KAPITEL 4: FUNKTION VON MEHREREN UNABHÄNGIGEN VARIABLEN

Bei der Beschreibung komplexer Systeme ist es oft notwendig, Funktionen zu betrachten, die von mehr als einer reellen Variablen abhängen:

Übergang von Funktionen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

zu Funktionen

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \iddots & & \ddots \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \to & z \end{array}$$

f ordnet jedem Vektor eine Zahl zu.

Verbindung zur Physik: Feldbegriff.

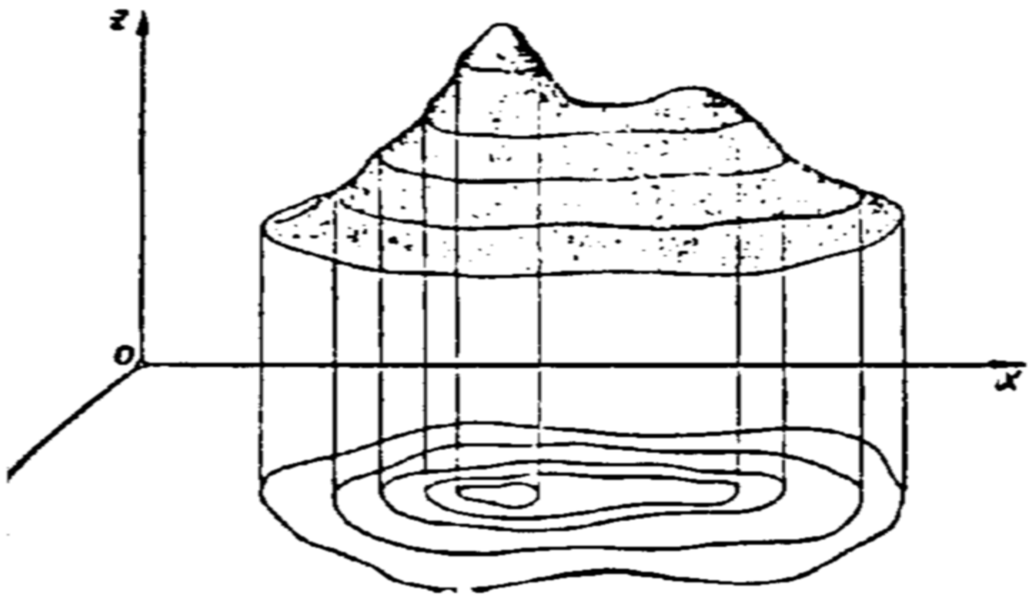
Skalarfeld	Vektorfeld *(hier nicht weiter betrachtet)*
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
z.B. Temperatur, Massendichte	z.B. Magnetfeld, Gravitationsfeld, Strömungsfeld

Verbindung zur Geographie: Höhe des Terrains (Geländemodell)

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \vdots & & \vdots \\ (x, y) & \to & z \end{array} \quad = \text{Höhe des Geländepunktes } (x, y) \text{ über Normal-Null.}$$

Darstellungsmöglichkeiten: 3D-Grafik, Höhenschichtlinien (Isolinien der Höhe, siehe *Abb. 95*) oder Farbcodierung (jede Höhenstufe erhält eine Farbe).

Abbildung 95



Definition „partielle Funktionen“

Gegeben sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$(x, y) \to z = f(x, y)$.

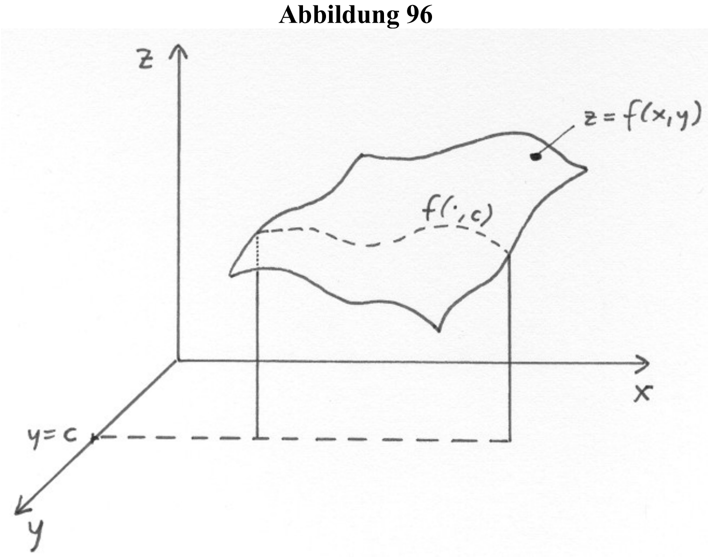
Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

