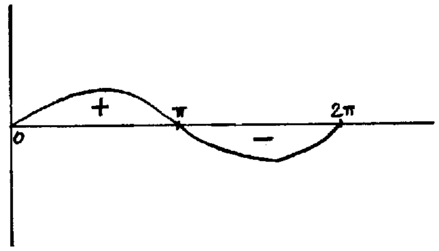
Abbildung 115



In *Abb. 115* ist $\int_0^3 f(x)\,dx = 1-2 = -1$.

Oft lassen sich Symmetrien ausnutzen, um zu zeigen, dass ein bestimmtes Integral 0 ist (*Abb. 116*):

Abbildung 116



$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

Es gilt der wichtige Satz:

Satz 6.2

Jede in $[a, b]$ stetige Funktion f ist in $[a, b]$ integrierbar.

Beweis:

Da f in $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon := \frac{\varepsilon'}{b-a} \text{ , sobald } |x_1 - x_2| < \delta \text{ ist.}$$

Wir wählen eine Zerlegung $Z = \{a = x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k, ..., x_n = b\}$ mit $n(Z) < \delta$, d.h.

$$\max_k (x_{k+1} - x_k) < \delta \quad .$$

Dann gilt:

$$S(Z, f) - s(Z, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon'}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon'}{b-a}(b-a) = \varepsilon' \quad ,$$

also ist

$$S(Z, f) - s(Z, f) < \varepsilon' \text{ , sobald } \max_k (x_k - x_{k-1}) < \delta \,,\ k = 1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow \lim_{n(Z)\to 0} (S(Z, f) - s(Z, f)) = 0 \Rightarrow \lim S = \lim s \Rightarrow f \text{ ist integrierbar.}$$

Aus der Definition des bestimmten Integrals ergeben sich folgende Sätze:

Satz 6.3:

$$(a) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \ da \ (x_k - x_{k-1}) = -(x_{k-1} - x_k)$$

$$(b) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$(c) \int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx; \quad c \text{ ist eine beliebige Konstante.}$$

Satz 6.4:

Die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ seien integrierbar. Dann ist $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \qquad \textit{Summenregel}$$

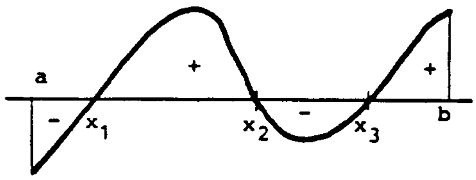
Satz 6.5:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx; \quad a<b<c.$$

Bemerkung:

Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ gibt den Flächeninhalt F_a^b der Fläche an, die durch die x-Achse und den Graphen von f begrenzt wird, wenn $f(x) > 0$ in $[a, b]$.

Abbildung 117



Liegt eine Situation gemäß *Abbildung 117* vor, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^b f(x)dx$$

Für den Flächeninhalt F_a^b gilt: $F_a^b = -\int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^b f(x)dx.$

Für die praktischen Anwendungen sind die *Mittelwertsätze* der Integralrechnung von Bedeutung. Sie zeigen die Abschätzungsmöglichkeiten des Integrals mit Hilfe gewisser Funktionswerte der Funktion f (Hubersche Formel).

Bemerkung:

Aus der Definition von $\int_a^b f(x)dx$ als $\lim\limits_{n(Z)\to 0} I(Z,f)$ ergeben sich für $\int_a^b f(x)dx$ folgende Aussagen:

(a) Sei f in $[a, b]$ stetig und $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]$, so gilt $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ wegen

$$I(Z,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

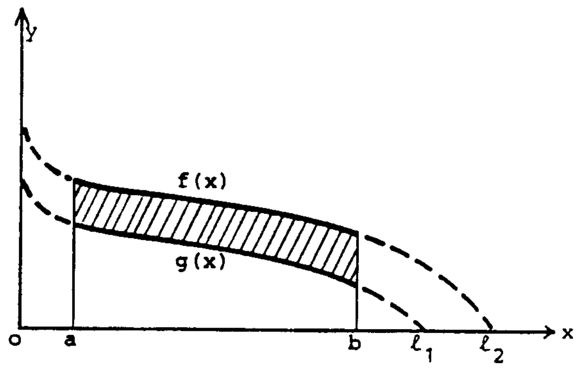
(b) Sind f und g in $[a, b]$ stetig und gilt $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a,b]$, so ist

$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, da $f(x) - g(x) \geq 0$ ist und nach (a)

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0,$$

siehe *Abbildung 118*.

