

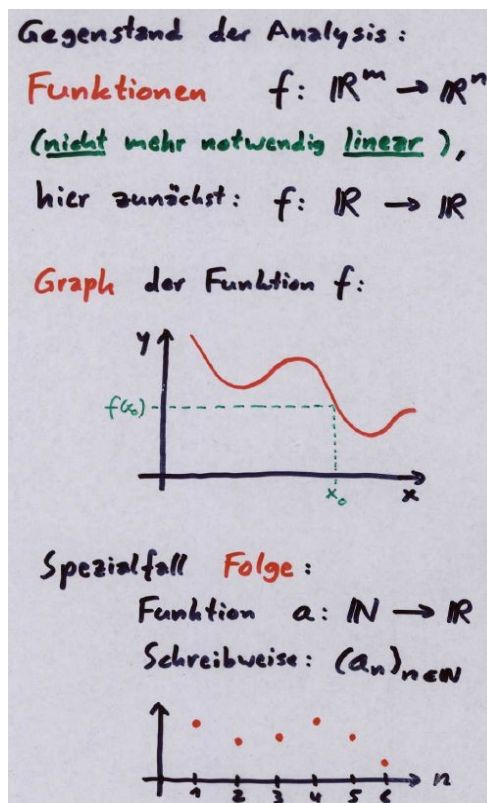
## KAPITEL 3: GRUNDLAGEN DER DIFFERENTIALRECHNUNG

Neuere Methoden zur Beschreibung dynamischer Vorgänge in Waldökosystemen (Veränderung von Waldkomponenten) setzen als mathematisches Instrumentarium u.a. Grundlagen der Analysis voraus. Einige Beispiele, wie z.B. Wachstumsprozesse, lassen sich durch sogenannte differenzierbare Funktionen erfolgreich beschreiben. Und diese werden auch zu Prognosen von Wuchsleistungen der Bäume und Bestände, zur Beschreibung der Entwicklung von Populationen, zu Optimierungsaufgaben sowie zu Räuber-Beute-Modellen herangezogen. Viele Verfahren der mathematischen Physik haben bereits eine lange Tradition und aufgebaute Infrastruktur. In der Biologie dagegen und insbesondere im Forstwesen, das ja sozioökonomisch ausgerichtete Biozönosen zu steuern und zu regeln hat, halten sich seit langer Zeit konventionelle Methoden. Diese werden immer mehr durch moderne, leistungsfähigere und durch EDV-Technik unterstützte mathematisch-statistische Verfahren ersetzt. Um den Anschluss hieran zu erleichtern, ist es notwendig, sich mit den Grundlagen der Analysis (Differential- und Integralrechnung mit einer und mehreren Variablen sowie Differentialgleichungen) zu befassen.

### Funktionen mit einer reellen Variablen

Hier spielt der Begriff der *Funktion einer reellen Variablen* eine wesentliche Rolle, der im 1. Kapitel behandelt wurde.

Zum Funktionsbegriff:



**Definition 3.1:** Eine Abbildung  $f$  einer Menge  $A$  in eine Menge  $B$  nennen wir *reelle Funktion einer reellen Variablen*, falls  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .

- Schreibweisen:** (a)  $f = \{(x, y) \in D(f) \times B(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid V(x, y)\}$   
 (b)  $f = \{(x, y) \in D(f) \times B(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$   
 (c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \in D(f) \subseteq \mathbb{R}; y \in B(f) \subseteq \mathbb{R}$   
 (d)  $y = f(x); x \in D(f) \subseteq \mathbb{R}$

Abbildung 44

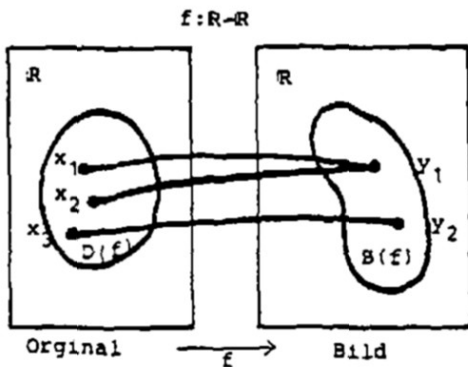
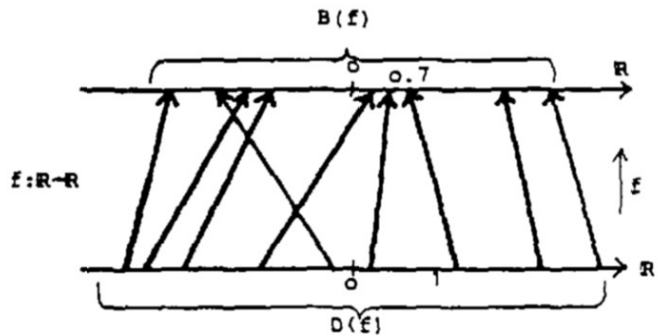


Abbildung 45



Definitionsbereich einer Funktion

**Definition 3.2:** Die Menge  $D(f)$  heißt **Definitionsbereich** der Funktion, das Element  $x \in D(f)$  heißt **Wert der unabhängigen Variablen** (Original);  $y \in B(f)$  heißt **Wert der abhängigen Variablen** (Bild).

**Symbolisch:**  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } (x, y) \in f\}$

**Definition 3.3:** Die Menge  $B(f)$  heißt **Funktionsbereich** oder Bildmenge der Funktion  $f$ .

**Symbolisch:**  $B(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ mit } (x, y) \in f\}$

Darstellungsweisen:

Sind die Mengen  $D(f)$  und  $B(f)$  vorher bekannt, wird die Funktion nur mit Hilfe der Funktionsgleichung  $y = f(x)$  beschrieben. Die Funktion kann in verschiedenen Formen angegeben werden, z.B. als

- (a) sogenannte explizite Form der Funktionsgleichung mit  $y = f(x)$ , d.h.  $y$  wird aus  $x$  berechnet,
- (b) sogenannte **implizite Form** der Funktionsgleichung mit  $F(x, y) = 0$  (nur solche  $(x, y)$  sind zulässig, die diese Gleichung  $F(x, y) = 0$  erfüllen).

(c) **Funktionstabelle**

<b>x</b>		$x_1$	$x_2$	$x_3$	...
<b>y</b>		$y_1$	$y_2$	$y_3$	...

(d) **Graph** der Funktion  $f$ .

**Definition 3.4:** Die Menge der Punkte  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D(f) \wedge y = f(x)\}$  heißt **Graph der Funktion  $f$** .  
Die Darstellung erfolgt gewöhnlich im kartesischen Koordinatensystem.

Abbildung 46

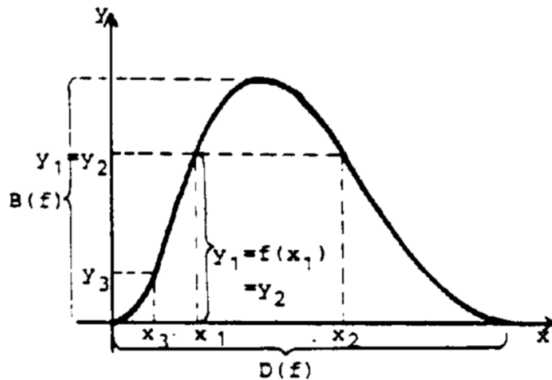


Abbildung 48

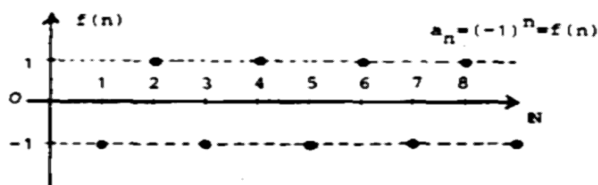
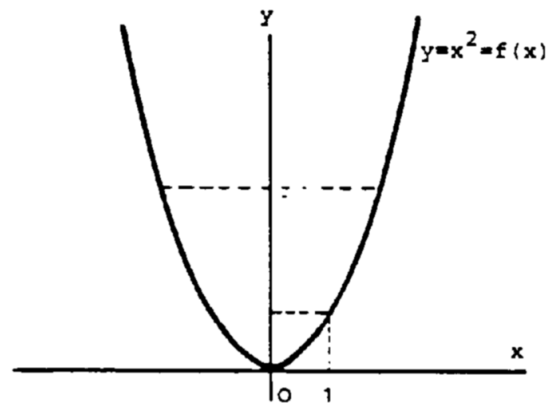


Abbildung 47



**Beispiel 3.1:** Der Graph von  $y = x^2$  ist eine Parabel (siehe Abb. 47). Der Definitionsbereich ist  $D(f) = (-\infty, \infty)$ , der Bildbereich  $[0, \infty)$ .

## Folgen

**Definition 3.5:** Ist  $D(f) = \mathbb{N}$  (Menge der natürlichen Zahlen), so wird die Funktion  $f(n) = a_n$  **Folge** genannt.

**Schreibweise:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Die Werte  $a_n$  nennen wir **Glieder** der Folge, und  $n$  ist der Index des  $n$ -ten Gliedes.

**Beispiel 3.2:** Der Graph der Folge  $(-1)^n$  ist die Menge der isolierten Punkte  $(1; -1), (2; 1), (3; -1), \dots, (n, a_n), \dots$  (siehe Abb. 48).

## Gerade / ungerade Funktionen

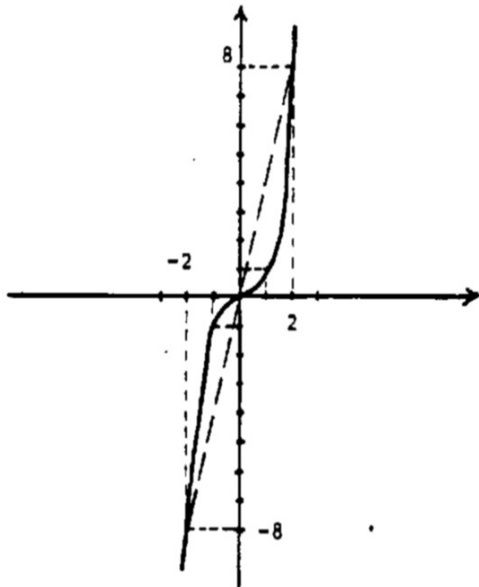
**Definition 3.6:** Die Funktion  $f$  heißt

- (a) **gerade**, wenn  $\forall x \in D(f)$  gilt:  $f(-x) = f(x)$   
(Der Graph einer geraden Fkt. ist symmetrisch zur  $y$ -Achse, z.B.  $y = x^2$ .)

(b) **ungerade**, wenn  $\forall x \in D(f)$  gilt:  $f(-x) = -f(x)$

(Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch bezüglich  $(0, 0)$ , z.B.  $y = x^3$  (Abb. 49) oder  $y = \sin x$ .)

Abbildung 49



Beachte: Viele Funktionen sind weder gerade noch ungerade!

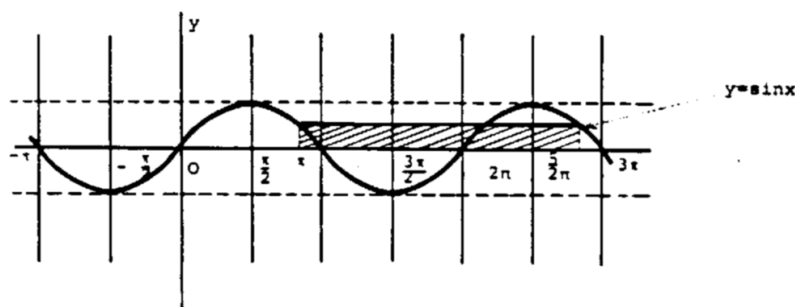
**Beispiel 3.3:** Die Funktion  $y = \frac{\sin x}{x}$  ist eine gerade Funktion, da

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x) .$$

### Periodische Funktionen

**Definition 3.7:** Die Funktion  $f$  heißt **periodisch** in  $D(f)$ , wenn es ein  $p > 0$  gibt, so dass  $\forall x \in D(f)$  gilt:  $f(x+p) = f(x)$ . Die Zahl  $p$  heißt die **Periode** der Funktion.

Abbildung 50



**Beispiel 3.4:** Die Funktion  $y = \sin x$  ist periodisch in  $(-\infty, +\infty)$  mit der Periode  $2\pi$ , entsprechend  $360^\circ$  (siehe Abb. 50). Die Funktion  $y = \operatorname{tg} x$  ist periodisch in

$$\mathbb{R} - \left\{ (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ mit der Periode } \pi. (\mathbb{Z} = \text{Menge der ganzen Zahlen.})$$

Zusammenfassung:

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Funktion.

$f$  gerade  $: \Leftrightarrow \forall x: f(-x) = f(x)$


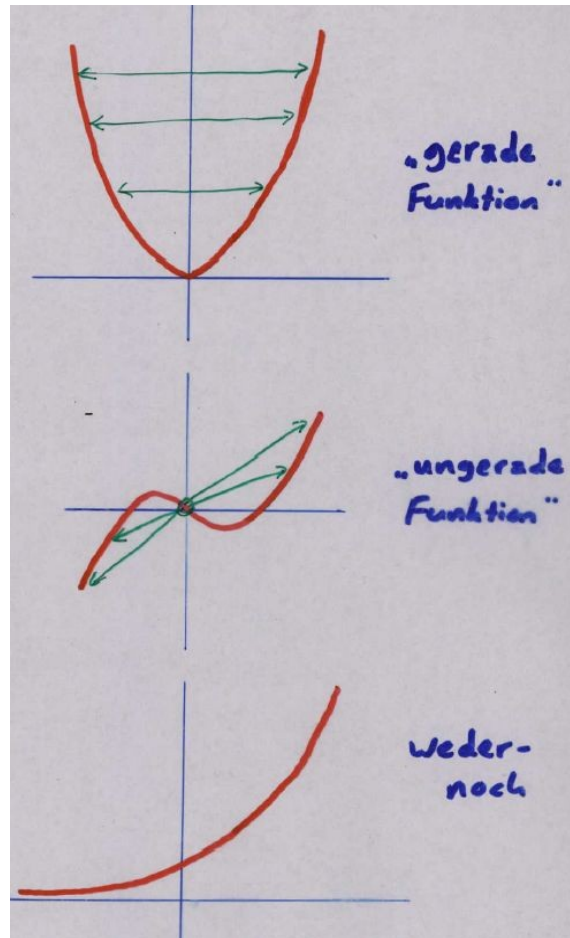
$f$  ungerade  $: \Leftrightarrow \forall x: f(-x) = -f(x)$

**Beachte:**  
Viele  $f$  sind weder gerade noch ungerade!

Bsp. einer geraden Funktion:  
 $f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0)$ .

Denn:  
 $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$ .  
 $\swarrow$  sin ist ungerade Funktion.

$f$  periodisch  $: \Leftrightarrow \exists p \forall x: f(x+p) = f(x)$ .

„gerade Funktion“

„ungerade Funktion“

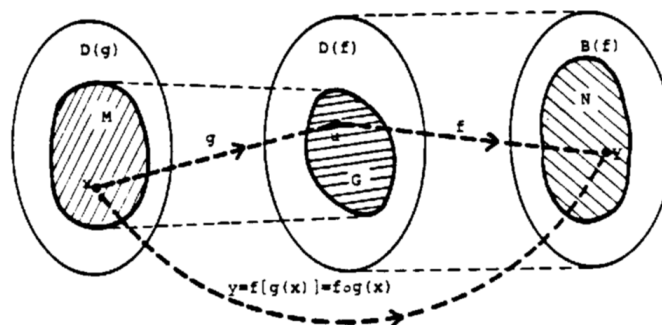
weder noch

Geschachtelte Funktionen (Komposition, Verkettung)

**Definition 3.8:** Gegeben sei die Funktion  $y = f(u)$  mit  $u \in G \subseteq D(f)$  und die Funktion  $u = g(x)$  mit  $x \in M \subseteq D(g)$ .

Es sei  $\forall x \in M$  ein  $u \in G$  definiert. Dann entspricht jedem  $x \in M$  genau ein Wert  $y \in N \subseteq B(f)$ , der mit  $y = f(g(x))$  oder  $(f \circ g)(x)$  bezeichnet wird. Die Funktion  $g$  heißt die **innere** und  $f$  die **äußere Komponente** der geschachtelten Funktion  $(f \circ g)$  (siehe Abb. 51).

Abbildung 51



**Beispiel 3.5:** Für die Funktion  $y = f(u) = u^4$  ist  $D(f) = B(f) = (-\infty, \infty)$ .  
 Für die Funktion  $u = g(x) = \sin x$  ist  $D(g) = (-\infty, \infty)$ .  
 Für die Funktion  $u = g(x)$  ist  $B(g) = [-1, 1] \subseteq D(f)$ .  
 Daraus folgt, dass die Funktion  $y = f(g(x)) = (\sin x)^4 = \sin^4 x$  auf  $(-\infty, \infty)$  definiert ist.

**Beispiel 3.6:** (a) Für die Funktion  $y = f(u) = e^{ku}$  ist  $D(f) = (-\infty, \infty)$ .  
 Für die Funktion  $u = g(x) = \frac{1}{x^a}$ ,  $a > 0$  reell, ist  $D(g) = (0, \infty)$ .  
 Für die Funktion  $g(x)$  ist  $B(g) = (0, \infty) \subseteq D(f)$ .

Daraus folgt, dass die Funktion  $y = f(g(x)) = e^{k \cdot \frac{1}{x^a}}$  auf  $(-\infty, \infty)$  definiert ist.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x + 1 \\ g(x) &= x - 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 1) \\ &= (x - 1)^2 + (x - 1) + 1 \\ &= x^2 - 2x + 1 + x - 1 + 1 \\ &= \underline{\underline{x^2 - x + 1}} \end{aligned}$$

### Inverse Funktion

Für die Einführung der inversen Funktion ist der Begriff einer **eindeutigen Funktion** von Bedeutung, und dieser entspricht dem der *injektiven* Abbildung im Spezialfall der Funktion von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

**Definition 3.9:** Die Funktion  $f$  heißt **eindeutig** (injektiv) in  $M$ , wenn  
 $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$  (vergl. Def. 1.13)

Abbildung 52

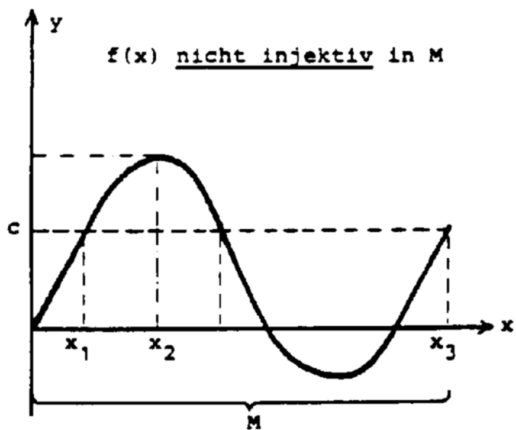
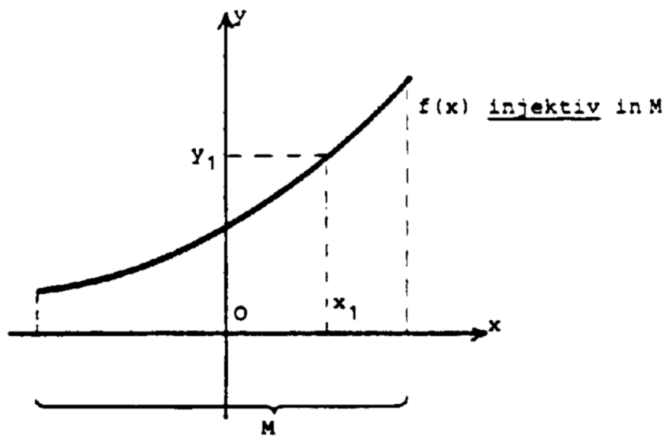


Abbildung 53



**Definition 3.10:** Ist  $f$  in  $M \subseteq D(f)$  injektiv, und bildet  $f$  die Menge  $M$  auf  $N \subseteq B(f)$  ab, d.h.  $f: M \rightarrow N$ , dann wird die Funktion, die jedem  $y \in N$  die Zahl  $x \in M$  mit  $f(x) = y$  zuordnet, die **inverse Funktion** zur Funktion  $f$  genannt und mit  $f^{-1}$  bezeichnet,  $x = f^{-1}(y)$ , also  $f^{-1}: N \rightarrow M$ . (Sie wird daher auch Umkehrfunktion genannt.)