Partielle Funktionen von f : $f(\cdot, c)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x, c)$

$f(c, \cdot)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$y \to f(c, y)$

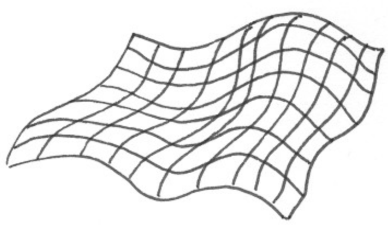
Geometrische Bedeutung: Schnittlinie (achsenparallel), „Transekt“. *Siehe Abb. 96.*

Abbildung 96



Darstellung der Funktion durch eine Vielzahl solcher Schnittlinien:

Abbildung 97



Gitterdarstellung, „mesh“.

Im Folgenden werden wir uns auf die Beschreibung von Funktionen zweier reeller Variablen beschränken:

<u>Definition 4.1:</u> Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion von zwei reellen Variablen ($f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktion von *n* reellen Variablen). Wir werden lediglich die explizite Form $z = f(x, y)$ betrachten.

Die Begriffe „Definitionsbereich“ $D(f)$ und „Bildbereich“ $B(f)$ werden analog zur Definition für die Funktionen einer reellen Variable definiert.

Zusammenfassung:

Übergang von Funktionen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

zu Funktionen

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto z$$

f ordnet jedem Vektor eine Zahl zu.

Verbindung zur Physik: Feldbegriff.

Skalarfeld	Vektorfeld
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
z.B. Temperatur, Massendichte	z.B. Magnetfeld, Gravitationsfeld, Strömungsfeld

Verbindung zur Geographie:

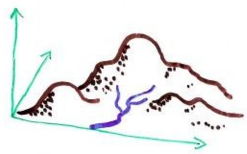
Höhe des Terrains (Geländemodell)

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

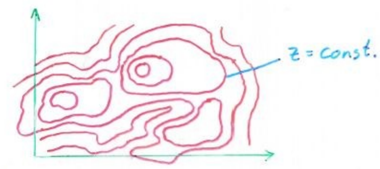
$(x, y) \mapsto z$ = Höhe des Geländepunktes (x,y) über Normal-Null

Darstellung:

- 3D-Grafik



- Höhenschichtlinien (Isolinien der Höhe)



- Farbcodierung

gegeben sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y).$$

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

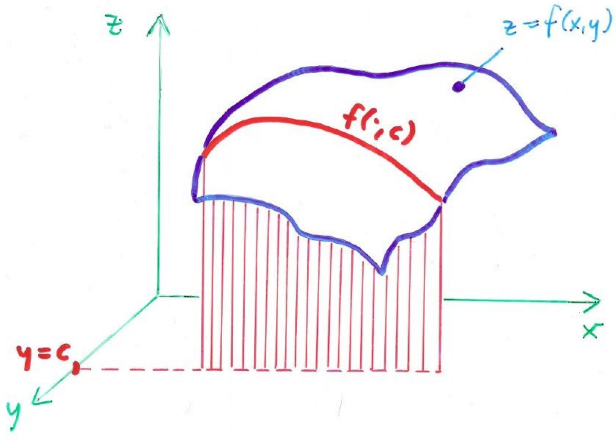
Partielle Funktionen von f:

$$f(\cdot, c): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x, c)$$

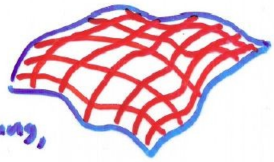
$$f(c, \cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto f(c, y)$$

geometrische Bedeutung:

Schnittlinie (achsenparallel), „Transekt"



Darstellung der Funktion durch eine Vielzahl solcher Schnittlinien:



Gitterdarstellung, „mesh"

Graph einer Funktion, Grenzwerte, Stetigkeit

Der Graph der Funktion f, $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\mid (x,y)\in D(f)\wedge z=f(x,y)\}$, ist eine Fläche.