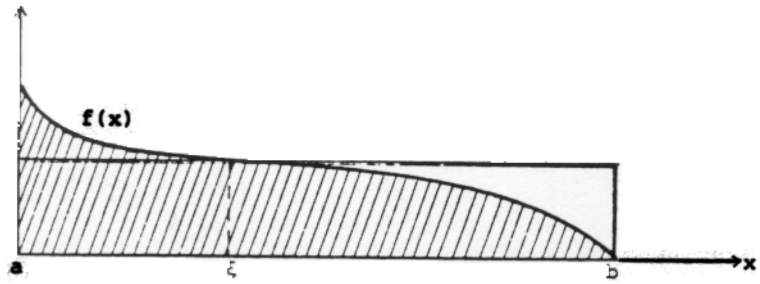
Abbildung 118



Satz 6.6: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f in [*a, b*] stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Abbildung 119



Beweis:

Nach dem Satz von Weierstrass (S. 137) nimmt die stetige Funktion f auf [*a, b*] ihr Maximum *M* und ihr Minimum *m* an. Es ist also $m \leq f(x) \leq M \; \forall x \in [a, b]$; nach obiger Bemerkung gilt

$$m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\cdot(b-a). \quad .$$

Hieraus folgt $m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \leq M$. Nach dem Zwischenwertsatz (S. 138) gibt es einen Punkt $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$; daraus folgt die Behauptung, welche zu beweisen war.

Satz 6.7: Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Seien die Funktionen f und g im Intervall [*a, b*] stetig und g in [*a, b*] entweder positiv oder negativ, dann gibt es in [*a, b*] ein ξ, so dass gilt: $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$.

Hauptsatz der Integralrechnung

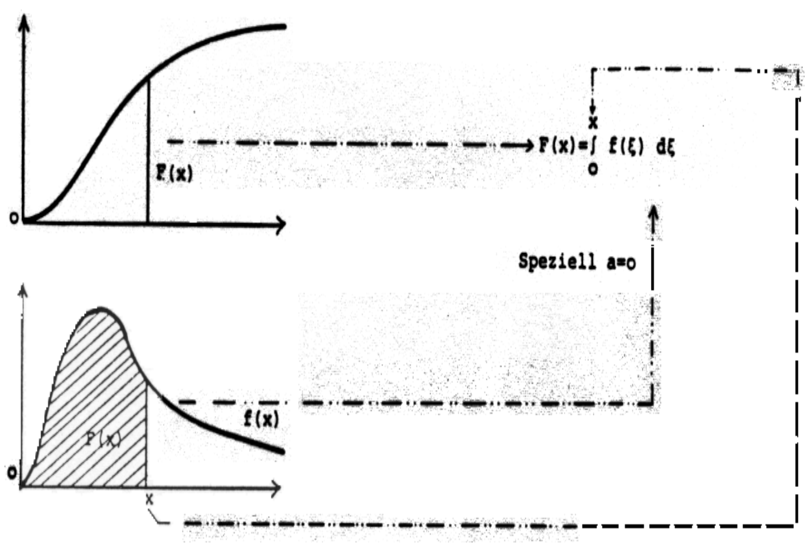
Hier wird gezeigt, dass das unbestimmte und das bestimmte Integral in enger Beziehung zueinander stehen, indem man das bestimmte Integral mit Hilfe der Stammfunktion in vielen (bei unseren Anwendungen sogar allen) Fällen berechnen kann. Hierzu betrachtet man die bestimmten Integrale

$$(1)\quad \int_a^x f(\xi)\,d\xi := F(x) \qquad\qquad (2)\quad \int_x^b f(\xi)\,d\xi := G(x).$$

Bemerkung:

Gegeben sei eine in $[a, b] =: I$ stetige Funktion. Bei festem $a \in I$ können wir das bestimmte Integral (1) als Funktion $F(x)$ der oberen Grenze x auffassen. Das Integral (2) ist dagegen eine Funktion $G(x)$ der unteren Grenze.

Abbildung 120



Für die Beziehung zwischen der *Ableitung* von $F(x)$ gemäß (1) $[G(x)$ gemäß (2)$]$ und $f(x)$ gilt folgender Satz:

Satz 6.8:

Die Funktionen F und G sind differenzierbar, und es gilt:
$F'(x) = f(x)$; $G'(x) = -f(x)$.