Für Definitionsbereich und Bildbereich der Funktion  $f^{-1}$  gilt:

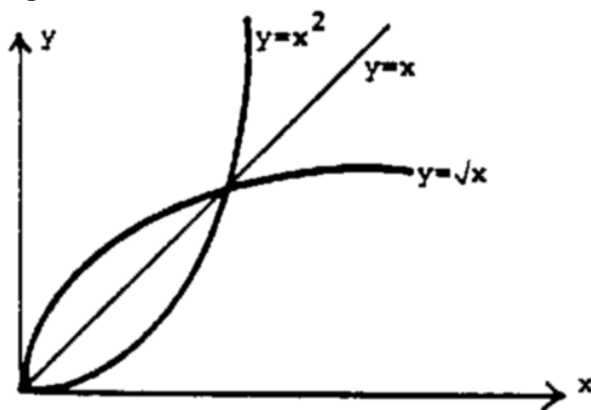
- (a)  $D(f^{-1}) = B(f)$  (Die Bezeichnung der Variablen wird dann aber vertauscht, damit die unabhängige Variable immer mit  $x$  und die abhängige einheitlich mit  $y$  bezeichnet wird.)  
 (b)  $B(f^{-1}) = D(f)$ .

Den Graphen der inversen Funktion  $y = f^{-1}(x)$  erhalten wir aus dem Graphen der Funktion  $y = f(x)$  durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden, der Geraden  $y = x$  (Vertauschen von  $x$  und  $y$ , siehe Abb. 54).

**Beispiel 3.7:**  $y = f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, \infty)$ . Die inverse Funktion  $f^{-1}$  zu  $f$  wird durch Auflösen nach  $x$  erhalten als  $x = \sqrt{y}$ . Nach Vertauschung der Variablen ergibt sich die zu  $y = f(x) = x^2$  symmetrisch verlaufende Funktion  $y = \sqrt{x}$ , wobei die Gerade  $y = x$  die Symmetrieachse darstellt.

Graphen von  $y = x^2$  und der inversen Funktion  $y = \sqrt{x}$ :

Abbildung 54



$$D_x(f) = [0, \infty); B_y(f) = [0, \infty)$$

$$B_y(f^{-1}) = [0, \infty); D_x(f^{-1}) = [0, \infty)$$

**Beispiel 3.8:** (a) Zur Funktion  $y = \sin x$ ;  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ;  $y \in [-1, 1]$  ist die inverse Funktion

$$\text{definiert: } y = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1] \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

- (b) Zur allgemeinen Exponentialfunktion  $y = a^x$ ;  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $y \in (0, \infty)$  ist die inverse Funktion definiert:  $y = \log_a x$ ,  
 $x \in (0, \infty)$ ;  $y \in (-\infty, \infty)$  (gelesen: *Logarithmus von  $x$  zur Basis  $a$* ).

Es gilt  $f(f^{-1}(x)) = x$ ;  $f^{-1}(f(x)) = x$ ;  
 z.B.:  $\ln e^x = x$ ;  $\arcsin \sin x = x$ .

**Beispiel 3.9:** Bestimmen Sie  $D(f)$  zur Funktion  $f$ , bestimmen Sie  $f^{-1}$  zu  $f$ :  
 $y = f(x) = 1 + \ln(x+2)$ ;  $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$ .

$$D(f) = (-2, \infty); B(f) = (-\infty, \infty);$$

$$f^{-1}(x): \ln(x+2) = y - 1 \Rightarrow x + 2 = e^{y-1} \Rightarrow x = e^{y-1} - 2$$

Vertauschung der Bezeichnung für die Variablen ergibt:  $y = e^{x-1} - 2 = f^{-1}(x)$ .

**Beispiel 3.10:**  $y = 4 \arcsin \sqrt{1-x^2}$ ;  $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow$   
 $-1 \leq x \leq 1$ ,  $x^2 \geq 0$  gilt immer;

$$f^{-1}(x): \sqrt{1-x^2} = \sin\left(\frac{y}{4}\right) \Rightarrow 1-x^2 = \sin^2\left(\frac{y}{4}\right) \Rightarrow$$

$$x^2 = 1 - \sin^2\left(\frac{y}{4}\right) \Rightarrow x = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{y}{4}\right)} = \cos\frac{y}{4}$$

Änderung der Variablenbezeichnung:  $y = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ .

Beispiel:

Umkehrfunktion

gegeben:  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{2}$  ( $x > -1$ )

$$y = \frac{1}{2} \ln(x+1)$$

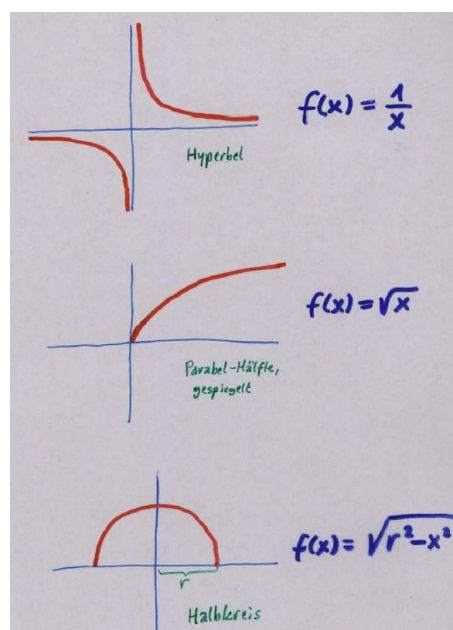
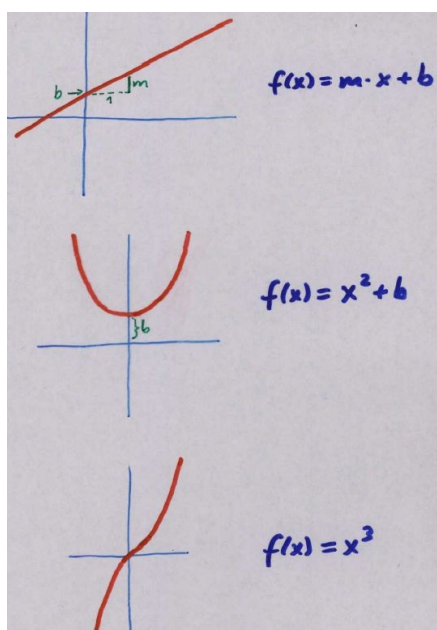
$$2y = \ln(x+1)$$

$$e^{2y} = x+1$$

$$x = e^{2y} - 1$$

$$f^{-1}(x) = e^{2x} - 1$$

### Grundlegende Funktionen (Übersicht)

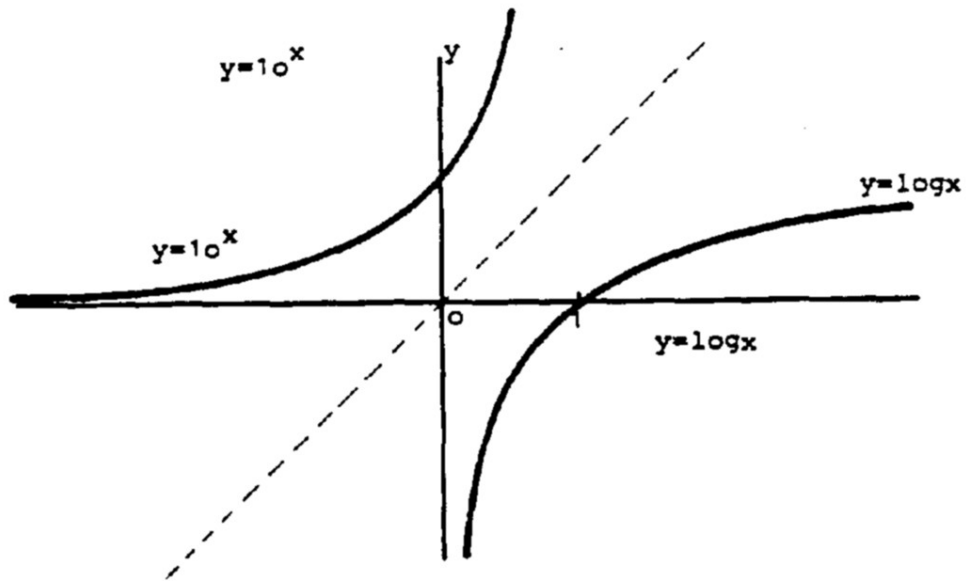




## Tabelle der Elementarfunktionen

Name der Funktion	Einfache Form $f(x)$	Definitionsbereich	Bildbereich	Form der geschachtelten Fkt.	Beispiele
Konstante	$y = c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{c\}$		$y = 9$
Lineare Funktion	$y = mx + b$ $m, b \in \mathbb{R}$ $m \neq 0.$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y = m \cdot f(x) + b$	$y = -x + 42$
Potenzfunktion	$y = x^n$ $n \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$y = (f(x))^n$	$y = \sin^3 x ;$ $y = \sqrt{\log x}$ $= (\log x)^{\frac{1}{2}}$
Exponentialfunktion	$y = e^x,$ $y = a^x, a > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = e^{f(x)}$ $y = a^{f(x)}$	$y = e^{x^2}$ $y = 3^{\cos x}$
Logarithmusfunktion	$y = \log_a x,$ $a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$y = \log_a f(x)$	$y = \log_3 \operatorname{tg} x$
Trigonometrische Funktionen	$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$ $\mathbb{R} - \{k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$	$[-1, 1]$ $[-1, 1]$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$y = \sin f(x)$ $y = \cos f(x)$ $y = \operatorname{tg} f(x)$ $y = \operatorname{cotg} f(x)$	$y = \sin x^5$ $y = \cos 2x$ $y = \operatorname{tg} x/2$ $y = \operatorname{cotg} (x^2+1)$
Zyklometrische Funktionen	$y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \operatorname{arctg} x$ $y = \operatorname{arccotg} x$	$[-1, 1]$ $[-1, 1]$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $[0, \pi]$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $[0, \pi]$	$y = \arcsin f(x)$ $y = \arccos f(x)$ $y = \operatorname{arctg} f(x)$ $y = \operatorname{arccotg} f(x)$	$y = \arcsin \frac{1}{x}$ $y = \arccos 4x$ $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$ $y = \operatorname{arccotg}(-2x)$

Abbildung 55



Ähnliche Form hat  $y = e^x$  bzw. die Umkehrfunktion dazu,  $y = \ln x$ .

Abbildung 56

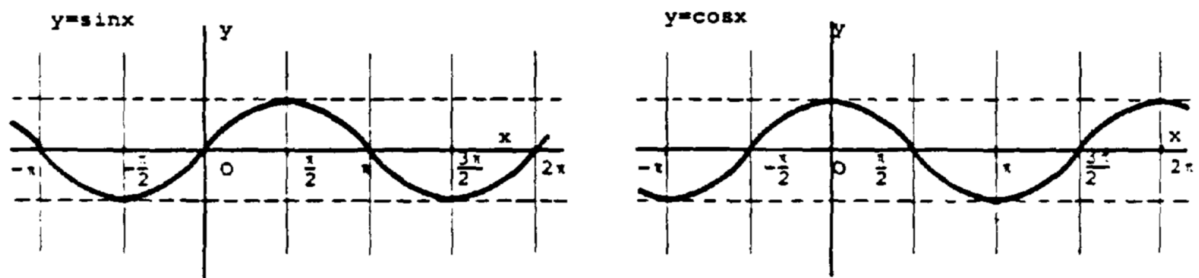


Abbildung 57

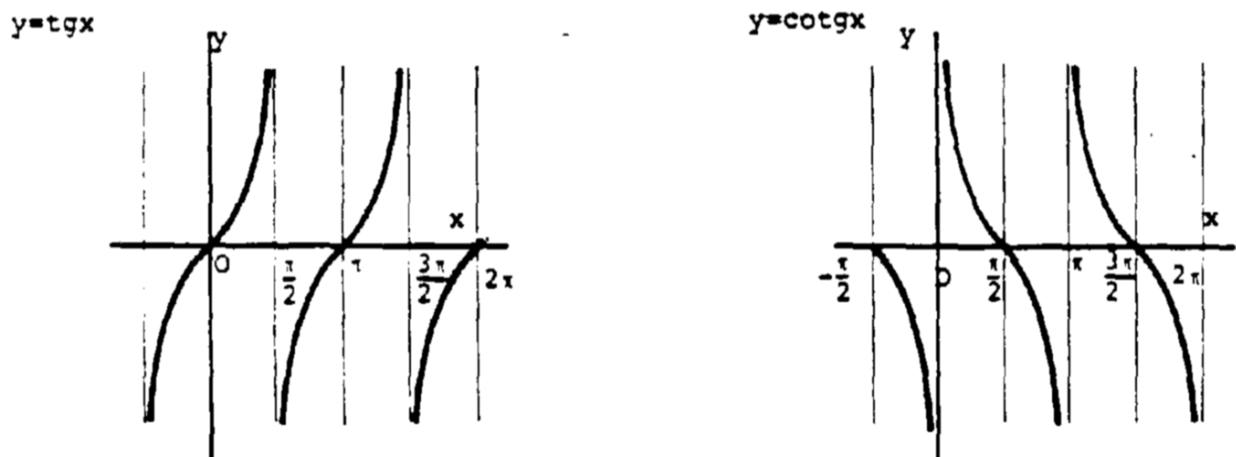
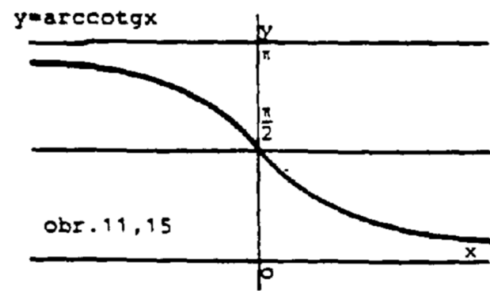
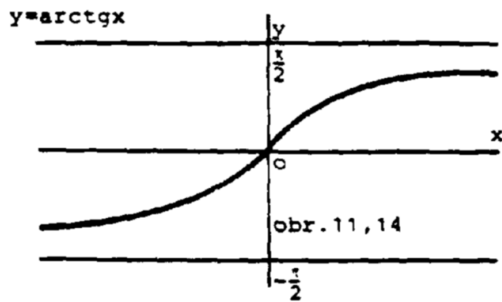
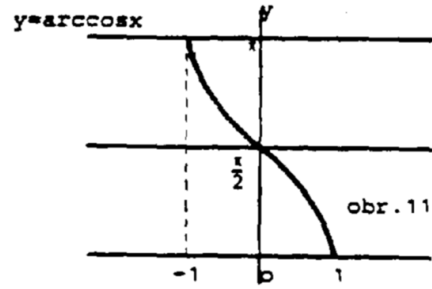
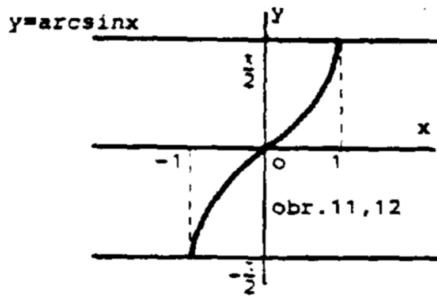


Abbildung 58



Zu den trigonometrischen Funktionen

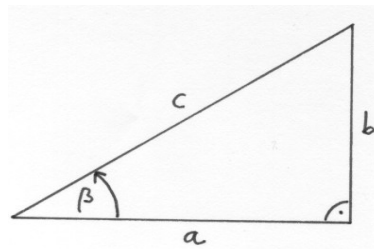


Abbildung 59

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \quad \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \quad \operatorname{cotg} \beta = \frac{a}{b} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

Gradmaß – Bogenmaß:

$$\pi = 180^\circ \Rightarrow \text{Umrechnungsfaktor: } x_{\text{Bogenmaß}} = x_{\text{Gradmaß}} \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{bzw. } x_{\text{Gradmaß}} = x_{\text{Bogenmaß}} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Merke:

$$\sin 0^\circ = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

## Grenzwert einer Funktion

An dieser Stelle werden sich die Definitionen und Eigenschaften von Umgebungen von Punkten  $a \in \mathbb{R}$  als sinnvoll erweisen.

### Bezeichnungen:

$U(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \delta\}$  heißt  **$\delta$ -Umgebung** von  $a$ ;

$U \cdot(a, \delta) = U(a, \delta) - \{a\}$  heißt **punktierte  $\delta$ -Umgebung** von  $a$ ;

$U^+(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < a+\delta\}$  heißt **rechte  $\delta$ -Umgebung** von  $a$ ;

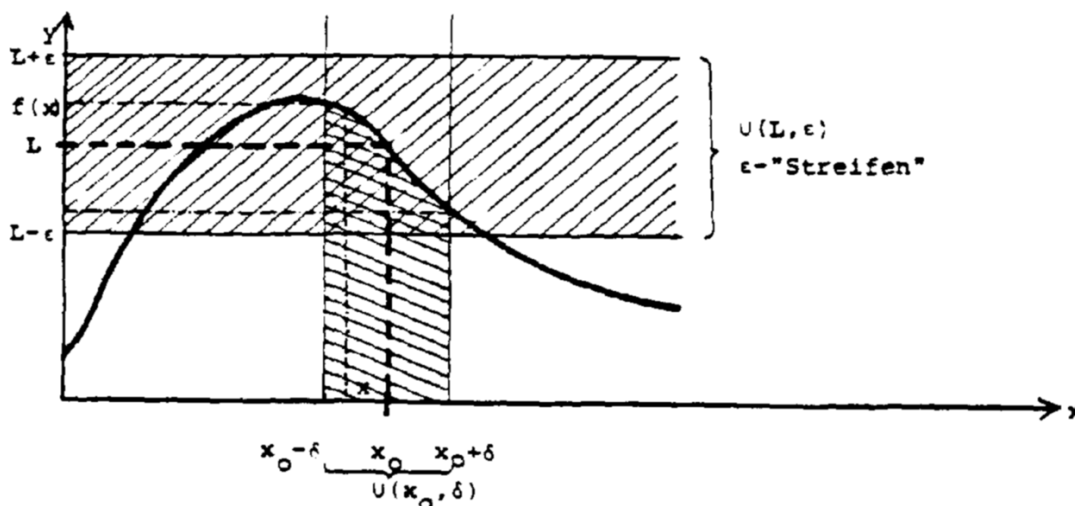
$U^+ \cdot(a, \delta) = U^+(a, \delta) - \{a\}$  heißt **rechte punktierte  $\delta$ -Umgebung** von  $a$ .

Analog wird die linke Umgebung  $U^-(a, \delta)$ ,  $U^- \cdot(a, \delta)$  definiert.