Beispiel 4.1: $z=x^2+y^2$, $D(f)=\mathbb{R}^2$, $B(f)=[0,\infty)$.

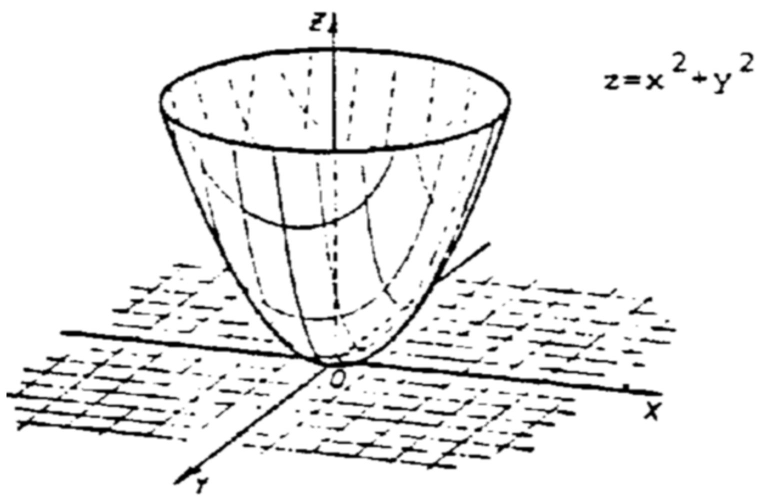
Der Graph dieser Funktion ist ein Rotationsparaboloid (ein Körper, dessen Oberfläche durch Rotation einer ebenen Kurve um eine feste Achse entsteht; *siehe Abb. 98*).

Für den konstanten Wert $y_0\in\mathbb{R}$ ist $f(x,y_0)$ eine Funktion von einer reellen Variablen, nämlich von x (partielle Funktion). Graph dieser Funktion ist die Schnittkurve der Fläche von $f(x, y)$ mit der Ebene $y = y_0$. Entsprechendes gilt für $f(x_0, y)$.

Beispiel 4.2: $z=x^2+y_0^2$ bzw. $z=x_0^2+y^2$

Die Schnittkurven des Rotationsparaboloids mit Ebenen $y = y_0$ bzw. $x = x_0$ sind Parabeln.

Abbildung 98



Die Begriffe „Grenzwert“ und „Stetigkeit“ werden analog zu denen bei Funktionen einer reellen Variablen erklärt. Hierbei muss jedoch der Begriff der δ-Umgebung erweitert werden.

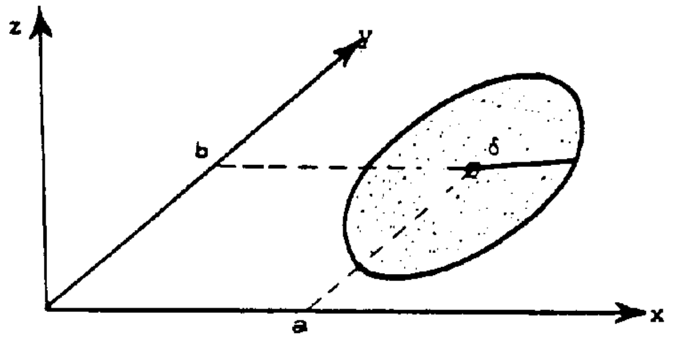
Definition 4.2: Eine δ-Umgebung des Punktes $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ist definiert als

$$U_\delta(a,b)=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}\mid \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\,\}.$$

Geometrisch: das Innere eines Kreises mit dem Radius δ um (a, b).

Siehe Abb. 99.

Abbildung 99



Notwendig für die Existenz eines Grenzwertes $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ist die Existenz und Gleichheit der Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ und $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$. Dies ist jedoch nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel zeigt:

<u>**Beispiel 4.3:**</u> $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$: Es gilt $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ und daher auch

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

Es existieren jedoch in jeder noch so kleinen δ-Umgebung von (0, 0) Punkte $(r\cdot\cos\phi, r\cdot\sin\phi)$, wobei ϕ ein beliebiger Winkel $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ und r eine beliebige Zahl $r<\delta$ ist.