Beweis:
Nach dem Mittelwertsatz 6.6 gilt für den Fall $F(x)$: Es gibt im Intervall $[x, x+h]$ einen Punkt $\check{x}$ mit

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(\xi)\,d\xi - \int_a^x f(\xi)\,d\xi = \int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi = f(\check{x})\cdot h$$. Hieraus folgt:

(*) $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\check{x})\cdot h}{h} = f(x)$ (da $x \le \check{x} \le x+h$, und mit $h \to 0$ geht $\check{x} \to x$).

Folgerung:
Ist f im Intervall I stetig, so besitzt f in I eine Stammfunktion F, z.B. (für $a \in I$)

$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$, da wegen (*) gilt: $\forall\, x \in I$ ist $F'(x) = f(x)$.

Nunmehr der Hauptsatz der Integralrechnung.

Satz 6.9:

f sei im Intervall I stetig und F eine beliebige Stammfunktion von f. Liegen a und b in I, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$=: [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

Beweis:

$F_0(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ ist nach obiger Folgerung ein unbestimmtes Integral (eine Stammfunktion) von f, falls $a \in I$. Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt:

$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi + C = F_0(x) + C$. Es folgt:

$F(b) - F(a) = (\int_a^b f(\xi)\,d\xi + C) - (\int_a^a f(\xi)\,d\xi + C) = \int_a^b f(\xi)\,d\xi$, oder in gekürzter Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

Fazit:
Die praktische Berechnung bestimmter Integrale stetiger Funktionen wird auf das Finden von Stammfunktionen zurückgeführt, wenn gemäß Satz 6.9 verfahren wird.

Zusammenfassung:

Hauptsatz der Integralrechnung

1. $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

   ist Stammfunktion von f:

   $F' = f$

2. Für jede Stammfunktion F von f gilt:

   $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

   $$=: [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

   $\downarrow$

   Bedeutung:
   Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe des unbestimmten Integrals (der Stammfunktion).

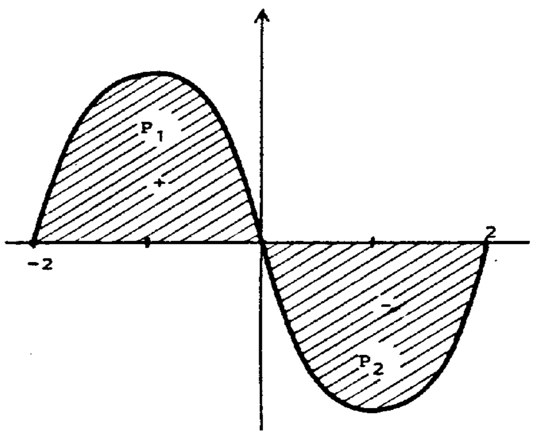
Anwendungen:

1. Flächeninhalt F des Bereiches zwischen einer Kurve gemäß $f(x)$, der x-Achse und Grenzen a und b.

Beispiel 6.8:

$f(x) = x^3 - 4x$; $a = -2$, $b = 2$.

Abbildung 121



$$F = P_1 + P_2 \Leftrightarrow F = \int_{-2}^{0}(x^3+4x)\,dx - \int_{0}^{2}(x^3+4\,x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{0}^{2} = 8 \quad .$$

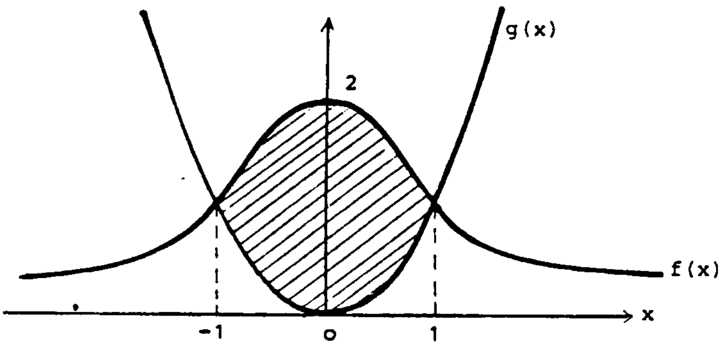
Wichtig ist hier die Bestimmung des Funktionsverlaufes (wo positiv, wo negativ).

2. Bestimmung des Flächeninhaltes, der durch die Graphen von zwei Funktionen f und g mit $f(x) \geq g(x)$ in $[a, b]$ eingeschlossen wird.