**Definition 3.11:**  $f(x)$  sei in einer punktierten Umgebung  $U$  des Punktes  $x_0$  definiert. Die Funktion  $f$  hat den Grenzwert  $L$  genau dann, wenn zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $U(L, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$  von  $L$  (reelle Zahl) eine  $\delta$ -Umgebung  $U \cdot(x_0, \delta) \subseteq \mathbb{R}$  des Punktes  $x_0$  existiert, so dass  $\forall x \in U \cdot(x_0, \delta)$  gilt:  $f(x) \in U(L, \varepsilon)$ .

**Bezeichnung:**  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (siehe Abb. 60), kurz auch:  $f(x) \rightarrow L$  für  $x \rightarrow x_0$ .

Abbildung 60



### Geometrische Deutung des Grenzwertes von $f(x)$ :

Die Existenz von  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  bedeutet geometrisch folgendes:

Für  $x \in U \cdot(x_0, \delta)$  liegt der Graph von  $y = f(x)$  innerhalb des Streifens zwischen  $y = L + \varepsilon$  und  $y = L - \varepsilon$ . Genauer ausgedrückt:

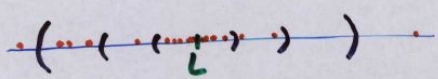
Wählen wir den Streifen zwischen  $y = L + \varepsilon$  und  $y = L - \varepsilon$  beliebig eng, so existiert immer eine  $\delta$ -Umgebung von  $x_0$ , so dass für alle Punkte  $x \neq x_0$  aus dieser Umgebung gilt:

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

**Symbolisch:**  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in U \cdot(x_0, \delta)$  gilt:  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .


Zusammenfassung:

Grenzwert einer Folge :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \iff$$


in jeder (noch so kleinen) Umgebung von  $L$  liegen fast alle (= alle bis auf endlich viele) Folgenglieder  $a_n$ .

Grenzwert einer Funktion :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff$$


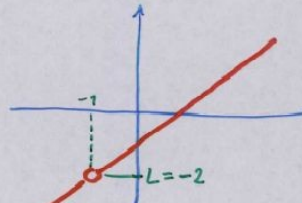
Zu jeder (noch so kleinen) Umgebung von  $L$  (Genauigkeitsband),  $U(L)$ , gibt es eine Umgebung  $U_0$  von  $x_0$ , die ganz in  $U(L)$  abgebildet wird. ( $U_0$  = "punktierter" Umgebung,  $x_0$  braucht nicht dazu zu gehören.)

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$

für  $x \neq -1$ :  $= x - 1$   
 für  $x = -1$ : nicht def.



$\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = -2$

Zu jeder Umgebung  $U$  von  $-2$  (auf der y-Achse) gibt es eine punktierte Umgebung von  $-1$  (auf der x-Achse), die von  $f$  ganz in  $U$  abgebildet wird.

Schreibweisen für verschiedene Arten von Grenzwerten:

(a) **Endlicher Grenzwert von rechts im endlichen Punkt  $x_0$  (rechtsseitiger Grenzwert):**

Bez.:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in U^+(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

(siehe Abb. 61). Analog linksseitiger Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

(b) **Endlicher Grenzwert in  $+\infty$**

Bez.:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists k \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in (k, +\infty) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$  (siehe Abb. 63).

(c) **Unendlicher Grenzwert im endlichen Punkt  $x_0$**

$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) > M$  (siehe Abb. 62).

- Wichtig:** (a) Die Wahl von  $\delta > 0$  oder  $k$  ist abhängig von der Wahl der Zahl  $\varepsilon > 0$ .  
 (b) Aus der Definition 3.11 geht klar hervor, dass uns die Funktionswerte  $x_0$  in Punkten, die außerhalb von  $U(x_0, \delta)$  liegen, nicht interessieren (Grenzwert als lokale Eigenschaft).

Abbildung 61

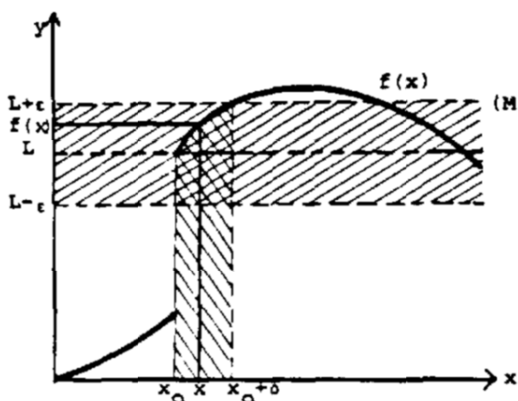


Abbildung 62

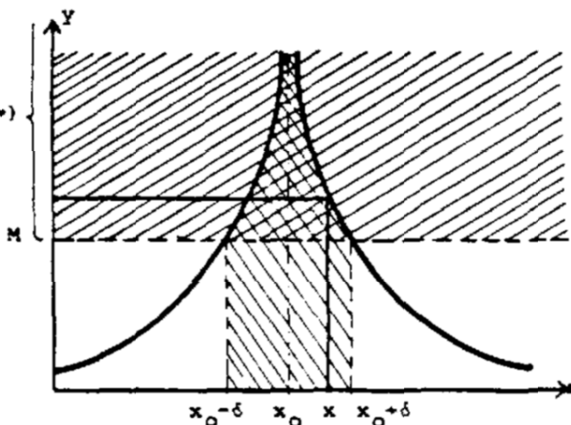
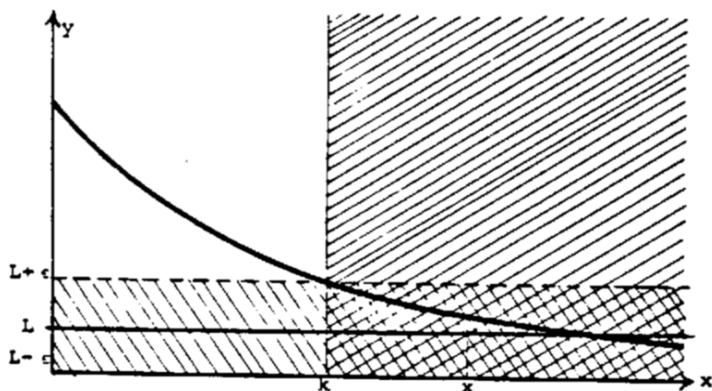


Abbildung 63



Spezielle grundlegende Grenzwerte:

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$

Wichtige Regeln zu Operationen mit den Grenzwerten

**Voraussetzung:** Es existieren die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

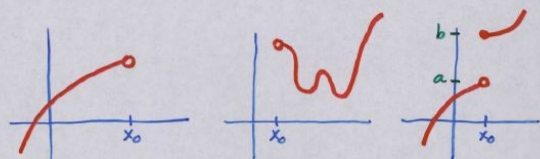
- Dann gilt:**
1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k \quad k \in \mathbb{R};$
  2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) ;$
  3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| ;$
  4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) ;$

5.  $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  ;
6.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$  falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$  ;
7.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^P = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^P$  falls  $f(x) \geq 0$  ;

Die Beweise hierfür sind Analysis-Lehrbüchern zu entnehmen.

Zusammenfassung:

**Einseitige Grenzwerte :**



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  oder  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  („von unten“)  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  oder  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  („von oben“)

hier ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = b$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $a \neq b$

**einige grundlegende Grenzwerte:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

**Grenzwert-Rechenregeln:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

ebenso für „-“, „·“, „÷“  
↑  
Sollern Nenner  $\neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

⇒ „lim ist ein linearer Operator“

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

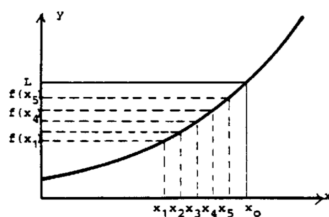
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^P = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^P$$

Bei der Einführung des Grenzwertes von Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen ist folgende äquivalente Definition des Grenzwertes von Bedeutung:

**Definition 3.12:**  $f(x)$  sei in einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  definiert.

Die Funktion  $f(x)$  hat in  $x_0$  den Grenzwert  $L$ , wenn für jede Folge  $(x_n)$ ,  $x_n \in U$ , mit  $(x_n \rightarrow x_0 \wedge \forall n x_n \neq x_0)$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow L$  (siehe Abb.64).

Abbildung 64



In den folgenden Beispielen werden einige Methoden zur Berechnung von Grenzwerten gezeigt:

**Beispiel 3.11:** (a) Bei stetigen Funktionen wird einfach  $x_0$  in  $f(x)$  eingesetzt:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3^x + 1)^2 = (3^2 + 1)^2 = 100$$

(b) Durch Zerlegung der Polynome in Zähler und Nenner einer gebrochen-rationalen Funktion kann eventuell die Unstetigkeit aufgehoben werden, nämlich durch Kürzen:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)}{(x^2 - 2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

(c) Beim Vorliegen von Wurzeln werden oft Zähler und Nenner um einen Faktor erweitert, um die Unstetigkeit zu beheben:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2) \cdot (\sqrt{x-1} + 2)}{(x^2 - 4x - 5) \cdot (\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x + 1)(x - 5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

(d) Oft werden der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  und die Identitäten

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \text{und} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \text{angewandt:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{1 - \cos 4x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{2} \sin 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \frac{2x}{2x}} \\ &= \parallel \text{Subst.: } 2x = t \quad x \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 0 \parallel \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \end{aligned}$$

(e) Einseitige Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ) werden mit Hilfe der

Substitution  $x = x_0 + \delta$ , ( $x = x_0 - \delta$ ) gelöst, indem die Grenzwerte

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(x_0 + \delta), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(x_0 - \delta) \quad \text{berechnet werden.}$$

$$\text{Z.B. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1}{9 - x^2} = \parallel \text{Subst.: } x = 3 + \delta \quad x \rightarrow 3, \quad \delta \rightarrow 0 \parallel$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2(3 + \delta) + 1}{9 - (3 + \delta)^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{6 + 2\delta + 1}{9 - (9 + 6\delta + \delta^2)}$$

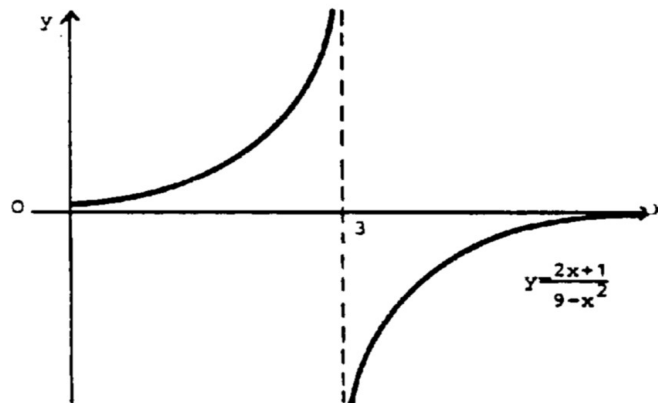


$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} -\frac{7+2\delta}{6\delta+\delta^2} = -\infty$$

(Der Grenzwert des Bruches ist  $\infty$ , weil der Nenner sehr klein und damit der Bruch als ganzes sehr groß wird, wenn sich  $\delta$  an Null annähert.)

Analog ist  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{9-x^2} = +\infty$  (siehe Abb. 65).

Abbildung 65



(f) Beim Typ  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \pm\infty & n > m \\ \frac{a_n}{b_n} & n = m \end{cases}$

werden Zähler und Nenner durch  $x^k$  dividiert, wobei  $k = \max(n, m)$  ist.

z.B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{5}{x^2}} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{2x^2+3x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

Falls  $n > m$ , „Zähler dominiert“:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x^2+x-5}{10x^2+2x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5-3x^2+1}{-x^3+10} = -\infty \quad (-\infty \text{ wegen „-“ im Nenner})$$

Falls  $n = m$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 5}{-3x^4 + 7} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^3 + 5x^2}{2x^3 - 7x + 1} = 5 \quad (\text{ebenso, „-“ kürzt sich weg})$$

Falls  $n < m$ , „Nenner dominiert“:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{50x^2 + 8x - 1}{x^3 + 3x^2 - 2} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^x &= \parallel \text{Subst.: } x+4=u \quad x \rightarrow \infty \quad u \rightarrow \infty \parallel = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u-4} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-4} = e \cdot 1^{-4} = e \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

**Techniken der Grenzwertberechnung:**

(a) Einsetzen von  $x_0$ , wenn  $f(x_0)$  definiert ist u.  $f$  „stetig“ ist  
(siehe später)

z.B.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3^x + 1)^2 = (3^2 + 1)^2 = 100$

(b) Polynom-Zerlegung + Kürzen:  
 z.B.  

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - x^2 - x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \cdot (x+2)}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

**Schriftliche Polynom-Division:**  
 $(x^3 - x^2 - x + 1) : (x-1) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 \\ \underline{0 - x + 1} \\ -x + 1 \\ \underline{0} \end{array}$$

(c) Fallunterscheidung bei gebrochenrationalen Funktionen im Fall  $x \rightarrow \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } n < m \\ \pm \infty & \text{falls } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \end{cases}$$

Beachte:  
 Diese Regel gilt nur für  $x \rightarrow \pm \infty$ .

**Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen**

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

für  $x \rightarrow \pm \infty$ , Beispiele:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 5}{10x^2 + 2x + 3} = +\infty$   
 Fall  $n > m$ , „Zähler dominiert“
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 1}{-x^3 + 10} = -\infty$   
 ebenso, jedoch hier  $-\infty$  wegen „-“ im Nenner
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 5}{-3x^4 + 7} = -\frac{2}{3}$   
 Fall  $n = m$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^3 + 5x^2}{2x^3 - 7x + 1} = 5$   
 ebenso, „-“ kürzt sich weg
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{50x^2 + 8x - 1}{x^3 + 3x^2 - 2} = 0$   
 Fall  $n < m$ , „Nenner dominiert“

## O-Notation nach Bachmann und Landau (Großbuchstabe O, nicht Null!)

$f(x) = O(g(x))$  heißt:

für alle genügend großen  $x$  gilt:

$$|f(x)| \leq c \cdot |g(x)| \quad (c = \text{Konstante}),$$

„ $f$  wird durch  $c \cdot g$  (dem Betrage nach) majorisiert“,

„ $f$  ist höchstens von der Größenordnung  $g$ “

$f(x) = o(g(x))$  heißt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

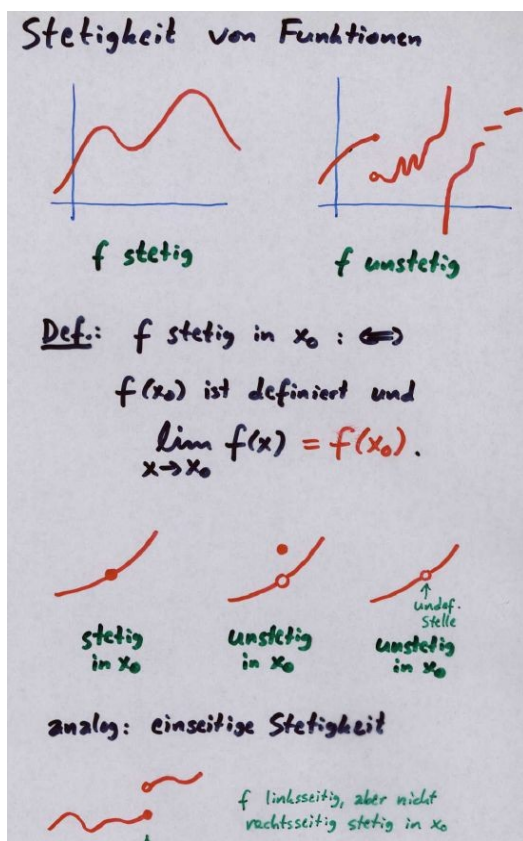
Beachte: Das Gleichheitszeichen ist hier eigentlich fehlerhaft. Aus  $f_1(x) = O(g(x))$  und  $f_2(x) = O(g(x))$  folgt nicht  $f_1 = f_2$ .

Beispiele:  $5x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 1 = O(x^4)$

$$x^{10} - 6x^5 + \frac{1}{2}e^x = O(e^x)$$

$$5x + \sqrt{x} + 2 \log x = O(x)$$

## Stetigkeit von Funktionen



**Definition 3.13:** Die Funktion  $f$  ist im Punkt  $x_0$  stetig,

(a) wenn sie in  $x_0$  definiert ist (d.h. das Symbol  $f(x_0)$  hat einen Sinn),

(b) wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  gleich dem Funktionswert ist, d.h.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Symbolisch:**  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ , so dass  $\forall x \in \mathbb{R}$  gilt:  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .  
Andernfalls heißt  $f$  in  $x_0$  unstetig.

### Einseitige Stetigkeit

Die Funktion  $f$  heißt in  $x_0$  rechtsseitig (linksseitig) stetig, wenn sie in  $x_0$  definiert ist und wenn gilt:

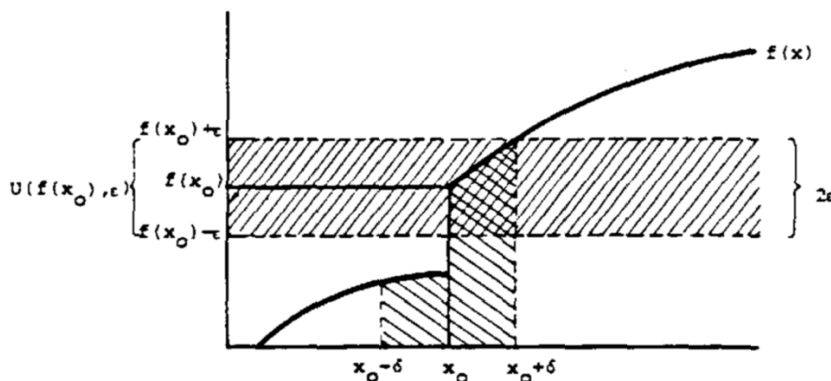
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0))$$

In der naiven Vorstellung kann man sich eine stetige Funktion als einen Graphen denken, den man mit einem Zug, ohne abzusetzen, zeichnen kann. Unterbrechungen und Sprünge treten darin nicht auf. (Beispiele: Wachstumsfunktionen und morphologische Kurven von Stämmen). Eine stetige Funktion hat also folgende Eigenschaft: Ändert man  $x$  „sehr wenig“ auf  $(x + \Delta x)$ , so wird sich  $f(x)$  sehr wenig ändern (auf  $f(x + \Delta x)$ ).

D.h.: Geht  $\Delta x$  gegen 0 ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), so gilt auch  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow 0$ .

Die in der Abbildung 66 dargestellte Funktion  $f$  ist in  $x_0$  unstetig, da zu beliebig gewähltem  $\varepsilon$  keine  $\delta$ -Umgebung von  $x_0$ ,  $U(x_0, \delta)$ , existiert, so dass alle Funktionswerte  $f(x) \forall x \in U(x_0, \delta)$  im  $2 \cdot \varepsilon$ -Streifen liegen. Die dargestellte Funktion ist aber in  $x_0$  rechtsseitig stetig.

Abbildung 66



Die sogenannten Elementarfunktionen  $f$  dienen sehr oft als Bausteine für Modelle (Potenz-, Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische Funktionen, etc.). Die in der Tabelle (s.o.) aufgeführten Funktionen sind in allen  $x \in D(f)$  stetig.

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft der Funktion.

Ist aber eine Funktion  $f(x)$  für alle  $x_0 \in [a, b]$  stetig, so sagen wir,  $f(x)$  ist *auf dem Intervall*  $[a, b]$  stetig.

Man beweist in der Analysis:  $y = \text{const.}$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig.

Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $x_0$  (auf  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ) stetig, so ist

- (a)  $f(x) + g(x) = h(x)$  in  $x_0$  (auf  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ) stetig.
- (b)  $f(x) \cdot g(x)$  in  $x_0$  (auf  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ) stetig.
- (c)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  in  $x_0$  (auf  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ) stetig. (Voraussetzung:  $g(x) \neq 0$ )

- (d)  $|f(x)|$  in  $x_0$  (auf  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ) stetig.  
 (e)  $k \cdot f(x)$  in  $x_0$  (auf  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ) stetig. ( $k \in \mathbb{R}$ )

Bei Beachtung der oben aufgeführten Bemerkungen kommt man zu folgendem Ergebnis:

$y = x^n$  ist in  $(-\infty, \infty)$  stetig. Dann ist  $y = a x^n$  ebenfalls stetig in  $(-\infty, \infty)$ , genau wie  
 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = P_n(x)$  (allgemeine Polynomfunktion) in  $(-\infty, \infty)$  stetig ist.

Die Funktionen  $y = f(x) = P_n(x)$ , sogenannte Polynome, werden oft zur Annäherung forstlich relevanter Abhängigkeiten herangezogen.

## Unstetigkeiten

Die Funktion  $f(x)$  kann aus folgenden Gründen in  $x_0$  unstetig sein:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert nicht.  
 (b) Die Funktion  $f$  ist in  $x_0$  nicht definiert.  
 (c) Es gilt nicht  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , auch wenn beide Seiten definiert sind.

## Stückweise Stetigkeit

Eine besondere Rolle spielen in der Anwendung die sog. *stückweise stetigen Funktionen*. Dies sind Funktionen, die in einem Intervall  $[a, b]$  *nur endlich viele Unstetigkeitsstellen* besitzen. Die bei statistischen Methoden der forstlichen Praxis wichtigen Verteilungsfunktionen sind stückweise stetige Funktionen (Treppenfunktionen).

## Differentiation einer Funktion

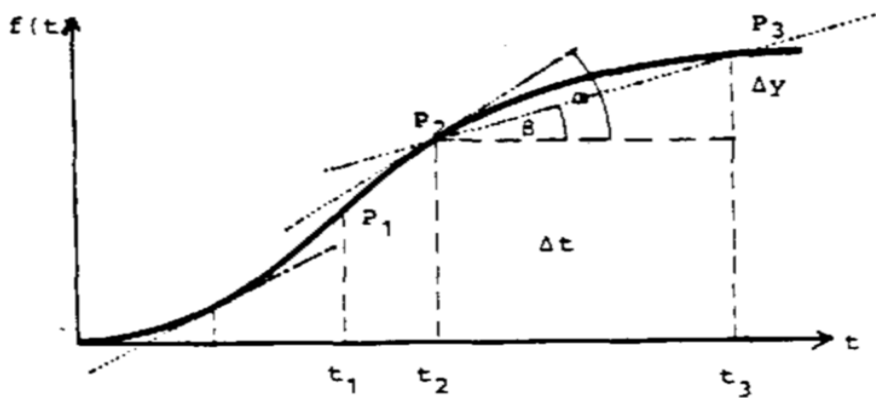
### Forstliche Motivation zur Ableitung

In der Dendrometrie (Waldmesslehre) werden Größen wie Baumhöhe, Baumdicke in einer bestimmten Höhe, sowie Maße des Baumes etc. als *Taxationsgrößen* bezeichnet. Jede Taxationsgröße  $y$ , die sich mit dem Alter (der Zeit) verändert (d.h., der Baum wächst), können wir als eine **Funktion des Alters** auffassen, d.h.  $y = f(t)$ .

Für die Funktion wird vorausgesetzt, dass sie nicht nur stetig über ein Zeitintervall  $(0, \infty)$  ist, sondern dass sie auch *Ableitungen* höherer Ordnung besitzt, deren Bedeutung wir hier im Folgenden andeuten wollen. Der Graph von  $y = f(t)$  ist die sogenannte Wachstumskurve, die bestimmte charakteristische Eigenschaften besitzt:

- (a) Im Anfangsstadium ist sie konvex (sie liegt über den Tangenten; vgl. Abb. 67).  
 (b) In einem bestimmten Alter geht sie in die konkave Form über (der Anstieg lässt nach).  
 (c) Mit dem wachsenden Alter nähert sie sich „asymptotisch“ einer Geraden an, die parallel zur  $x$ -Achse verläuft.  
 (d) Oft wird die äußere Form mit einem angedeuteten „S“ identifiziert, darum wird die Wachstumskurve auch kurz S-Kurve oder „Sigmoid“ (Sigma-ähnlich, nach dem griech. Buchstaben Sigma = S) genannt.

Abbildung 67



Der *durchschnittliche periodische Zuwachs*  $p_2$  für die Zeitspanne  $t_3 - t_2$  ist Quotient des Zuwachses der Taxationsgröße im Intervall  $[t_2, t_3]$ ,  $\Delta y = f(t_3) - f(t_2)$ , und des Zeitzuwachses  $\Delta t = t_3 - t_2$ , d.h.

$$p_2 = \frac{f(t_3) - f(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{f(t_2 + \Delta t) - f(t_2)}{\Delta t} = \operatorname{tg} \beta .$$

Geometrisch ist  $p_2$  der Richtungskoeffizient der Strecke (Sehne)  $\overline{P_2 P_3}$  ;

$$P_2 = (t_2; f(t_2)); \quad P_3 = (t_3; f(t_3)).$$

Der Grenzwert von  $p_2$ , dessen Existenz wir hier voraussetzen und den wir mit  $p_3$  bezeichnen wollen, ist die Ableitung der Funktion  $y = f(t)$  an der Stelle  $t_2$ , d.h.

$$p_3 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_2 + \Delta t) - f(t_2)}{\Delta t} = f'(t_2)$$

Er gibt uns den *momentanen Zuwachs*  $p_3$  der Taxationsgröße  $y$  im Augenblick  $t_2$  an. Die forstliche Praxis benutzt für  $p_3$  die Bezeichnung „laufender Zuwachs“. Unkorrekterweise wird oft für  $p_2$  bei  $\Delta t \leq 10$  Jahre der Name „laufender Zuwachs“ verwendet, da die Zeitspanne bereits als „genügend kurz“ angenommen wird.

**Beispiel 3.12:** Ist  $f(t) = 10^{(2.93555 - \frac{1020,98388}{t^2})}$  eine Wachstumsfunktion, so ist

$$f'(t_0) = 10^{(2.93555 - \frac{1020,98388}{t_0^2})} \cdot \frac{2 \cdot 1020,98388}{t_0^3} \cdot \ln 10 \quad \text{der laufende Zuwachs im Alter } t_0.$$

Die Wachstumsfunktionen sind darüber hinaus Lösungen gewisser Differentialgleichungen

$y' = \Phi(t, y)$ , d.h. es gilt  $f'(t) = \Phi(t, f(t))$ , so dass die Differenzierbarkeit von Funktionen, die eine Verschärfung der Stetigkeit darstellt, behandelt werden muss.

**Definition 3.14:**

(a)  $f(x)$  sei in einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  definiert. Den endlichen Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

nennen wir die Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Bezeichnung:  $f'(x_0)$ .

(b)  $f(x)$  sei in rechter (linker) Umgebung von  $x_0$   $U^+(x_0)$  ( $U^-(x_0)$ ) definiert.

Den endlichen Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ) nennen wir

die Ableitung in  $x_0$  von rechts (von links).

**Bezeichnung:**  $f_+'(x_0)$ ;  $f_-'(x_0)$

(c) Sind die Grenzwerte unendlich, so sprechen wir von unendlichen Ableitungen.

Der Ausdruck  $\Delta x = x - x_0$  heißt Zuwachs des Arguments.

Der Ausdruck  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  heißt Zuwachs der Funktion.

Die Ableitung wird auch wie folgt geschrieben:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy}{dx} \Big|_{y=x_0} \quad (\text{sprich: } dy \text{ nach } dx \text{ an der Stelle } x_0)$$

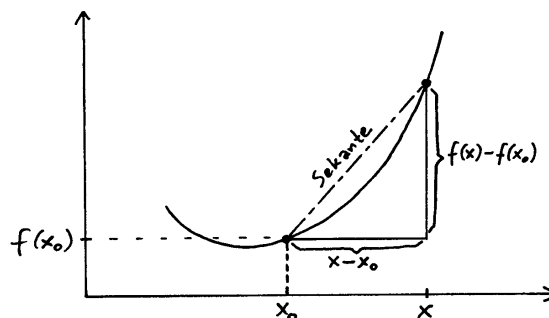
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x_0) = y'(x_0) ;$$

**Bezeichnung:**  $dx, dy$  nennen wir *Differentiale* der Variablen  $x$  bzw.  $y$ .

Geometrische Bedeutung der Ableitung

Die geometrische Bedeutung der Ableitung ist der Richtungskoeffizient der Tangente zur Kurve  $y = f(x)$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ , der ihre *Steigung* angibt.

Abbildung 68



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \quad \rightarrow \quad \text{Steigung der Tangente im Punkt } (x_0, f(x_0)) = f'(x_0)$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

Abbildung 69

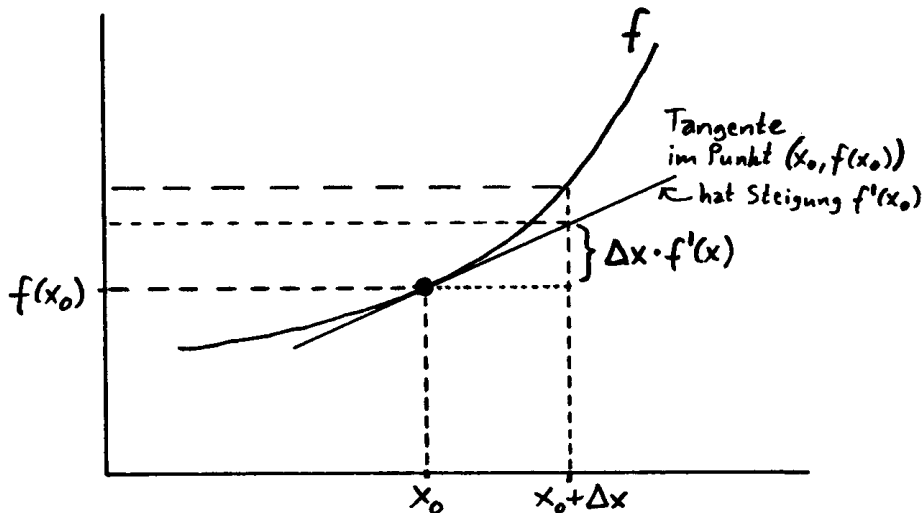
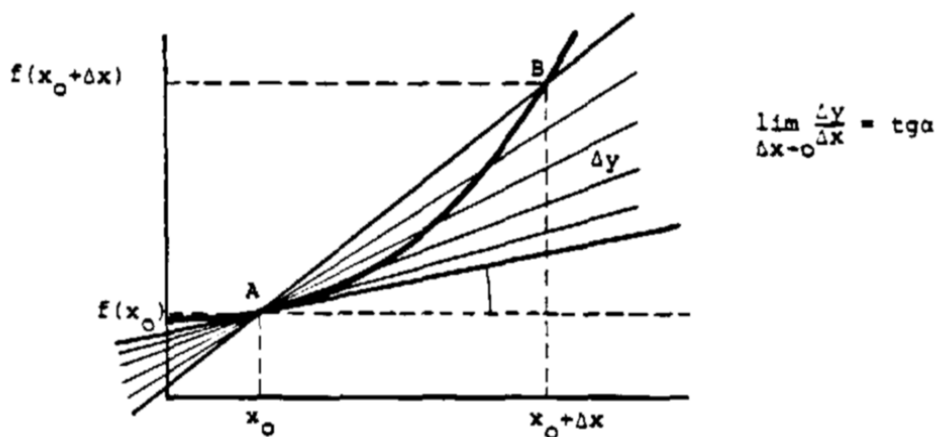


Abbildung 70



**Definition 3.15:** Ist  $f$  in jedem Punkt  $x \in (a, b)$  differenzierbar, so sagen wir, dass  $f$  in  $(a, b)$  differenzierbar ist.

**Bezeichnungen für die Ableitung:**  $f'(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{df(x)}{dx}$ .

Ist  $f$  in  $(a, b)$  differenzierbar und besitzt  $f$  in  $a$  die Ableitung von rechts und in  $b$  von links, so sagen wir,  $f$  ist in  $[a, b]$  differenzierbar.



## Existenz der Ableitung

Die Funktion  $f(x)$  hat in  $x_0$  eine Ableitung, wenn die Ableitungen von rechts und von links existieren und übereinstimmen, d.h. wenn gilt:  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ .

1. Existiert  $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ , so sind die „Halbtangenten“ von links und rechts im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  unterschiedlich (Abb. 71).
2. Gilt für die stetige Funktion  $f$  in  $x_0$ : ( $f'_-(x_0) = +\infty$  und  $f'_+(x_0) = -\infty$ ) oder ( $f'_-(x_0) = -\infty$  und  $f'_+(x_0) = +\infty$ ), so ist  $x_0$  sogenannter Umkehrpunkt, und die „Halbtangente“ in  $x_0$  ist parallel zur  $y$ -Achse (Abb. 72).

Abbildung 71

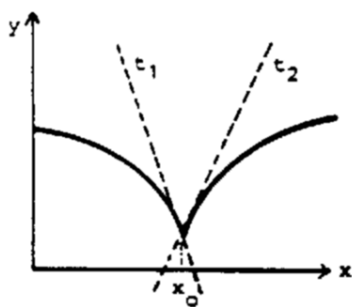


Abbildung 72

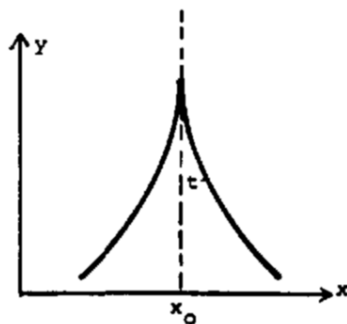
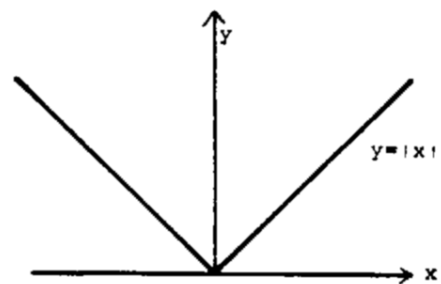


Abbildung 73



Ist die Funktion an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, so ist sie auch in  $x_0$  stetig.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch nicht, z.B. ist  $y = f(x) = |x|$  in  $x = 0$  stetig, aber  $f'_+(0) = 1$ ;  $f'_-(0) = -1$ . Nach dem obigen Satz über die Existenz einer Ableitung folgt damit, dass  $f'(x)$  an der Stelle  $x = 0$  nicht existiert (Abb. 73).

Die Berechnung der Ableitung einer Funktion geschieht im allgemeinen Fall durch die Berechnung des Grenzwertes  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ; in den meisten praktischen Fällen wendet man Differentiationsregeln an, um die Ableitung einer Funktion auf die bekannten Ableitungen von Elementarfunktionen zurückzuführen.

### Beispiel 3.13:

- (1) Gegeben: (a)  $y = x^3 = f(x)$   
 (b)  $y = f(x) = e^x$

Gesucht: Ableitung an der Stelle  $x_0 = 0$ .

Lösung zu (a):

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 \\ &= 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \end{aligned}$$

Mit  $\Delta x = x - x_0$  folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 ; \text{ wenn } x \rightarrow x_0, \text{ dann } \Delta x \rightarrow 0 :$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2 ,$$

für  $x_0 = 0$  ist  $y'(0) = 0$ .

Lösung zu (b):  $\Delta y = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} ; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$$

d. h. für  $x_0 = 0$  ist  $y'(0) = 1$ .

(2) Gegeben:  $f(x), g(x)$ ; beide Funktionen seien in  $(a, b)$  differenzierbar.

Gesucht:  $(f(x) \cdot g(x))'$ ;  $\Delta x = h = x - x_0$ .

Lösung:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

(Hier wurde der Term  $f(x)g(x+h)$  addiert und gleichzeitig subtrahiert, d.h. die Gleichung wurde dadurch nicht verändert.)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\Rightarrow (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Andere Schreibweise:  $(u \cdot v)' = u'v + uv'$  (Produktregel).

Analog zu diesen Beispielen werden die Ableitungen sämtlicher Elementarfunktionen berechnet.

### Rechenregeln für Ableitungen

Gegeben seien  $f(x), g(x), f_i(x) (i = 1, \dots, n)$ ; alle diese Funktionen seien in  $[a, b]$  differenzierbar, und  $k, k_i \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt in  $[a, b]$ :

$$(1) (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \text{ (Summenregel)}$$

$$(2) (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \text{ (Produktregel)}$$

$$(3) (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \quad (\text{„Konstante vorziehen“})$$

$$(4) \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{falls } g(x) \neq 0 \quad (\text{Quotientenregel})$$

Merkregel zum Zähler in der Quotientenregel:

„NAZ – ZAN“ = Nenner · Ableitung des Zählers – Zähler · Ableitung des Nenners.

$$(5) \left( \sum_{i=1}^n k_i f_i(x) \right)' = \sum_{i=1}^n k_i f_i'(x) = k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x) \quad .$$

$$(6) \left( \prod_{i=1}^n f_i \right)' = (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots f_n)'$$

$$= f_1' \cdot f_2 \dots f_n + f_1 \cdot f_2' \dots f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \dots f_{(n-1)}' \cdot f_n + f_1 \cdot f_2 \dots f_{(n-1)} \cdot f_n'$$

(verallgemeinerte Produktregel)

(7) Kettenregel: Unter der Voraussetzung, dass  $f'$ ,  $g'$ ,  $h'$  „entsprechend“ existieren, gilt für die Ableitung der geschachtelten Funktion

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{und}$$

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'_g[g[h(x)]] \cdot g'_h(h(x)) \cdot h'_x(x) \quad ,$$

wobei  $f'_g$  die Ableitung der „Komponente“  $f$  nach der „Komponente“  $g$  als unabhängige Variable ist, etc. (Beim Ableiten einer geschachtelten Funktion bildet man also zunächst die Ableitung der äußeren, dann die der inneren Funktion und multipliziert sie miteinander. Ist die innere Funktion wieder geschachtelt, wie im zweiten Fall, so wiederholt sich die Prozedur. Beim Ableiten der äußeren Funktion betrachtet man das gesamte Innere als abzuleitende Variable.)