Wegen $r<\delta$ liegen die so dargestellten Punkte in der δ-Umgebung von (0, 0), für die $f(x, y)$ die Werte

$$\frac{r^2\cdot\sin\phi\cos\phi}{r^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)} = \sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi \quad \text{annimmt.}$$

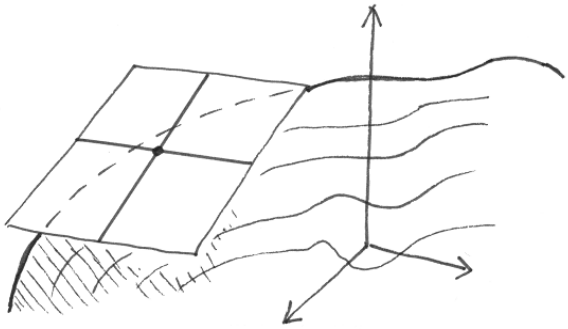
Da ϕ als beliebig angenommen wurde, nimmt $f(x, y)$ in *jeder* δ-Umgebung alle Werte zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ an.

Notwendig für die Stetigkeit einer Funktion $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) ist die Stetigkeit der Funktionen $f(x, y_0)$ im Punkt x_0 und $f(x_0, y)$ im Punkt y_0. Das obige Beispiel zeigt, dass diese Bedingungen nicht hinreichend sind.

Verallgemeinerung der Tangente im Fall $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: <u>Tangential-Ebene</u>

diese ist bereits festgelegt durch die beiden *Tangenten* (Geraden), die sich durch Schnitte parallel zur *xz*- und zur *yz*-Ebene ergeben (*siehe Abb. 100*).

Abbildung 100



Steigung dieser Tangenten:

partielle Ableitungen f_x , f_y (= Ableitungen der partiellen Funktionen)

Partielle Ableitungen

Definition 4.3: Die endlichen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} =: \frac{\partial f}{\partial x} =: f_x(x_0, y_0)$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} =: \frac{\partial f}{\partial y} =: f_y(x_0, y_0)$$

heißen *partielle Ableitungen* von f im Punkt (x_0, y_0).
(f_x: partielle Ableitung nach x, f_y : partielle Ableitung nach y)

Die partielle Ableitung $f_x(x_0, y_0)$ ist gleich der gewöhnlichen Ableitung der Funktion $f(x, y_0)$ an der Stelle x_0.
Die partielle Ableitung $f_y(x_0, y_0)$ ist gleich der gewöhnlichen Ableitung der Funktion $f(x_0, y)$ nach y an der Stelle y_0.

<u>Die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach einer Variablen bildet man, indem man die andere Variable als Konstante betrachtet.</u>

<u>Beispiel 4.4:</u> (a) $f(x, y) = x \cdot \sin y \qquad f_x = \sin y \qquad f_y = x \cdot \cos y$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad f_x = 2x \qquad f_y = 2y$

Die Ableitungen höherer Ordnung bildet man analog zur Vorgehensweise bei Funktionen einer reellen Variablen.

Schreibweise: $f_{xx} = (f_x)_x; \quad f_{xy} = (f_x)_y; \quad f_{yx} = (f_y)_x; \quad f_{yy} = (f_y)_y$

ebenfalls üblich: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ usw.

<u>Beispiel 4.5:</u> $f(x, y) = x^3 y - x^2 y^2$

$f_x = 3x^2 y - 2xy^2 \qquad f_y = x^3 - 2x^2 y$

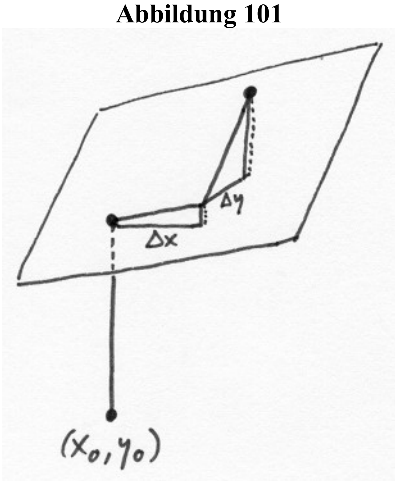
$$f_{xx} = 6xy - 2y^2 \qquad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_{xy} = 3x^2 - 4xy \qquad f_{yx} = 3x^2 - 4xy$$

In diesem Beispiel ist $f_{xy} = f_{yx}$. Dies gilt für die meisten praktisch wichtigen Funktionen.