Beispiel 6.9:

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}; \qquad g(x) = x^2 \quad .$$

Abbildung 122



Grenzen: $\frac{2}{1+x^2} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$ Es ist

$$F = \int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{1+x^2}-x^2\right)dx = \left(2\,arctg\,x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \left\| arctg\,1 = \frac{\pi}{4} \right\| = \pi - \frac{2}{3}.$$

Substitutionsmethode bei bestimmten Integralen

Die Funktion (Integrand) $f(x)$ sei stetig und die Funktion $\varphi(t)$ differenzierbar und eineindeutig (injektiv). Die zusammengesetzte Funktion $k(t) = f(\varphi(t))$ sei im Intervall $I = [a, b]$ definiert. Falls gilt
$a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$, so gilt

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \text{ , bzw. } \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Beweis:
Nach der Substitutionsregel für unbestimmte Integrale gilt für jedes $t \in I$ (siehe S. 186):

$$F(\varphi(t)) = \int f(x)\,dx\Big|_{\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt =: G(t).$$

Daraus folgt nach dem Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = G(\beta)-G(\alpha) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b} f(x)\,dx \; .$$

Folgende Schritte sind bei der Berechnung mit der Substitutionsmethode einzuhalten:

1. durch eine injektive, differenzierbare Funktion φ wird eine neue Variable eingeführt:
   $$x = \varphi(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \varphi^{-1}(x) \quad .$$

2. Man berechnet das Differential $dx = \varphi'(t)\,dt$, und die Funktion bestimmt neue Integrationsgrenzen $\varphi^{-1}(a)$ und $\varphi^{-1}(b)$.

3. Man sucht eine Stammfunktion $G(t)$ des transformierten Integranden $g(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ und berechnet das Integral $\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} g(t)\,dt$ nach dem Hauptsatz der Integralrechnung.

Beispiel:

$$\int_0^2 \frac{1}{(2+3x)^2}dx = ?$$

$$\textit{Substitution:} \; u = 2+3x \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 3 \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{1}{3}du$$

Integrationsgrenzen:
x läuft von 0 bis 2
$u(x)$: $u(0)=2+3\cdot 0=2$
$\qquad u(2)=2+3\cdot 2=8$
u läuft von 2 bis 8

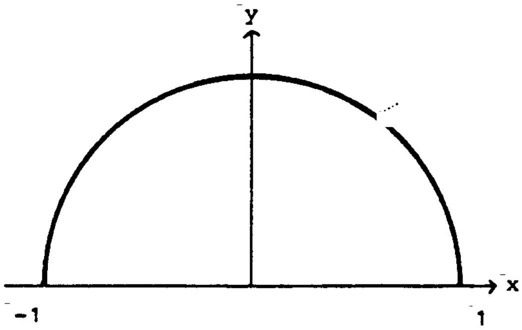
$$\int_0^2 \frac{1}{(2+3x)^2}dx = \int_2^8 \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int_2^8 u^{-2}du = \frac{1}{3}[(-1)\cdot u^{-1}]_2^8 = \frac{1}{3}(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

Beispiel 6.10:

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des oberen Halbkreises mit dem Radius $r = 1$.

Lösung:
Die Kreisgleichung $x^2+y^2=1 \;\Rightarrow\; y=\sqrt{1-x^2}$ ist die Funktionsgleichung für den oberen Halbkreis.

Abbildung 123



Betrachten wir den Viertelkreis und multiplizieren seinen Flächeninhalt mit 2:

$$F_{-1}^{\,1} \;=\; 2\int_{0=a}^{1=b} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\| \begin{array}{llll} x \;=\; \varphi(t) \;=\; \sin t & t=\varphi^{-1}(x)=arcsin\, x & \alpha=arcsin\ 0 \;=\; 0 \\ dx=\varphi'(t)\,dt=\cos t\,dt & & \beta=arcsin\ 1 \;=\; \pi/2 \end{array} \right\| =$$