(8) Sind  $y = f(x)$  und  $x = g(y)$  gegenseitig invers, so gilt  $f'(x) \cdot g'(y) = 1$ .

$$\text{Somit: } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad .$$

**Beispiel 3.14:** Vorüberlegung:  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  ; wegen Monotonie und Stetigkeit

$$\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0 \quad ; \quad \Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0 \quad ; \quad \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{g'(f(x))} \quad .$$

$$(a) \quad f(x) = y = e^x \quad ; \quad x = \ln y = g(y) \quad (\text{allgemein: } y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x} \quad )$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = y = e^x$$

(b) Gegeben:  $y = \arccos x = f(x)$ ,  $x = \cos y = g(y)$  (bekannt ist:  $(\cos x)' = -\sin x$ ):

$$y' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(9) Ausdrücke vom Typ  $y=(f(x))^{g(x)}$  werden wie folgt differenziert:

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x) \rightarrow y = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = (f(x))^{g(x)}$$

$$y' = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot [g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}]$$

$$= (f(x))^{g(x)} [g'(x) \cdot \ln f(x) + f'(x) \cdot \frac{g(x)}{f(x)}] ; f(x) > 0$$

**Zusammenfassung der wichtigsten Regeln:**

**Differentiationsregeln**

Summenregel:  $(f+g)' = f' + g'$

Produktregel:  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quotientenregel:  $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

**Kettenregel:**  $(f \circ g)'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$

Beisp.:

$$h(x) = \ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}})$$

$$h'(x) = (f \circ g)'(x)$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2 x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

**schneller (ohne Kettenregel):**

$$h(x) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \ln x$$

nach Logarithmenregeln

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

Übersichtstabelle zur Ableitung elementarer Funktionen

	<b>Einfache Form</b>	<b>Geschachtelte Form</b>
1)	$c' = 0$	
2)	$[x^n]' = n x^{n-1}$	$[f(x)^n]' = n [f(x)]^{n-1} f'(x)$
3)	$[e^x]' = e^x$	$[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} f'(x)$
	$[a^x]' = a^x \ln a$	$[a^{f(x)}]' = a^{f(x)} \ln a f'(x); a > 0$
4)	$[\ln x]' = \frac{1}{x} ; x > 0$	$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} ; f(x) > 0$
	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a} ; x > 0$	$[\log_a f(x)]' = \frac{1}{f(x) \ln a} \cdot f'(x); f(x) > 0$

	<b>Einfache Form</b>	<b>Geschachtelte Form</b>
5)	$[\sin x]' = \cos x$	$[\sin f(x)]' = \cos f(x) f'(x)$
	$[\cos x]' = -\sin x$	$[\cos f(x)]' = -\sin f(x) f'(x)$
	$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$[\operatorname{tg} f(x)]' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$
	$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$[\operatorname{cotg} f(x)]' = -\frac{1}{\sin^2 f(x)} \cdot f'(x)$
6)	$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arcsin f(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
	$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arccos f(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
	$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$	$[\operatorname{arctg} f(x)]' = \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$
	$[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$	$[\operatorname{arccotg} f(x)]' = -\frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$
7)	$(u_1 + u_2 + \dots + u_n)' = u_1' + u_2' + \dots + u_n'$	
	$(u v)' = u' v + u v'$	Spezialfall: $[c u(x)]' = c u'(x)$
	$(u_1 u_2 \dots u_n)' = u_1' u_2 \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_n'$	
8)	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$	Spezialfall: $\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \frac{u'(x)}{c}$
9)	$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} \left[ g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$	

### Beispiel 3.15:

$$(a) \quad y = a \cdot e^{\frac{k}{(1-n)x^{n-1}}} \rightarrow \text{Typ: } [e^{f(x)}]$$

$$y' = \frac{a \cdot e^{\frac{k}{(1-n)x^{n-1}}} \cdot k \cdot (-(n-1)x^{-n+1-1})}{(1-n)} = a \cdot e^{\frac{k}{(1-n)x^{n-1}}} \cdot \frac{k}{x^n}$$

$$(b) \quad y = \sin \frac{x}{\cos x + 1} \rightarrow \left[\frac{u}{v}\right]$$

$$y' = \frac{\cos x (\cos x + 1) - \sin x (-\sin x)}{(\cos x + 1)^2} = \frac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x}{(\cos x + 1)^2} = \frac{\cos x + 1}{(\cos x + 1)^2} = \frac{1}{\cos x + 1}$$

$$(c) \quad y = a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a} + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{a^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} + 1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x \cdot 1}{2} \cdot (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{a^2 + a^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(d) \quad y = \frac{x^2}{a + bx + cx^2} + 1,3$$

$$y' = \frac{2x(a + bx + cx^2) - x^2(b + 2cx)}{(a + bx + cx^2)^2} = \frac{2ax + 2bx^2 + 2cx^3 - bx^2 - 2cx^3}{(a + bx + cx^2)^2} = \frac{bx^2 + 2ax}{(a + bx + cx^2)^2}$$

$$(e) \quad y = 2 \sin^3 4x^5 = 2(\sin 4x^5)^3$$

$$y' = 2 \cdot 3(\sin 4x^5)^2 \cdot (\cos 4x^5) \cdot 20x^4 = 120x^4 \sin^2 4x^5 \cos 4x^5$$

### Ableitungen höherer Ordnung

**Definition 3.16:** Existiert der endliche Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0)$ ,

so hat die Funktion  $f$  in  $x_0$  eine *zweite Ableitung*.

**Bezeichnung:**  $f''(x_0) = (f'(x_0))'$ .

Ähnlich werden die Ableitungen von höherer Ordnung  $f'''(x_0)$ ,  $f''''(x_0)$  definiert.

Schreibweise anstelle der Striche:  $f^{(n)}(x)$ .

Es gilt die Rekursionsformel

$$f^{(n)}(x) = [ f^{(n-1)}(x) ]'$$

**Beispiel 3.16:** Berechnen Sie  $y'$  und  $y''$  der Funktion.

$$y = 5x^4 - 2 \sin x - x e^{-x}.$$

Lösung:

$$y' = 4 \cdot 5x^3 - 2 \cos x - (e^{-x} + x e^{-x}(-1)) = 20x^3 - 2 \cos x + x e^{-x} - e^{-x}$$

$$y'' = 60x^2 + 2 \sin x + e^{-x} + x e^{-x}(-1) + e^{-x} = 60x^2 + 2 \sin x + 2e^{-x} - x e^{-x}.$$

## Leibnizsche Formel

Existieren für  $u(x)$ ,  $v(x)$  die Ableitungen  $n$ -ter Ordnung, so gilt für die  $n$ -te Ableitung ihres Produktes:  $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + \binom{n}{n}uv^{(n)}$ .

## Das Differential und seine Anwendung bei der Fehlerrechnung

Es taucht häufig die Situation auf, dass der Funktionszuwachs  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  durch eine lineare Funktion der unabhängigen Variablen  $\Delta x$ ,  $A \cdot \Delta x$  derart ersetzt werden könnte, dass der Annäherungsfehler für „kleine“  $\Delta x$  im Vergleich mit  $\Delta x$  zu vernachlässigen wäre. Diese Möglichkeit der näherungsweise Berechnung führt zum Begriff „Differential“.

## Approximation einer Funktion in der Umgebung eines Punktes $x_0$

Approximation = näherungsweise Berechnung

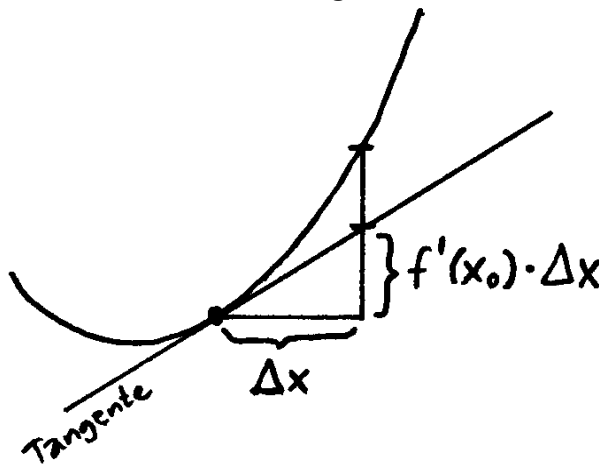
### Erste Näherung:

mit Hilfe der ersten Ableitung

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \text{Tangentensteigung} \cdot \Delta x = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Geometrisch bedeutet dies: Annäherung durch eine Gerade (vgl. Abb. 74).

Abbildung 74



### Bessere Näherungen:

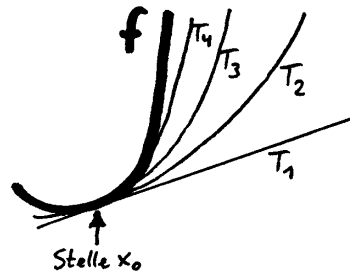
mit Hilfe der 2., 3., ... Ableitung (zusätzlich) und mit höheren Potenzen von  $\Delta x$

→ Taylorscher Satz

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (\Delta x)^3 + \dots + \text{Restglied}$$

Geometrisch: Annäherung durch Gerade, Parabel, kubische Parabel, ... (vgl. Abb. 75).

Abbildung 75



Das Restglied der Taylorschen Näherungsformel kann nicht exakt angegeben werden. Oft kann man es aber von der Größe her einschränken mit Hilfe folgender Formel (nach Lagrange):

$$\text{Restglied} = R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t \cdot (x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \text{ darin ist } t \text{ eine Zahl, von der man nur (aber immerhin!) weiß, dass sie zwischen 0 und 1 liegt: } t \in (0; 1).$$

Wir kommen später auf den Taylorschen Satz zurück. Hier beschränken wir uns zunächst auf die Näherung der Funktion mittels der ersten Ableitung.

**Approximation mittels erster Ableitung (Zusammenfassung):**

### Approximation

(näherungsweise Berechnung)  
einer Funktion in der Umgebung  
eines Punktes  $x_0$

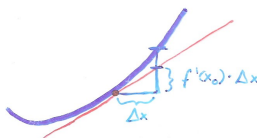
Erste Näherung:  
mit Hilfe der 1. Ableitung

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \overset{\text{Tangenten-}}{\text{steigung}} \cdot \Delta x$$

$$= \dots \cdot \Delta x$$

(vgl. S. 129)

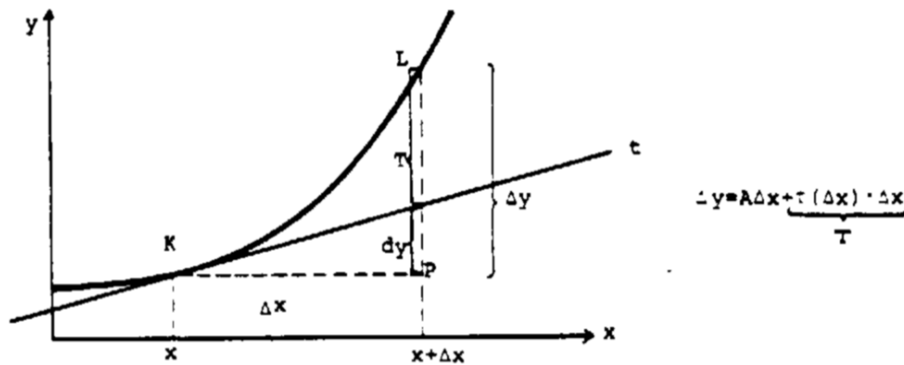
geometrisch bedeutet dies:  
Annäherung durch eine Gerade



**Definition 3.17:**  $f(x)$  sei in der Umgebung von  $x_0$ ,  $U(x_0)$ , definiert. Existiert zu  $f(x)$  in  $x_0$  die Funktion  $A \cdot \Delta x$ , die die Bedingung  $\Delta y = A \cdot \Delta x + \tau(\Delta x) \cdot \Delta x$  mit  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tau(\Delta x) = 0$  erfüllt, so sagt man, die Funktion  $f$  hat in  $x_0$  das Differential  $A \cdot \Delta x$  und schreibt  $dy = A \cdot \Delta x$  oder  $df(x) = A \cdot \Delta x$ .



Abbildung 76



### Beziehung Differential – Ableitung

Die Funktion  $f$  hat in  $x_0$  ein Differential  $\Leftrightarrow f$  hat in  $x_0$  eine Ableitung. Dann gilt  $A = f'(x_0)$ .

Für die Funktion  $y = f(x) = x$  ist  $A = f'(x) = 1$ , d.h.  $dy = f'(x) \cdot \Delta x = \Delta x = dx$ . Das Symbol  $dx$  nennen wir Differential der unabhängigen Variablen. Das Differential  $dy$  der Funktion  $y = f(x)$  im Punkt  $x_0$  schreiben wir in der Form  $dy = f'(x_0) dx$ .

### Geometrische Bedeutung:

$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$  und  $dy \equiv df(x) = f'(x) dx$  sind im gleichen Punkt unterschiedlich. Der Ausdruck  $\Delta y$  drückt den Zuwachs der Funktion aus, während  $dy$  den Zuwachs der Tangente im Punkt  $A$  für den Zuwachs des Argumentes  $\Delta x$  angibt. Für genügend kleine  $dx$  ist  $dy$  die Approximation des Zuwachses  $\Delta y$ , d.h.  $\Delta y \approx dy$ .

Wird in  $x_0$  der Funktionszuwachs durch das Differential ersetzt, so wird in der „kleinen Umgebung“  $U(x_0)$  der Graph der Funktion durch seine Tangente im Punkt  $A$  ersetzt. Eine genauere Annäherung liefert die Taylorsche Formel.

**Beispiel 3.17:** Berechnen Sie näherungsweise  $\sqrt{16,06}$ .

Lösung: Betrachtet wird die Funktion  $y = \sqrt{x}$ ;  $x_0 = 16$ ;  $\Delta x = 0,06$

$$\text{Es ist } f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x ; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} ; f'(16) = \frac{1}{8}$$

$$f(16 + 0,06) \approx f(16) + f'(16) \cdot 0,06 = 4 + 0,0075 = 4,0075$$

**Beispiel 3.18:** Berechnen Sie näherungsweise  $\sin 46^\circ$ .

Man betrachte die Funktion  $y = \sin x$ :

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \quad x_0 = \frac{\pi}{4} ; \Delta x = \frac{\pi}{180}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) &\approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \\ &= 0,7071(1+0,017) = 0,7194 \quad \sin 46^\circ \approx 0,7194 \end{aligned}$$

### **Wichtig:**

Eine wichtige Anwendung des Differentials ist in der Praxis die Abschätzung des Fehlers bei der Berechnung des Funktionswertes, wenn der Argumentwert  $x$  mit dem Fehler  $\Delta x$  behaftet ist. Der Fehler ist durch  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  gegeben.

Der Ausdruck  $|\Delta y| = |dy|$  heißt absoluter Fehler der Berechnung.

Der Ausdruck  $\left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| \frac{dy}{y} \right|$  für  $y \neq 0$  heißt relativer Fehler.

**Beispiel 3.19:** Bestimmung der Relativfehler bei der Kreisflächenbestimmung (Dendrometrie), wenn der Durchmesserfehler  $\Delta x$  bekannt ist.

Bezeichnung:  $y(x) = \pi \frac{x^2}{4}$ . Diese Funktion gibt die Kreisfläche in Abhängigkeit von  $x$  an.

$$\text{Es ist } \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \left| \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{f(x)} \right| = \left| \frac{\frac{\pi}{2} \cdot x \cdot \Delta x}{\frac{\pi \cdot x^2}{4}} \right| = 2 \left| \frac{\Delta x}{x} \right|.$$

Der relative Fehler bei der Kreisflächenbestimmung ist somit zweimal größer als der relative Fehler der Durchmesserbestimmung.

Wichtige Anwendungen des Differentials: Messung des Baumdurchmessers mit der Kluppe; geodätische Messungen, Waldwegebau und überall dort, wo eine mittelbare Messung durch eine Funktion stattfindet.

## **Eigenschaften stetiger Funktionen**

Obwohl hier einige Aussagen intuitiv klar sind, werden wichtige Sätze über die stetigen Funktionen formuliert und grafisch verdeutlicht.

### **Beschränktheit**

$f(x)$  sei im abgeschlossenen Intervall stetig. Dann ist  $f(x)$  in  $[a, b]$  beschränkt. D.h.  $\exists M > 0$ , so dass gilt  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$  (siehe Abb. 77a).

### **Satz von Weierstrass**

Jede stetige Funktion in  $[a, b]$  nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = M; \quad \min_{x \in [a, b]} f(x) = m \quad (\text{siehe Abb. 77b}).$$

Abbildung 77a

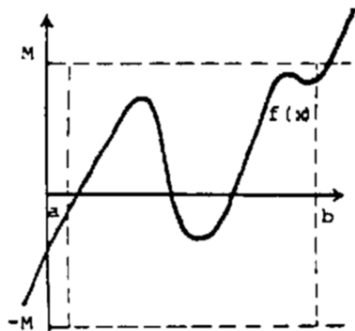


Abbildung 77b

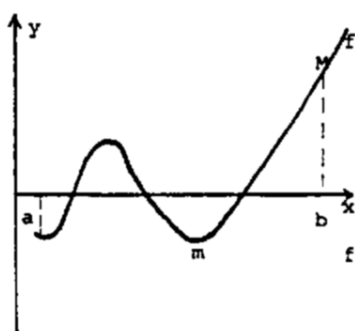
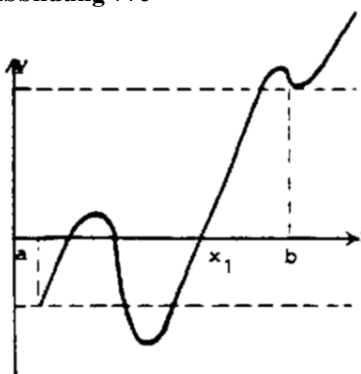


Abbildung 77c



### Zwischenwertsatz

Die Funktion  $f(x)$  sei in  $[a, b]$  stetig. Dann erreicht sie in  $[a, b]$  alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  (siehe Abb. 77c).

### Folgerung:

Gilt zusätzlich  $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$  es existiert mindestens ein  $x_1 \in [a, b]$  mit  $f(x_1) = 0$ .

Geometrische Deutung: Haben die Funktionswerte  $f(a)$  und  $f(b)$  entgegengesetztes Vorzeichen, so wird der Graph von  $f(x)$  in  $[a, b]$  die  $x$ -Achse mindestens einmal schneiden.

### Beispiel 3.20:

Die Folgerung wird zur Lösung von algebraischen Gleichungen herangezogen. Gegeben sei die Gleichung  $x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 2 = 0$ . Wir bezeichnen:  $f(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 2 = 0$ .

$f(x)$  ist in  $(-\infty, \infty)$  stetig. Es ist  $f(2) = -8 < 0$  und  $f(3) = 32 > 0 \Rightarrow$  die Gleichung  $f(x) = 0$  hat in  $[2, 3]$  mindestens eine Nullstelle. Nehmen wir an, dass in diesem Intervall genau eine Nullstelle liegt. Wählen wir z.B.  $x = 2,5$ , und es ist  $f(2,5) > 0 \Rightarrow$  die Nullstelle liegt im Intervall  $[2; 2,5]$ , usw.

Mit der weiteren Teilung des Intervalls erhalten wir den genauen Wert für die Nullstelle (siehe Abb.78).

Abbildung 78

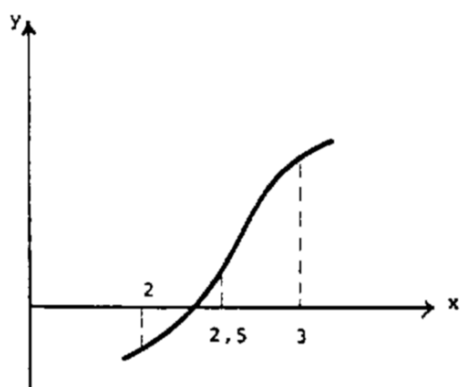
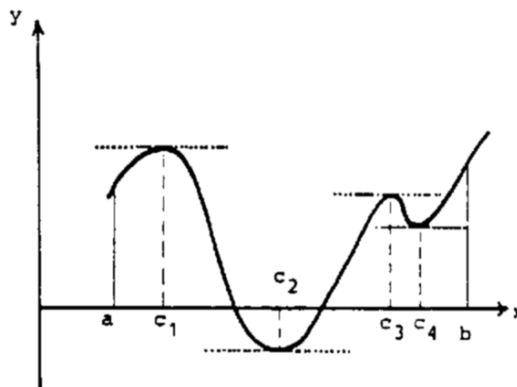


Abbildung 79



## Satz von Rolle

Gegeben sei die in  $[a, b]$  stetige und in  $(a, b)$  differenzierbare Funktion  $f$ .