Approximation einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in der Umgebung eines Punktes (x_0, y_0):
durch die Tangentialebene an der Stelle (x_0, y_0) (*siehe Abb. 101*).

Abbildung 101



Fehler von x und y

$$\begin{matrix} \downarrow & \searrow \end{matrix}$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \Delta x \cdot f_x(x_0, y_0) + \Delta y \cdot f_y(x_0, y_0)$$

$\hookrightarrow$ resultierender Fehler von z (approximiert)

Differential der Funktion $z = f(x, y)$

Es sei $f(x, y)$ in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$ definiert. Bewegt man sich vom Punkt (x_0, y_0) zu einem Punkt $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, so erfährt die Funktion f den Zuwachs

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad .$$

Hierfür erhält man nach einfacher Umformung

$$\Delta z = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \Delta x = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y} \Delta y \quad .$$

Unter der Voraussetzung, dass die partiellen Ableitungen erster Ordnung in $U(x_0, y_0)$ existieren, kann man schreiben: $\dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0) + \tau_1(\Delta x, \Delta y)$.

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0) + \tau_2(\Delta x, \Delta y) \quad ,$$

wobei $\lim\limits_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0} \tau_1(\Delta x, \Delta y) = 0$ und $\lim\limits_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0} \tau_2(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Damit erhält man: $\Delta z = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \tau_1 \Delta x + \tau_2 \Delta y$.

Da τ_1 und τ_2 gegen 0 konvergieren, wenn Δx und Δy gegen 0 streben, lässt sich für hinreichend kleine Werte von Δx und Δy der Zuwachs Δz durch $\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$ annähern.

Sind *dx* und *dy* die Differentiale der unabhängigen Variablen *x* und *y*, so schreibt man:

$$dz = f_x dx + f_y dy \quad .$$

Aus der folgenden Abbildung ist zu ersehen, dass der Zuwachs von *f*(*x*, *y*) sich zusammensetzt aus dem Zuwachs $\Delta f(x, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x$ und dem Zuwachs $\Delta f(x_0+\Delta x, y)$, welcher für kleine Δx durch $\Delta f(x_0, y) = f_y \Delta y$ angenähert werden kann.

Ist f eine Funktion von mehr als zwei Variablen $f = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, so lautet das Differential

$$df = f_{x_1} d x_1 + f_{x_2} d x_2 + \ldots + f_{x_n} d x_n \qquad \textit{(s. Beispiel 4.6 b).}$$

Beispiel 4.6:

(a) Das Volumen eines Stammes ist gegeben durch die Formel $V = f(D, H) = \frac{\pi}{4} F D^2 \cdot H$.

Wie groß ist der relative Volumenfehler $\frac{\Delta V}{V}$, wenn der relative Fehler $\frac{\Delta D}{D}$ bei der Durchmesserbestimmung 2% und der relative Fehler $\frac{\Delta H}{H}$ bei der Höhenmessung 3% beträgt?

Lösung: $\Delta V \approx f_D D \frac{\Delta D}{D} + f_H H \frac{\Delta H}{H} = \frac{\pi}{4} F (2 D^2 H \frac{\Delta D}{D} + D^2 H \frac{\Delta H}{H})$

$$= \frac{\pi}{4} F \cdot D^2 H \cdot (2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta H}{H}) = V (2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta H}{H})$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Delta V}{V} = 2 \cdot 2\% + 3\% = 7\%$$

(b) Ein Stamm hat im Alter von 40 Jahren den Durchmesser D = 24 cm, die Höhe 17 m, die Formzahl 0,5, das Volumen 0,385 m³. Im Alter von 45 Jahren hat er den Durchmesser D = 26 cm, die Höhe 19 m und die Formzahl 0,51. Wie groß sind der Zuwachs und das Volumen im Alter von 45 Jahren?