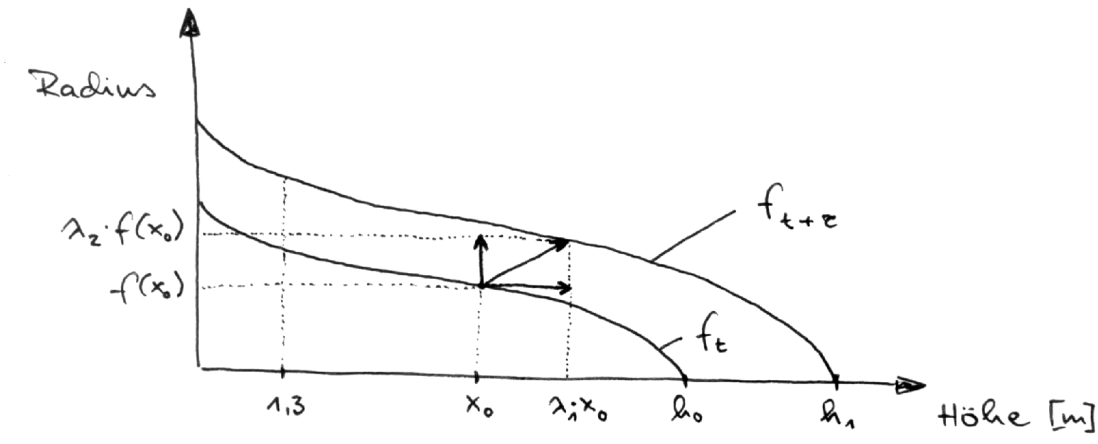
$$2\int_{0=\alpha}^{\frac{\pi}{2}=\beta} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt \;=\; 2\int_{0=\alpha}^{\frac{\pi}{2}=\beta} \cos^2 t\,dt \;=\; 2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\frac{\pi}{2}\right)-2\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot 0)\right) \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 6.11:

Gegeben sei die Schaftform eines Baumes zur Zeit t mit $y = f_t(x)$. Angenommen wird zentroaffines Wachstum mit den Faktoren λ_1 und λ_2. Die Länge des Schaftes zur Zeit t ist h_0 und der Durchmesser zur Zeit t ist $d_t(x)= 2\cdot f_t(x)$. Gesucht wird der Flächeninhalt unter der Schaftkurve zur Zeit t und unter der Kurve des zugewachsenen Schaftes zum Zeitpunkt $t+\tau$; $\tau>0$ (*vgl. Abb. 124*).

Abbildung 124



Der Flächeninhalt des Schaftes zur Zeit t lässt sich bei Kenntnis der Schaftformfunktion f_t mit Hilfe des bestimmten Integrals folgendermaßen bestimmen: $F_t \;=\; \int_0^{h_0} f_t(x)\,dx$.

Ebenso ließe sich der Flächeninhalt des Schaftes zur Zeit $t+\tau$ bestimmen, wenn man auch die

Schaftformfunktion des zugewachsenen Stammes $f_{t+\tau}$ kennen würde: $F_{t+\tau} = \int_0^{h_1} f_{t+\tau}(x)dx$.

Da die Schaftformfunktion aber schwierig zu modellieren und $f_{t+\tau}$ meistens unbekannt ist, die Streckfaktoren für Höhe und Radius des Baumes hingegen relativ einfach gemessen werden können, soll das Integral $F_{t+\tau} = \int_0^{h_1} f_{t+\tau}(x)dx$ in ein Integral über die Funktion f_t überführt und mit Hilfe der Substitution bestimmt werden.

Es gilt: $x_t \mapsto \lambda_1 \cdot x_t = x_{t+\tau} \Rightarrow x_t = \frac{x_{t+\tau}}{\lambda_1}$

$$f_t(x_t) \mapsto \lambda_2 \cdot f_t(x_t) = f_{t+\tau}(x_{t+\tau}) \Rightarrow f_{t+\tau}(x_{t+\tau}) = \lambda_2 \cdot f_t(x_t) = \lambda_2 \cdot f_t\left(\frac{x_{t+\tau}}{\lambda_1}\right) .$$

Zu bestimmen ist also: $F_{t+\tau} = \int_0^{h_1} \lambda_2 \cdot f_t\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)dx$ mit $h_1 = \lambda_1 \cdot h_0$.

Substitution: Sei $z = \frac{x}{\lambda_1}$, dann gilt: $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow dx = \lambda_1 \cdot dz$

Substitution der oberen Grenze: $x = h_1 = \lambda_1 \cdot h_0$ wird zu $z = \frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1 \cdot h_0}{\lambda_1} = h_0$.

Damit ergibt sich:

$$F_{t+\tau} = \int_0^{h_0} \lambda_2 \cdot f_t(z) \cdot \lambda_1 dz = \int_0^{h_0} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot f_t(z)dz = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \int_0^{h_0} f_t(z)dz = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot F_t ,$$

also

$$F_{t+\tau} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot F_t .$$

Bei äquiformem Wachstum $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$ gilt somit: $F_{t+\tau} = \lambda^2 \cdot F_t$.

Kennt man also den Flächeninhalt zur Zeit t und setzt zentroaffines bzw. äquiformes Wachstum voraus, so lässt sich die Längsschnittfläche des Halbschaftes mittels dieser Formeln einfach fortschreiben.