Es gilt für  $f(x)$ :  $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b)$  mit  $f'(c) = 0$ . (Geometrische Deutung siehe Abb. 79.)

### Folgerung:

Aus dem Satz von Rolle folgt, dass zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion mindestens eine Nullstelle ihrer Ableitung  $f'(x)$  liegt. Diese wird bei der Feststellung der Anzahl der reellen Nullstellen vorteilhaft herangezogen.

**Beispiel 3.21:** Zeigen Sie, dass  $x^3 + 4x - 10 = 0$  genau eine reelle Nullstelle hat.  $f(x)$  ist stetig und differenzierbar in  $(-\infty, \infty)$ .  $3x^2 + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$  mit  $f'(c) = 0$ .

Dann hat  $f$  höchstens eine Nullstelle. Da  $f(x)$  ein Polynom von ungeradem Grad ist ( $n = 3$ )  $\Rightarrow f(x) = 0$  hat *genau* eine Lösung.

## Mittelwertsatz

Gegeben sei eine in  $[a, b]$  stetige und in  $(a, b)$  differenzierbare Funktion ( $\exists f'(x)$  in  $(a, b)$ ).

$\Rightarrow \exists c \in (a, b)$  mit  $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ .

Geometrische Bedeutung: siehe Abb. 80 a, b.

Es gibt im Intervall  $(a, b)$  mindestens ein  $c$ , wo die Tangente an den Funktionsgraphen parallel zur Verbindungsline der Punkte mit den Abszissen  $a$  und  $b$  verläuft.

Abbildung 80 a

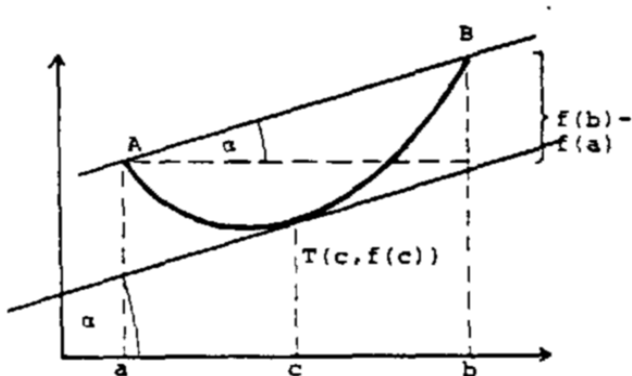
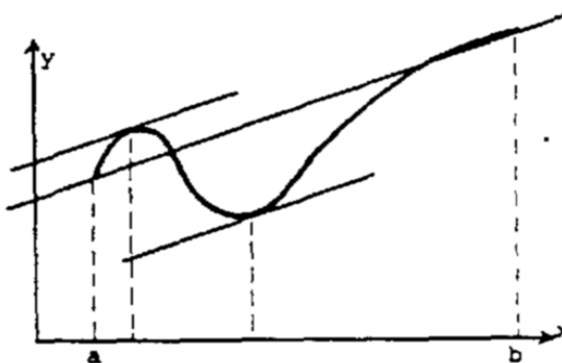


Abbildung 80 b



Der Mittelwertsatz heißt auch Satz über den Zuwachs der Funktion. Der Satz ermöglicht uns, den Zuwachs der Funktion  $f(b) - f(a)$  abzuschätzen, wenn es möglich ist,  $f'(x)$  in  $(a, b)$  zu schätzen.

**Beispiel 3.22:** Schätzen Sie den Zuwachs der Funktion  $f(x) = \arctg x$  in  $[2, 3]$ .

Für  $y' = \frac{1}{1+x^2}$  in  $(2, 3)$  gilt:

$f(3) - f(2) = \frac{1}{1+c^2} \cdot 1$ . Für  $c = 2$  erhält man den größten Wert, den der Zuwachs

in  $[2, 3]$  annehmen kann.

Es ist also  $\frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{5}$  für  $c \in (2, 3)$ .

$$\operatorname{arctg}(3) - \operatorname{arctg}(2) = \frac{1 \cdot 1}{1+c^2} < \frac{1}{5}.$$

### Taylorische Entwicklung einer Funktion

Mit Hilfe des Satzes von Taylor wird die Frage behandelt, wie und inwieweit sich eine Funktion in der Umgebung eines Punktes  $x_0$  mit der einfachsten Art von Funktionen, den Polynomen, approximieren lässt.

### Satz von Taylor

Die Funktion  $f$  sei in einer Umgebung von  $x_0$  mindestens  $n$ -mal differenzierbar. Dann bezeichnet man das Polynom

$$\begin{aligned} T_n(f, x_0, x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \end{aligned}$$

als Taylor-Polynom  $n$ -ter Ordnung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Ist  $f$  beliebig oft differenzierbar, dann wird durch die Folge der Taylor-Polynome die Taylor-Reihe von  $f$  an der Stelle  $x_0$  definiert. In der Regel stellt die Taylor-Reihe die Funktion in einer Umgebung von  $x_0$  dar, so dass die Taylor-Polynome zur Approximation der Funktion in dieser Umgebung von  $x_0$  dienen können. Dabei wird die Approximation umso genauer, je höher der Grad des Taylor-Polynoms ist.

Dann setzt man meistens  $h := x - x_0$  und schreibt  $x$  statt  $x_0$ .

Mit  $T_n(x, h) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x)}{i!} h^i$  gilt also  $f(x+h) \approx T_n(x, h)$ . An der Stelle  $x_0 = 0$  vereinfacht sich

die Formel zu  $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \text{Rest} = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \text{Rest}$ .

**Beispiel 3.23:** (a) lineare Approximation:  $\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h$

(b) quadratische Approximation:  $\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h - \frac{1}{8x\sqrt{x}} \cdot h^2$

(c) Approximation dritter Ordnung:  $\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h - \frac{1}{8x\sqrt{x}} \cdot h^2 + \frac{1}{16x^2\sqrt{x}} h^3$

**Zusammenfassung:**

Bessere Näherungen:  
 mit Hilfe der 2., 3., ... Ableitung  
 (zusätzlich)  
 und mit höheren Potenzen von  $\Delta x$

→ Taylorscher Satz (siehe S. 134)

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} (\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (\Delta x)^3 + \dots + \text{Restglied}$$

geometrisch:  
 Annäherung durch Gerade, Parabel,  
 kub. Parabel...

Das Restglied der Taylor'schen  
 Näherungsformel kann nicht  
 exakt angegeben werden.

Oft kann man es aber von der Größe  
 her einschränken mit Hilfe folgender  
 Formel (nach Lagrange):

$$\text{Restglied} = R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t \cdot (x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

darin ist  $t$  eine Zahl, von der man  
 nur (aber immerhin!) weiß, daß sie  
 zwischen 0 und 1 liegt:

$$t \in (0; 1)$$

Beispiel für Approximation mit dem  
 Taylor'schen Satz:

$f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0)$

Taylor-Polynom 3. Grades:

$$T_3(f, x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0)^3$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}} = -\frac{1}{4 \cdot x \sqrt{x}}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x^2 \sqrt{x}}$$

Somit:

$$T_3(f, x_0, x) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (x-x_0) - \frac{1}{8 \cdot x_0 \sqrt{x_0}} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{1}{16 \cdot x_0^2 \sqrt{x_0}} \cdot (x-x_0)^3$$

z.B. für  $x_0=1$ :  $1 + \frac{1}{2} (x-1) - \frac{1}{8} (x-1)^2 + \frac{1}{16} (x-1)^3$

Taylor-Polynom: (Entwicklung einer Funktion in ein  
 Polynom im Punkt  $x_0$ )

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$   
 $\xi \in (0, 1)$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{T_0(x)} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0)}_{T_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} (x-x_0)^4}_{T_4(x)} + R_5(x)$$

Es gilt:

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$$

$$T_n(x_0) = f(x_0)$$

$$T_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\vdots$$

$$T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

## De l'Hospitalsche Regeln

*Herleitung:*

Bei der Formeldarstellung einer Funktion  $y = f(x)$  kann der Formelausdruck im Grenzübergang eine der folgenden Formen enthalten:  $\frac{0}{0}$  ;  $\frac{\infty}{\infty}$  ;  $\infty - \infty$  ;  $0 \cdot \infty$  ;  $0^0$  ;  $\infty^0$  ;  $1^\infty$  .

Ist z.B.  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  , so kann  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  (wenn der Grenzwert überhaupt existiert)

verschieden ausfallen. Es ist zweckmäßig,  $f$  und  $g$  in  $x_0$  nach Taylor zu entwickeln, um mehr über das Verhalten dieses Ausdrucks in der Umgebung von  $x_0$  zu erfahren.

Es sei  $f^{(i)}(x_0) = 0$  für  $0 \leq i < \mu$  ,

$g^{(i)}(x_0) = 0$  für  $0 \leq i < \gamma$  und

$f^{(\mu)}(x_0) \neq 0$  ,  $g^{(\gamma)}(x_0) \neq 0$

d.h. alle Ableitungen von kleinerer Ordnung als  $\mu$  sind Null und fallen aus dem Taylor-Polynom heraus, und alle Ableitungen von kleinerer Ordnung als  $\gamma$  sind ebenfalls Null und fallen aus dem Taylor-Polynom heraus.

Dann gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}(x-x_0)^\mu + \frac{f^{(\mu+1)}(x_0)}{(\mu+1)!}(x-x_0)^{\mu+1} + \dots}{\frac{g^{(\gamma)}(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma + \frac{g^{(\gamma+1)}(x_0)}{(\gamma+1)!}(x-x_0)^{\gamma+1} + \dots}$$

Nach Ausklammern in Zähler und Nenner folgt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}(x-x_0)^\mu (1 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots)}{\frac{g^{(\gamma)}(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma (1 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots)} = \frac{\frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}(x-x_0)^\mu}{\frac{g^{(\gamma)}(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma} \cdot H(x) .$$

Es ist  $H(x_0) = 1$ , da  $(x - x_0) = 0$ , wenn  $x \rightarrow x_0$  .

Zu unterscheiden sind nun drei Fälle:

$$(1) \quad \mu > \gamma \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$(2) \quad \mu = \gamma \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{g^{(\mu)}(x_0)}$$

$$(3) \quad \mu < \gamma \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

Hieraus folgen die sogenannten **Regeln von de l'Hospital**:

Es sei  $g^{(n)}(x) \neq 0$  in einer Umgebung von  $x_0$  mit möglichen Ausnahmen  $x = x_0$  und

$$f^{(y)}(x_0) = g^{(y)}(x_0) = 0 \quad ; \quad y=0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad . \text{ Wenn dann } \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \text{ einen endlichen}$$

oder unendlichen Grenzwert besitzt, so gilt das gleiche für  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \quad .$$

Einfachster Fall:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad , \text{ wenn } f(x_0)=0 \text{ und } g(x_0)=0 \quad .$$

Anwendung findet die Regel von de l'Hospital also bei der Berechnung von Grenzwerten der Form

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)=0 \text{ bzw. } \infty \quad . \text{ Man hilft sich in diesem Falle, in-}$$

dem man die Ableitungen  $f'(x)$  und  $g'(x)$  bildet und  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  bestimmt. Erhält man immer noch

$\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$ , so leitet man weiter ab, bis man den Grenzwert ausrechnen kann.

**Beispiel 3.24:** (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{1}{e}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$

Hieraus folgt:  $e^x$  wächst für  $x \rightarrow \infty$  schneller als  $x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  .

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = \left\| 0 \cdot (-\infty) \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \left\| 0^0 \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \ln x} = e^L = e^0 = 1$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0 \quad (\text{siehe d}) \quad .$$

Dieser Übergang ist im Falle der Exponentialfunktion erlaubt, da  $y = e^x$  für alle  $x$  stetig ist.



$$\begin{aligned}
 \text{(f) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0 .
 \end{aligned}$$

## Monotonie und Extrema von Funktionen

**Definition 3.18:** Die Funktion  $f$  heißt streng monoton wachsend (fallend) auf der Menge  $D$ , wenn gilt:  $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$  (bzw.  $f(x_1) > f(x_2)$ ). (Gilt lediglich  $f(x_1) \leq f(x_2)$  bzw. ( $f(x_1) \geq f(x_2)$ ) so sagt man,  $f$  sei monoton wachsend oder monoton fallend (ohne „streng“)).

**Definition 3.19:** Die Funktion  $f$  heißt monoton wachsend (fallend) im Punkt  $x_0 \Leftrightarrow \exists U(x_0)$ , so dass in  $U(x_0)$  die Funktion  $f(x)$  monoton wachsend (fallend) ist.

## Monotonie und Ableitung

$f$  sei auf  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gilt

- (1)  $f(x)$  ist auf  $[a, b]$  genau dann konstant, wenn  $\forall x \in (a, b)$  gilt:  $f'(x) = 0$ .
- (2)  $f$  ist auf  $[a, b]$  monoton wachsend (monoton fallend)   
  $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b): f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) .
- (3)  $f(x)$  ist auf  $[a, b]$  streng monoton wachsend (streng monoton fallend)   
  $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b): f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) .

Abbildung 81 a

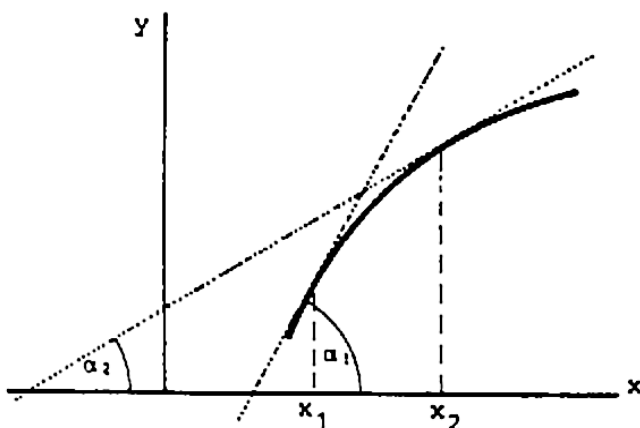


Abbildung 81 b

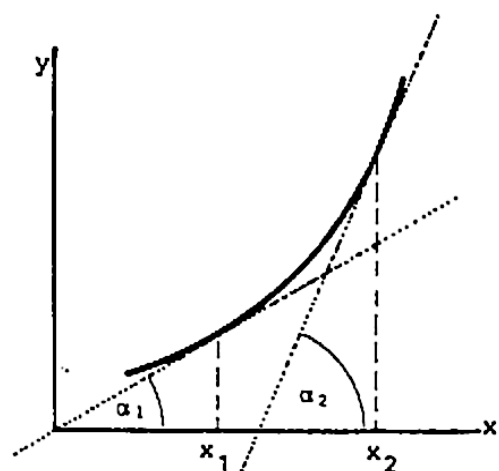


Abbildung 81 c

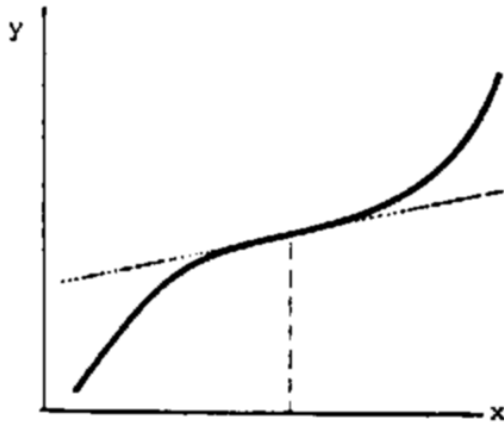


Abbildung 81 d

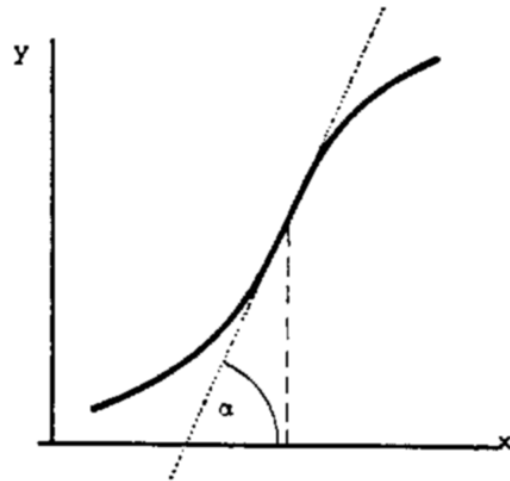


Abbildung 81 ist eine Darstellung der grundlegenden Typen streng monoton wachsender Funktionen. Hier ist  $f'(x) > 0$ , d.h. die Richtungswinkel der Tangenten sind positiv. Eine analoge Situation entsteht bei monoton fallenden Funktionen.

**Beispiel 3.25:**

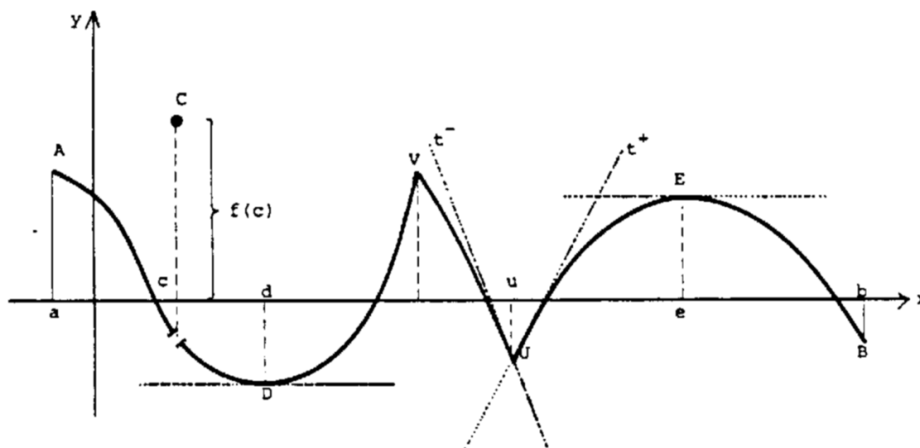
$$f(x) = y = 20e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad y' = 20e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}, \text{ für } x \in (0, k), \quad k > 0 \text{ ist } f'(x) > 0;$$

die Funktion  $f$  ist für positive  $x$  streng monoton wachsend.

Lokale Extrema von Funktionen

**Definition 3.20:** Die Funktion  $y = f(x)$  hat in  $x_0 \in D(f)$  ein lokales Minimum (Maximum) mit dem Wert  $f(x_0)$   $\Leftrightarrow \exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) : f(x) > f(x_0) ; (f(x) < f(x_0))$  . (Die Funktion  $y = f(x)$  in der folgenden Abbildung hat in den Punkten  $C, V, E$  ein lokales Maximum und in  $D, U$  ein lokales Minimum).

Abbildung 82



## Notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums

Hat die Funktion  $f$  im Punkt  $x_0$  ein lokales Extremum, dann existiert entweder  $f'(x_0)$  nicht, oder, wenn die Ableitung existiert, so ist  $f'(x_0) = 0$ .

Die Umkehrung dieses Satzes gilt allerdings nicht: Aus  $f'(x_0) = 0$  folgt nicht zwingend, dass in  $x_0$  ein lokales Extremum vorliegen muss. (Beispiel:  $y = x^3$ ;  $f'(0) = 0$ , aber in  $x_0 = 0$  ist kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt).