Lösung: $V = f(D, H, F) = \frac{\pi}{4} D^2 H F$

$$dV = \frac{\pi}{4} \cdot (f_D \Delta D + f_H \cdot \Delta H + f_F \Delta F) = \frac{\pi}{4}(2\text{DHF} \cdot \Delta D + D^2 \cdot F \Delta H + D^2 H \Delta F)$$

$$= \frac{\pi}{4}(2 D^2 HF \frac{\Delta D}{D} + D^2 \cdot F \cdot H \frac{\Delta H}{H} + D^2 \cdot H \cdot F \frac{\Delta F}{F})$$

$$= V(\frac{2 \Delta D}{D} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta F}{F})$$

$$= 0{,}385\,\text{m}^3 \cdot (\frac{2 \cdot 2}{24} + \frac{2}{17} + \frac{0{,}01}{0{,}5}) = 0{,}118\ \ \text{m}^3$$

Das Volumen im Alter 45 ist näherungsweise 0,385 m³ + 0,118 m³ = 0,503 m³.
Der exakte Wert ist 0,514 m³.

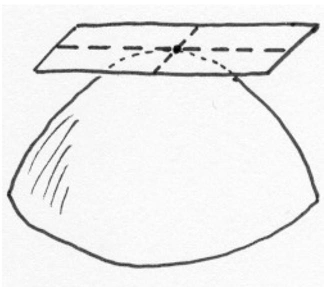
Lokale Maxima und Minima von Funktionen f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

In jedem Extrempunkt muss gelten:

Die Tangentialebene liegt waagerecht (*siehe Abb. 102*)

$\Rightarrow$ insbesondere: f_x und f_y werden 0.

Abbildung 102



Stationärpunkte

Definition 4.4: Ein Punkt (x_0, y_0) heißt Stationärpunkt der Funktion $z = f(x, y)$, wenn gilt:

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0 \quad .$$

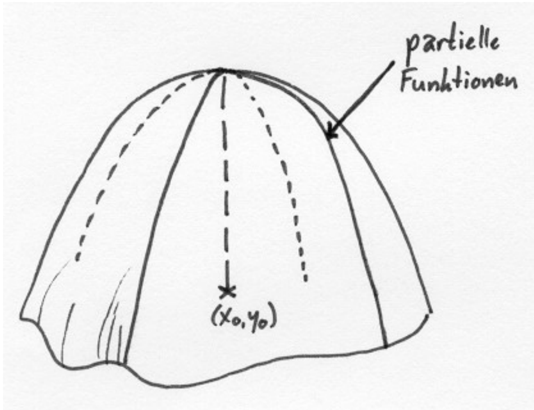
(Notwendige Bedingung für Existenz eines Extremums)

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen hinreichenden Bedingungen in einem Stationärpunkt ein lokales Extremum vorliegt.
Dabei wollen wir uns auf den Fall beschränken, dass f_x und f_y in einer Umgebung von x_0 und y_0 existieren und stetig sind, und dass alle zweiten Ableitungen in (x_0, y_0) existieren. Sind f_{xx} und f_{yy} beide ungleich Null, so ist leicht einzusehen, dass für das Vorhandensein einer Extremstelle notwendig ist, dass f_{xx} und f_{yy} im Punkt (x_0, y_0) das gleiche Vorzeichen besitzen, d.h.

$$f_{xx} \cdot f_{yy} > 0 \quad .$$

Für ein lokales Maximum gilt beispielsweise $f_{xx} < 0$ und $f_{yy} < 0$ (*Abb. 103*).

Abbildung 103



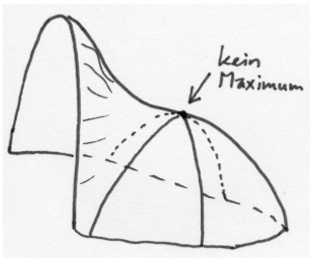
Wäre dagegen $f_{xx} > 0$ und $f_{yy} < 0$,

dann besäße die Schnittkurve $f(x, y_0)$ im Punkt x_0 ein Minimum,
die Schnittkurve $f(x_0, y)$ im Punkt y_0 dagegen ein Maximum
(also hätte f kein Extremum in (x_0, y_0)).

Einen solchen Stationärpunkt nennt man Sattelpunkt.

Die Bedingung $f_{xx} \cdot f_{yy} > 0$ ist allerdings noch nicht stark genug, um hinreichend für die Existenz eines Extremums zu sein (Gegenbeispiel siehe *Abb. 104*).

Abbildung 104



Die hinreichende Bedingung lautet:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0) \cdot f_{yx}(x_0, y_0) > 0 \quad ,$$

$$\text{d.h.} \quad f_{xx} \cdot f_{yy} > f_{xy}^2 \qquad (\text{ weil } f_{xy} = f_{yx} \text{ !})$$

Falls $f_{xx} \cdot f_{yy} = f_{xy}^2$, muss man noch Aussagen über die dritten Ableitungen machen.

Extremstellen-Bestimmung (Vorgehensweise)

1. Bestimme alle (x_0, y_0) , wo $f_x = 0$ und $f_y = 0$ wird
   („Stationärpunkte“, Kandidaten für Extrema)

2. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ ... > 0 ? ... $= 0$? ... < 0 ?

... > 0 ?	... $= 0$?	... < 0 ?
↓	↓	↓
Extremstelle	keine Aussage möglich	keine Extremstelle
↓ ↘		↓
$f_{xx}(x_0, y_0)<0$ → Maximum; $f_{xx}(x_0, y_0)>0$ → Minimum	(oder f_{yy})	„Sattelpunkt“

$f_{xx}(x_0, y_0)<0$ ↓ <u>Maximum</u>

$f_{xx}(x_0, y_0)>0$ ↓ <u>Minimum</u>

<u>Beispiel</u> zur Extremwertbestimmung bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

$$f(x, y) = x^2 y - xy + y^2$$

Partielle Ableitungen:

$$f_x = 2xy - y \qquad f_{xx} = 2y$$
$$f_y = x^2 - x + 2y \qquad f_{xy} = 2x-1$$
$$f_{yy} = 2$$

$$f_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)\cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2} \vee y=0$$

$$f_y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x+2y = 0$$

falls $x=\frac{1}{2}$, heißt dies: $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2y = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2y=\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{8}$

falls $y=0$, heißt dies: $x^2-x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x=0 \vee x=1$

Stationärpunkte liegen also bei:

P_1: $(\frac{1}{2};\frac{1}{8})$

P_2: $(0 ; 0)$

P_3: $(1 ; 0)$

nun zu prüfen:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 4y-(2x-1)^2 = 4y-4x^2+4x-1$$

dies ist für P_1: $4\cdot\frac{1}{8}-4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}-1 = \frac{1}{2}-1+2-1 = \frac{1}{2} > 0$ √

für P_2: $4\cdot 0-4\cdot 0+4\cdot 0-1 < 0$

für P_3: $4\cdot 0-4\cdot 1+4\cdot 1-1 = -1 < 0$

$\Rightarrow$ einzige Extremstelle bei $P_1 = (\frac{1}{2}; \frac{1}{8})$

(P_2 und P_3 sind Sattelstellen).

Maximum oder Minimum ?

$$f_{yy}(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$$ es liegt ein lokales Minimum vor.

(Auch $f_{xx}(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4} > 0$, dies folgt schon aus $f_{yy} > 0$ und

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \text{).}$$

Beispiel 4.7:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + c \cdot xy$$

$$f_x = 2ax + cy \; ; \quad f_{xx} = 2a \; ; \quad f_{xy} = c$$

$$f_y = 2by + cx \; ; \quad f_{yy} = 2b \; ; \quad f_{yx} = c$$

Die notwendige Bedingung $f_x = f_y = 0$ führt zu dem linearen Gleichungssystem:

$$2ax + cy = 0$$
$$cx + 2by = 0$$

Wir nehmen an, dass die Determinante dieser Gleichung $4 \cdot ab - c^2 \neq 0$ ist.
In diesem Fall existiert nur die Lösung $x = y = 0$. Im Stationärpunkt (0, 0) gilt

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 \cdot ab - c^2 \quad .$$

Ein Extremum liegt also genau dann vor, wenn $4 \cdot ab - c^2 > 0$.

Das sollte man nach dem Besuch von Vorlesung und Übungen beherrschen:

- Bilden von partiellen Ableitungen
- Bilden des vollständigen Differentials bei Funktionen von zwei unabhängigen Variablen und Anwendung in der Fehlerrechnung
- Bestimmen von Extremstellen bei Funktionen zweier unabhängiger Variablen