## Stationärpunkte

Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, und ist  $f'(x_0) = 0$ , so heißt  $(x_0, f(x_0))$  Stationärpunkt der Funktion  $f$ .  
(In obiger Abbildung sind  $D, E$  Stationärpunkte von  $f$ .)

In den Punkten  $C, U, V$  in Abbildung 82 existiert die Ableitung von  $f(x)$  nicht. Dagegen sind aber, wie bereits erwähnt, die Punkte  $D, E$  Stationärpunkte, in denen  $f'(d) = f'(e) = 0$ .

### **Beispiel 3.26:**

(a) Die Funktion  $f(x) = y = x^2 + 2x + 3$  hat ein Extremum im Stationärpunkt  $x_0 = -1$ , denn  $f'(x_0) = 2x_0 + 2 = 0$ . In  $x_0 = -1$  befindet sich ein lokales Minimum, da  $\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq -1$  gilt:  $x^2 + 2x + 3 > 2$ , d.h.  $(x + 1)^2 > 0$ . Der Graph von  $f$  ist hier die Parabel mit der Gleichung  $y - 2 = (x + 1)^2$  mit dem Gipfel in  $V = (-1, 2)$ .

(b) Die Funktion  $y = A \frac{k}{t^n} e^{\frac{k}{(n-1)t^{n-1}}} = A \frac{k}{t^n} \exp \frac{k}{(n-1)t^{n-1}} = f(t)$ , die sog. Korfsche

Zuwachsfunktion ( $k \neq 0$ ;  $n \geq 1$ ,  $A > 0$ ) hat in  $t_1 = \sqrt[n-1]{\frac{k}{n}}$  einen Stationärpunkt.

Später wird gezeigt, dass hier ein Maximum vorliegt.

(c) Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist im Punkt  $(0, 0)$  nicht differenzierbar. In einer Umgebung  $U(0)$  ist  $f(x) > f(0) \quad \forall x \neq 0$ . D.h.  $y = |x|$  hat in  $x_0 = 0$  ein Minimum.

## Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Extremums

$x_0$  sei Stationärpunkt der Funktion  $f$  oder ein Punkt, in dem die Ableitung nicht existiert. Ist in  $U^-(x_0)$   $f'(x) < 0$  [ $f'(x) > 0$ ] und in  $U^+(x_0)$   $f'(x) > 0$  [ $f'(x) < 0$ ] (die Funktion  $f'$  ändert in  $x_0$  das Vorzeichen), dann hat die Funktion  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum [lokales Maximum].

Geometrische Interpretation in den folgenden Abbildungen:

Abbildung 83 a

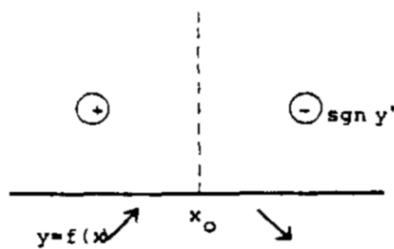


Abbildung 83 b

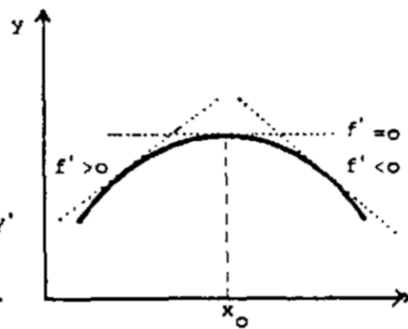
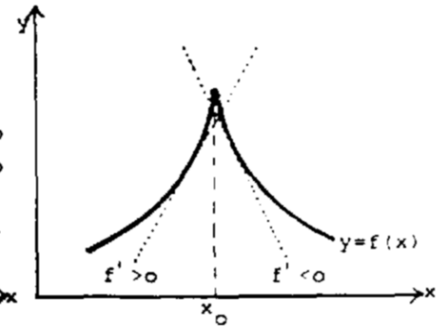


Abbildung 83 c



## Absolutes Extremum einer Funktion

**Definition 3.21:** Unter dem absoluten Minimum (Maximum) der Funktion  $f$  in der Menge  $D \subseteq D(f)$  versteht man den kleinsten (größten) Wert, den die Funktion  $f$  auf  $D$  annimmt.

Ein absolutes Extremum der Funktion  $f(x)$  in  $[a, b]$  tritt auf:

- (1) in den Randpunkten  $a, b$  oder
- (2) in denjenigen inneren Punkten des Intervalls  $[a, b]$ , in denen die Funktion  $f$  lokale Extrema hat.

Ist die Funktion in  $x_0$   $n$ -mal differenzierbar, wird zur Entscheidung über die Art eines Extremums folgender Satz herangezogen, auch wenn einige Ableitungen gleich Null sind:

## Höhere Ableitungen und Extrema

Es sei in  $x_0$ :  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$  ;  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$  ,  $n \geq 1$ .

- Dann gilt:
- (1) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) > 0$  , so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum.
  - (2) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) < 0$  , so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum.
  - (3) Ist  $n$  ungerade und  $f^{(n)}(x_0) > 0$  , so ist  $f$  in  $x_0$  monoton wachsend.
  - (4) Ist  $n$  ungerade und  $f^{(n)}(x_0) < 0$  , so ist  $f$  in  $x_0$  monoton fallend.

**Beispiel 3.27:** Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion  $y = f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - x^2}$  .

1. Schritt: Berechnung von  $f'(x)$ ;  $f''(x)$

$$y' = 2x^{\frac{1}{3}} - 2x \quad ; \quad y'' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 2$$

2. Schritt: Bestimmung der Stationärpunkte

$$y' = 0 \quad ; \quad 2(x^{\frac{1}{3}} - x) = 0 \Rightarrow 1 - x^{\frac{4}{3}} = 0 \quad , \quad x_1 = -1 \quad , \quad x_2 = 1$$

Es existieren also Stationärpunkte in  $S_1 = (-1, 2)$ ;  $S_2 = (1, 2)$ .

3. Schritt: In  $S_1$  und  $S_2$  wird das Vorzeichen von  $f''(x)$  bestimmt.

$$f''(x_1) = f''(-1) = -\frac{8}{3} < 0 \quad ; \quad f''(x_2) = f''(1) = -\frac{8}{3} < 0$$

$\Rightarrow$  in  $S_1$  und  $S_2$  liegen lokale *Maxima* vor.

4. Schritt: Für  $x = 0$  ist  $y'$  nicht definiert, aber es existieren die rechtsseitige und die linksseitige Ableitung in 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right) = -\infty$$

$\Rightarrow f'$  ändert das Vorzeichen von  $-$  nach  $+$

$\Rightarrow$  in  $S = (0, 0)$  liegt ein lokales *Minimum* vor (siehe Abb.85).

Abbildung 85

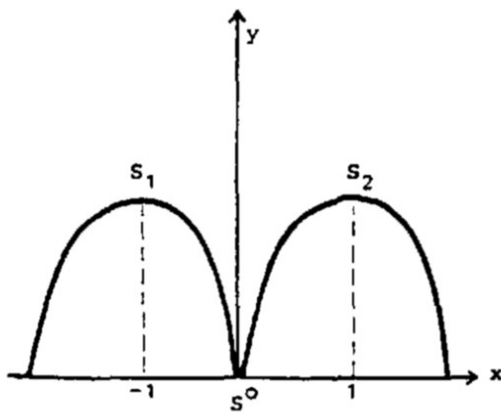
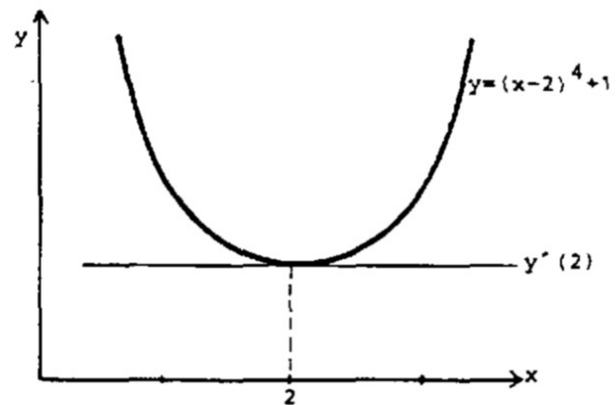


Abbildung 86



**Beispiel 3.28:** Bestimmen Sie die Extrema der Funktion  $y = f(x) = (x - 2)^4 + 1$ .

$$(1) \quad y' = 0, \quad \text{d.h. } 4(x-2)^3 = 0 \Rightarrow x_{1,2,3} = 2$$

$$(2) \quad y'' = 12(x-2)^2 \Rightarrow y''(2) = 0$$

$$y''' = 24(x-2) \Rightarrow y'''(2) = 0$$

$$y^{(4)} = 24 \Rightarrow y^{(4)}(2) = 24 > 0$$

$\Rightarrow f$  hat in  $S(2; 1)$  ein lokales *Minimum* (siehe Abb.86).

**Beispiel 3.29:** (Beispiel einer Optimierungsaufgabe)

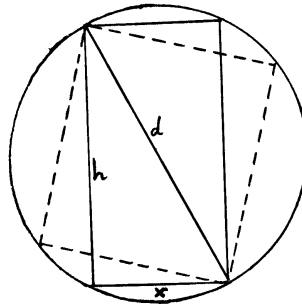
Aus einem Stamm mit dem Zopfdurchmesser  $d$  soll ein Balken herausgeschnitten werden, der die größte Tragfähigkeit hat.

Lösung: Die Tragfähigkeit  $N$  eines rechteckigen Balkens ist proportional dem Produkt  $x \cdot h^2$ , wobei  $x$  die Basis und  $h$  die Höhe des Balkenquerschnittes ist, d. h.

$$N = k \cdot x \cdot h^2, \quad k = \text{const} > 0 \quad (\text{siehe Ingenieurtafel}).$$

Die Aufgabe lautet, anders ausgedrückt: In einen Kreis mit dem Durchmesser  $d$  soll ein Rechteck hineingelegt werden, so dass  $h^2 \cdot x$  maximal wird (siehe Abb. 87).

Abbildung 87



Der Satz des Pythagoras liefert  $x^2 + h^2 = d^2$ , also  $h^2 = d^2 - x^2$ , und für die Tragfähigkeit  $N$  ergibt sich aus  $N = k \cdot x \cdot h^2$  also

$$N(x) = k \cdot x \cdot (d^2 - x^2) = k \cdot (d^2 x - x^3) \quad (\text{als Funktion von } x).$$

$$\text{Somit: } N'(x) = k \cdot (d^2 \cdot 1 - 3 \cdot x^2) = k \cdot (d^2 - 3x^2).$$

Wo liegen die Stationärpunkte („Kandidaten“ für Extremstellen)?

$$N'(x) = 0 \Leftrightarrow k \cdot (d^2 - 3x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = d^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}d^2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Längen sind stets nichtnegativ, also kommt nur  $x_1 = +\frac{d}{\sqrt{3}}$  in Frage.

Hat  $N(x)$  an der Stelle  $x = x_1$  ein lokales Minimum oder Maximum?

Aus der Situation folgt bereits, dass ein lokales Maximum vorliegen muss:

$N(x) = 0$  für  $x = 0$  und für  $x = d$ , für alle Werte dazwischen ist  $N(x) > 0$ , es gibt zwischen 0 und  $d$  keine weiteren Stationärpunkte.

(Formales Vorgehen:

$$N''(x) = k \cdot (-6x) = -6k \cdot x, \quad N''\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = -6 \cdot k \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} < 0, \text{ da}$$

$d > 0$  und  $k > 0$ ; also liegt ein Maximum vor.)

Die Lösung ist also  $x = x_1 = \frac{d}{\sqrt{3}}$ ; dann ist  $h = \sqrt{d^2 - x_1^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d$ .

Wählt man bei gegebenem  $d$  die Basis des rechteckigen Balkens mit  $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$

und  $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ , so wird dieser Balken die größte Tragfähigkeit besitzen.

Es gilt:  $\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 5:7 \approx 7:10$ .

## Konvexität und Konkavität von Funktionen, Wendepunkte

Zur genauen Charakterisierung von Funktionen bzw. ihrer Graphen ist es zweckmäßig, die Begriffe Konvexität, Konkavität und Wendepunkte von Funktionen zu definieren. Diese spielen bei forstlich interessanten Funktionsmodellen wie Wachstumskurven, Baumschaftformen, ökonometrischen Modellen, Modellen in der Waldarbeitslehre, Bodenkunde, Populationsentwicklung etc. oft eine Rolle.

### Konvexe und konkave Funktionen

**Definition 3.22:** Gegeben sei eine in  $x_0$  differenzierbare Funktion  $f$ .

- (a) Die Funktion  $f$  heißt in  $U(x_0)$  konvex (konkav), wenn  $\forall x \in U(x_0)$  der Wert  $f(x)$  über (unter) der Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  liegt. D.h. es gilt:  $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  (bzw.  $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ).
- (b) Die Funktion  $f$  ist konvex (konkav) im Intervall  $I \subseteq D(f)$  genau dann, wenn sie konvex (konkav) in allen Punkten  $x \in I$  ist.

In den folgenden Abbildungen sind die Graphen einer konvexen und einer konkaven Funktion dargestellt. Hieraus geht hervor, dass im konkaven Bereich mit wachsendem  $x$  die Ableitung  $tg \phi = f'(x)$  fällt, dagegen im konvexen wächst.

Abbildung 88 a  
konvexe Funktion

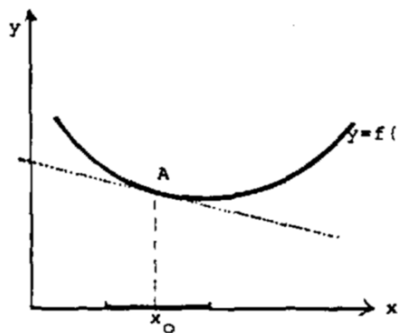


Abbildung 88 b  
konkave Funktion

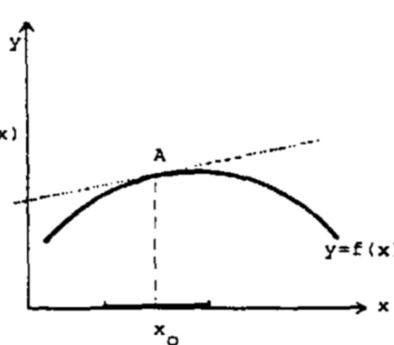
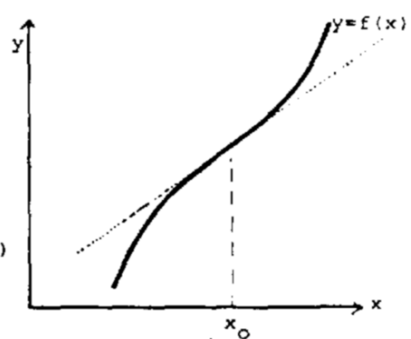


Abbildung 88 c  
Wendepunkt bei  $x_0$



### Hinreichende Bedingung für Konvexität (Konkavität)

Besitzt die Funktion  $f$  in allen Punkten des Intervalls  $[a, b]$  die zweite Ableitung  $f''(x)$ ,  
und gilt  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ )  $\forall x \in [a, b]$ ,  
dann ist die Funktion  $f$  in allen inneren Punkten von  $[a, b]$  konvex (konkav).

### Wendepunkte

**Definition 3.23:**  $f$  sei in  $x_0$  differenzierbar. Geht  $f$  in  $x_0$  von Konvexität in Konkavität (oder umgekehrt) über, so heißt  $x_0$  Wendepunkt von  $f$ . (siehe Abb.87c)

### Notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes

Ist  $x_0$  Wendepunkt von  $f$ , und ist  $f$  in  $x_0$  zweimal differenzierbar, so ist  $f''(x_0) = 0$ .

### Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes

$f$  sei in  $x_0$  zweimal differenzierbar.

Wenn in einer linken Umgebung von  $x_0$ ,  $U^-(x_0)$ , gilt:  $f''(x) < 0$  ( $f''(x) > 0$ )  
und in einer rechten Umgebung  $U^+(x_0)$  gilt:  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ )

(d.h.  $f''(x)$  ändert in  $x_0$  das Vorzeichen),

so hat  $f$  in  $x_0$  einen Wendepunkt mit dem Übergang

Konkavität  $\rightarrow$  Konvexität (Konvexität  $\rightarrow$  Konkavität).

Ist  $f$  im Punkt  $x_0$   $n$  mal differenzierbar,  $n \geq 2$ , so wird man in der Praxis nach folgendem Satz verfahren, auch wenn die ersten  $n-1$  Ableitungen in  $x_0$  gleich Null sind:

Es sei  $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$  und  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ,  $n \geq 2$ .

Dann gelten folgende Aussagen:

- (a) Ist  $n$  ungerade und  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  einen Wendepunkt mit dem Übergang Konkavität  $\rightarrow$  Konvexität.
- (b) Ist  $n$  ungerade und  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  einen Wendepunkt mit dem Übergang Konvexität  $\rightarrow$  Konkavität.
- (c) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , so ist  $f$  in  $x_0$  konvex.
- (d) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , so ist  $f$  in  $x_0$  konkav.

**Beispiel 3.30:** Finden Sie die Wendepunkte der Funktionen

(a)  $y = f_1(x) = \ln(1+x^2)$

(b)  $y = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  (Gaußsche Glockenkurve)

Lösung: (a)  $y' = \frac{2x}{1+x^2}$ ;  $y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ .  $f$  ist in  $(0, \infty)$  zweimal differenzierbar.



$$y'''' = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$$y'=0 \Rightarrow x=0 \quad f''(0) = 2 > 0 \quad \rightarrow \text{ bei } x_0=0 \text{ ist ein Minimum.}$$

$$y''=0 \Rightarrow 1-x^2=0 ; x_1=1 ; x_2=-1$$

$$\text{Es gilt } y''(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1; +\infty)$$

$$y''(x) > 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Nach der hinreichenden Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes und wegen  $y''(x) > 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$  hat die Funktion in  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$  Wendepunkte, da hier  $y''$  das Vorzeichen ändert.

Im Punkt  $x_1 = 1$  erfolgt der Übergang

Konvexität  $\rightarrow$  Konkavität

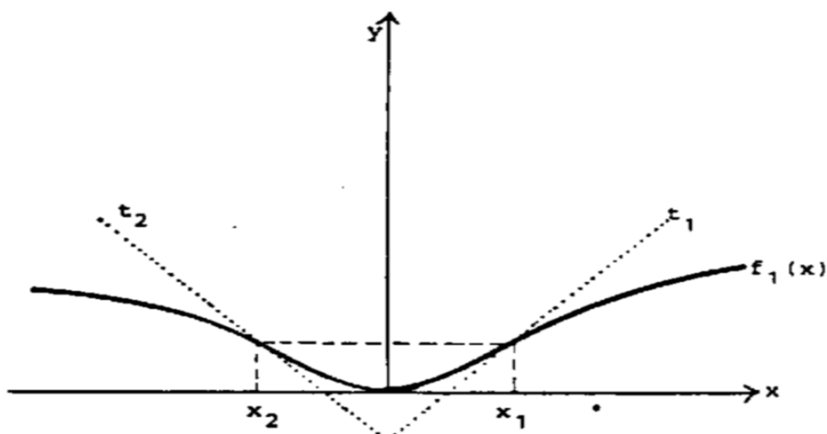
und in  $x_2 = -1$  der Übergang

Konkavität  $\rightarrow$  Konvexität.

Die Tangenten in den Wendepunkten lauten:

$$t_1: y-1 = 1(x-1) ; \quad t_2: y-1 = -1(x+1) \quad (\text{vgl. Abb. 89}).$$

Abbildung 89



Lösung: (b)  $y' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot x$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot (x^2 - 1)$$

$$y''' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot x(x^2 - 3)$$

$$(1) y' = 0 \Rightarrow x = 0; \quad f''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 0 \quad \Rightarrow \text{ in } x = 0 \text{ liegt ein Maximum vor.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y'(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0 ; y(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

$$\Rightarrow \text{in } \pm\infty \text{ liegt jeweils ein Infimum von } y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ vor.}$$

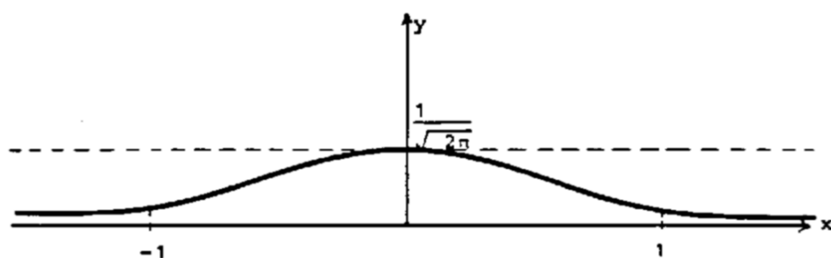
$$(2) y'' = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

$y'''(+1) > 0 \Rightarrow$  in  $x_1$  ist ein Wendepunkt mit Übergang:  
Konkavität  $\rightarrow$  Konvexität.

$y'''(-1) < 0 \Rightarrow$  in  $x_2$  ist ein Wendepunkt mit Übergang:  
Konvexität  $\rightarrow$  Konkavität.

Siehe Abb. 90.

Abbildung 90

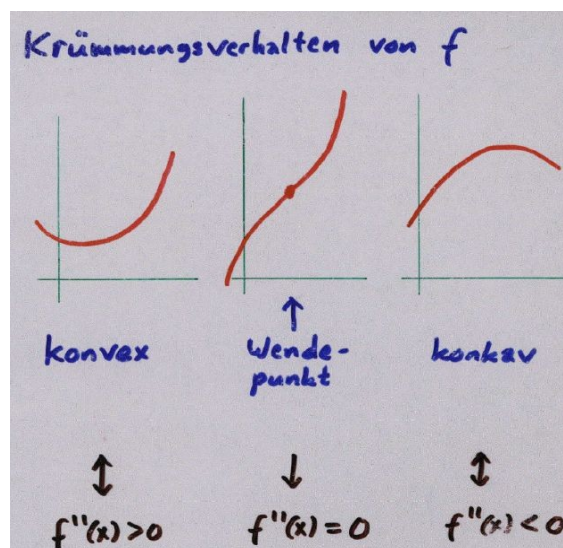
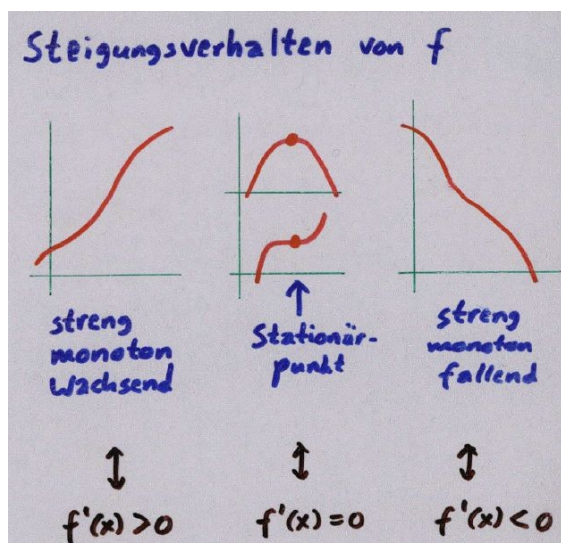


**Beispiel 3.31:** Bestimmen Sie die Wendepunkte von  $y = x^5$ .

Lösung:  $y' = 5x^4 ; y'' = 20x^3 ; y''' = 60x^2 ; y^{(4)} = 120x ; y^{(5)} = 120$

Es ist  $y'(0) = 0 ; y''(0) = 0 ; y'''(0) = 0 ; y^{(4)}(0) = 0 ; y^{(5)} > 0 \Rightarrow (0, 0)$  ist Wendepunkt, in dem die Funktion aus dem konkaven in den konvexen Verlauf übergeht.

### Zusammenfassung



## Asymptoten

Ist man bemüht um ein vollständiges Bild einer Funktion für  $x \rightarrow \pm\infty$  oder in der Umgebung von Unstetigkeitsstellen, so ist die Konstruktion der Asymptoten von Bedeutung.

Gibt es zu einer Funktion  $f$  eine Funktion  $g$  mit  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , so sagt man,  $f(x)$  verhält sich *asymptotisch* wie  $g(x)$ .

### Beispiel 3.32:

$$f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}; \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad \text{dann gilt:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x(1 + \frac{1}{x^2})}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \quad (\text{Abb. 91a}).$$

Abbildung 91 a

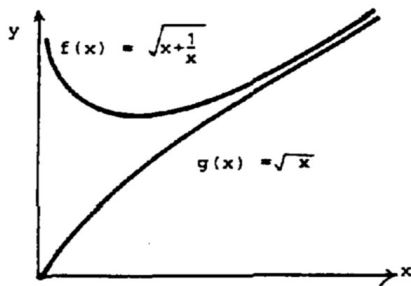
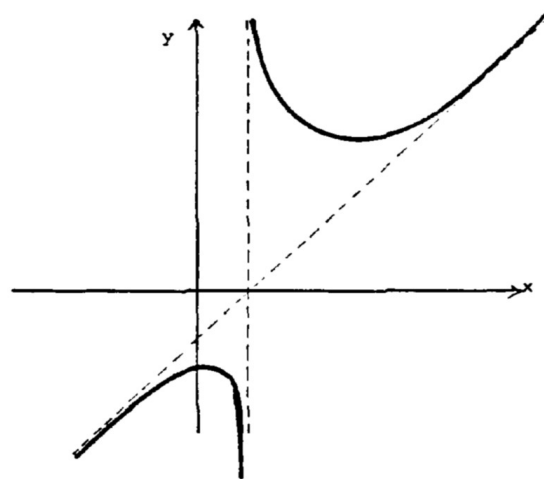


Abbildung 91 b



Spezialfall: Ist  $g$  eine lineare Funktion (Gerade), also  $g(x) = k \cdot x + q$ , so nennt man diese Gerade eine Asymptote des Graphen von  $f$ , wenn zusätzlich gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (k \cdot x + q)) = 0$$

(vgl. Abb. 91b: diagonal verlaufende, gestrichelte Gerade).

Die Gerade  $y = k \cdot x + q$  ist Asymptote zum Graphen von  $y = f(x)$  genau dann, wenn folgende endliche Grenzwerte existieren:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) \quad \text{für } x \rightarrow +\infty \text{ oder } x \rightarrow -\infty.$$

Asymptoten parallel zur  $y$ -Achse bilden einen weiteren Spezialfall:

Die Gerade  $x = x_0$  ist (vertikale) Asymptote zu  $f$ , wenn  $f$  in  $x_0$  einen rechtsseitigen oder linksseitigen unendlichen Grenzwert hat. D.h. es gilt mindestens eine der vier Beziehungen:

$$\begin{aligned} \lim f(x) &= +\infty & \text{für } x &\rightarrow x_0^+ & \text{oder } x &\rightarrow x_0^- \\ \lim f(x) &= -\infty & \text{für } x &\rightarrow x_0^+ & \text{oder } x &\rightarrow x_0^- \end{aligned}$$

Abb. 92 zeigt verschiedene Fälle.

Abbildung 92 a

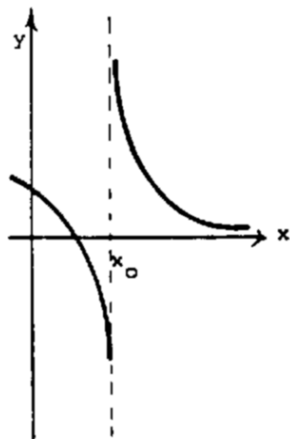


Abbildung 92 b

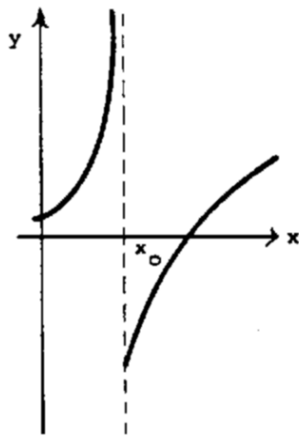


Abbildung 92 c

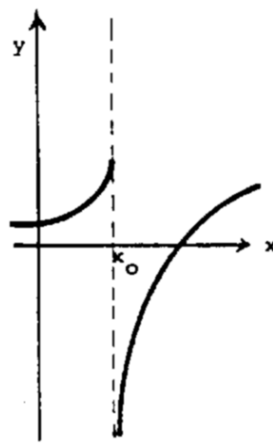
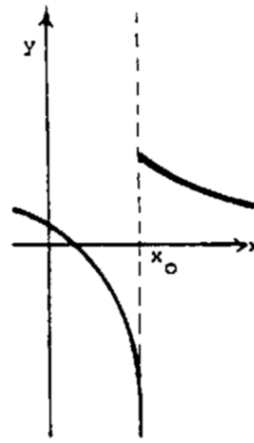


Abbildung 92 d



## Kurvendiskussion

Zusammenfassung der Schritte, die bei der Bestimmung von Kurvenverläufen von  $y = f(x)$  gewöhnlich angewandt werden:

- (1) Bestimmung des Definitionsbereiches  $D(f)$  und des Funktionsbereiches  $B(f)$
- (2) Stetigkeit, gerade oder ungerade Funktion, Periodizität
- (3) Schnittpunkte von  $f(x)$  mit den Koordinatenachsen
  - (a) mit  $f(x) = 0$  die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse (*Nullstellen*)
  - (b) mit  $y = f(x)$  für  $x = 0$  den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse
  - (c) Bestimmung der Intervalle, wo die Funktion positiv bzw. negativ ist
- (4) Verhalten der Funktion in den Unstetigkeitspunkten und in den Randpunkten des Definitionsbereiches
- (5) Asymptoten
- (6) Lokale Extrema der Funktion
- (7) Wendepunkte (und Intervalle der Konvexität und Konkavität)
- (8) Konstruktion des Graphen, gegebenenfalls zusätzliche Punkte für die genauere Darstellung.

Einige dieser Punkte werden gegebenenfalls ausgelassen, wenn sie keinen Sinn haben, z.B. Asymptoten bei Polynomen, etc.

## Beispiel der „Gauß’schen Glockenkurve“:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Schritte zur Kurvendiskussion:

- (1) (a) Definitionsbereich:  $D(f) = \mathbb{R}$   
 (b) Bildbereich:  $g(x) = -\frac{x^2}{2}$  nimmt alle Werte  $\leq 0$  an.  
 $h(x) = e^z > 0 \quad \forall z$   
 $h(-\infty; 0] = (0; 1]$   
 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot h(g(x))$  nimmt die Werte zwischen 0  
 und  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989$  an.

$$\Rightarrow B(f) = (0; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$$

- (2) (a) Stetigkeit:  $f$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.  
 (b) gerade/ ungerade:  $f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = f(x)$   
 $\Rightarrow f$  ist eine gerade Funktion.  
 (c) Periodizität:  $f$  ist nicht periodisch.

(3) Achsenschnittpunkte:

- (a) mit der  $x$ -Achse (Nullstellen):  $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$ , kann nicht existieren, da  
 $e^z > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$  keine Nullstellen

- (b) mit der  $y$ -Achse:  $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989$

- (c) Wo ist  $f$  positiv/negativ?  $e^z > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ ,  $f$  überall positiv.

(4) Verhalten von  $f$  an Unstetigkeitsstellen und am Rand des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^z = 0.$$

$\uparrow$   $f$  gerade  $\uparrow$   $z = -\frac{x^2}{2}$

- (5) Asymptoten: Für  $x \rightarrow \pm\infty$  geht  $f(x)$  gegen 0  
 $\Rightarrow$  die  $x$ -Achse ist an beiden Rändern ( $\pm\infty$ ) des Definitionsbereichs Asymptote.

(6) Lokale Extrema:

Zunächst Ableitungen berechnen.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \left(\frac{-2x}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \quad (\text{Kettenregel!})$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} + x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \left(\frac{-2x}{2}\right)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-e^{\frac{-x^2}{2}} + x^2 \cdot e^{\frac{-x^2}{2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Stationärpunkte:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow x=0.$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{>0}$

$\Rightarrow$  nur bei  $x_0 = 0$  kann eine Extremstelle vorliegen.

$f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $f(x) > 0$  auf ganz  $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$  bei  $x_0 = 0$  kann nur ein Maximum vorliegen.

[ Kontrolle:  $f''(x_0) = f''(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (0^2 - 1) \cdot e^0 = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 0 \quad \checkmark$  ]

Funktionswert bei  $x_0 = 0$ :  $f(x_0) = f(0) \approx 0,3989$ , s.o.

Weil es keine anderen Extrema gibt und weil  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ , ist dieses lokale Maximum sogar ein absolutes Maximum von  $f$ .

(7) Wendepunkte;  $f$  konkav/konvex ?

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\downarrow} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{>0}$

Term  $(x^2 - 1)$  entscheidet das Vorzeichen!

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1 \quad \text{Wendestellen.}$$

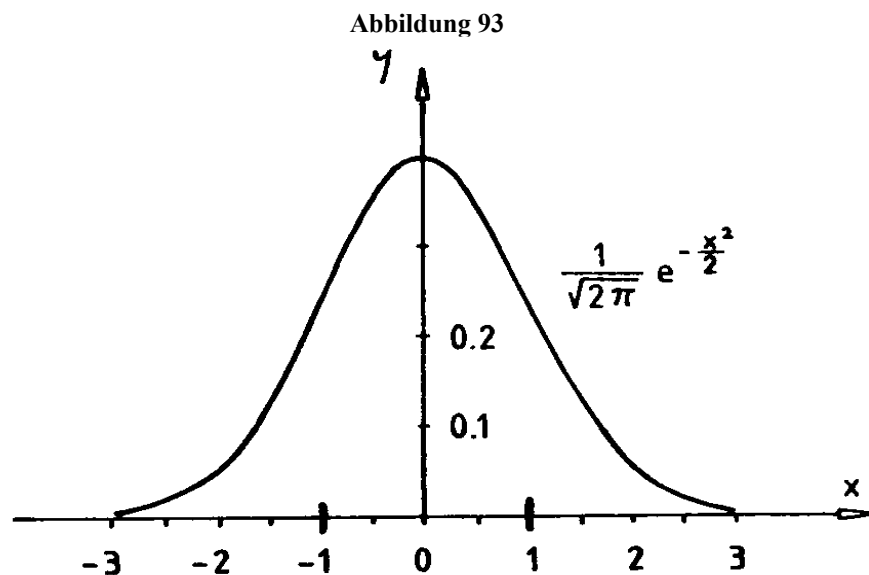
Für  $x < (-1)$  ist  $f''(x) > 0$ , also  $f$  konvex

Für  $x \in (-1; +1)$  ist  $f''(x) < 0$ , also  $f$  konkav

Für  $x > (+1)$  ist  $f''(x) > 0$ , also  $f$  wieder konvex.

Funktionswert an den Wendestellen:  $f(-1) = f(+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,242$ .

(8) Graph von  $f$ : siehe Abb. 93.



**Beispiel 3.33:** Bestimmen Sie den Verlauf der Funktion  $y = \frac{x^2}{x-1}$ .

Lösung:

(1)  $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

(2) Die Funktion ist weder gerade noch ungerade. Sie ist nicht periodisch.

(3) Berührungspunkt mit der  $x$ -Achse ist  $x = 0$ ,  
Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse ist  $y = f(0) = 0$ .

(4) Punkt  $x = 1$  ist Unstetigkeitspunkt.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(x-1)} = \left\| x = 1 + \delta, \delta \rightarrow 0 \right\| = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(1+\delta)^2}{1+\delta-1} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

(5a) Asymptote nicht parallel zur  $y$ -Achse ( $y = k \cdot x + q$ ):

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{2x-1} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

(b) Asymptote parallel zur  $y$ -Achse hat die Gleichung  $x = 1$ , da nach (4) gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

(6) Extrema:  $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ ;  $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

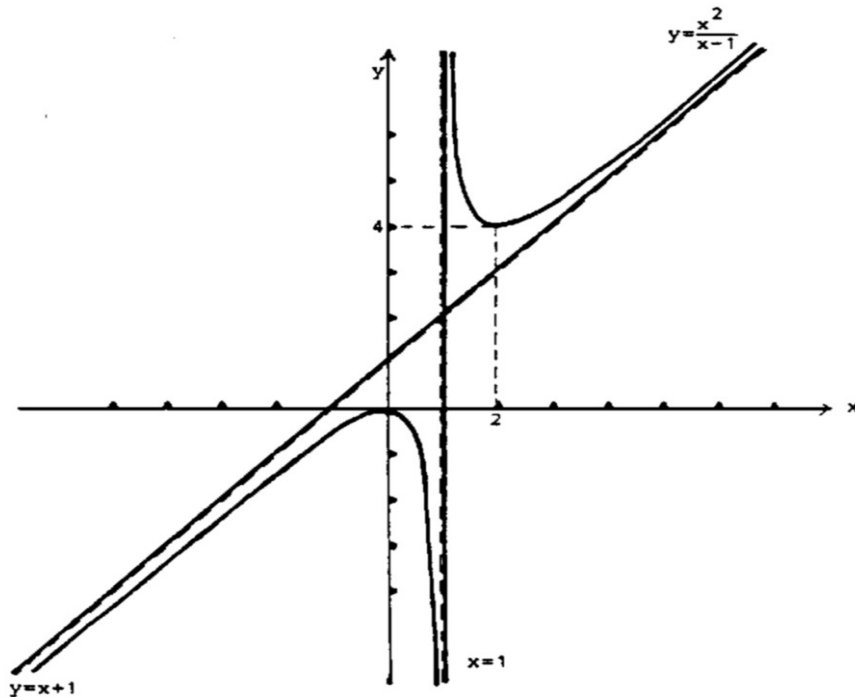
$$y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow S_1 = (0, 0) \text{ ist lokales Maximum,}$$

$$y''(2) = 2 > 0 \Rightarrow S_2 = (2, 4) \text{ ist lokales Minimum.}$$

(7) Aus  $y'' \neq 0$  folgt: es existiert kein Wendepunkt.

(8) Graph: siehe Abb. 94.

Abbildung 94



Das sollte man nach dem Besuch der Vorlesungen und Übungen können:

- Was ist eine Folge?
- Erkennen von innerer und äußerer Komponente bei geschachtelten Funktionen
- Berechnen einer inversen Funktion (Umkehrfunktion)
- Bestimmen des Grenzwertes einer Funktion
- insbesondere Grenzwerte vom Typ „  $\frac{0}{0}$  “ (Regel von de l’Hospital)
- Bachmann-Landau'sche Groß-O-Notation
- Erkennen von Unstetigkeiten
- Anwendung der Rechenregeln für Ableitungen
- Approximation einer Funktion mit Hilfe der ersten Ableitung (Differential) und gegebenenfalls mit Hilfe höherer Ableitungen (Formel von Taylor)
- Extremwertbestimmung bei Funktionen einer Variablen
- Bestimmung von Wendepunkten
- Kurvendiskussion