Mathematische Grundlagen für Forstwissenschaften und Waldökologie

Skript zur Vorlesung

Branislav Sloboda, Winfried Kurth,
Lisa Huppertz, Dominik Cullmann

Universität Göttingen
Abteilung Ökoinformatik, Biometrie und Waldwachstum

WS 2011/12

EINLEITUNG

Aufgrund des Vordringens des Computers in nahezu alle Bereiche der Wirtschaft, der Verwaltung und der Wissenschaften ist die *Mathematik* als Grundlage der Formalisierung und Digitalisierung immer stärker zu einem unentbehrlichen Werkzeug geworden. Doch schon vor dem Siegeszug der elektronischen Datenverarbeitung war die Verwendung mathematischer Modelle ein Grundbaustein für den Erfolg der modernen Naturwissenschaften und der Technik. Dies gilt auch für den Bereich der Forstwissenschaften und Waldökologie.

Gegenstand der Mathematik im weitesten Sinne sind keinesfalls nur Zahlen, sondern abstrakte *Strukturen*. Nach Bourbaki unterscheidet man in der Mathematik drei wesentliche Arten von Grundstrukturen:

1. *Algebraische Strukturen*. Hierunter fasst man unter anderem die gewöhnlichen Rechenoperationen (Addition, Multiplikation, …) für Zahlen und die Regeln, die für diese Rechenoperationen gelten. Jedoch kann man auch mit anderen Objekten „rechnen", z.B. ausschließlich mit den Werten 0 und 1 („binäre Logik", Computer!), wofür dann ebenfalls Rechengesetze gelten, und diese sind z.T. analog zu denen für „gewöhnliche" Zahlen. Solche rechnerischen Strukturen sind Gegenstand der Algebra.
2. *Ordnungsstrukturen*. Damit sind Beziehungen gemeint, die sich als „Anordnungen" interpretieren lassen, wie z.B. „a liegt vor b und b liegt vor c". Auch für solche Ordnungsbeziehungen gibt es Gesetzmäßigkeiten, die typischerweise gelten.
3. *Topologische Strukturen*. Man stelle sich etwa ein Netzwerk von Webseiten mit ihren Verlinkungen untereinander vor. In einem solchen Netzwerk haben Begriffe wie „Umgebung eines Knotenpunktes", „Zusammenhang" und (Teil-) „Komponente" des Netzes einen Sinn. Dies sind „topologische" Begriffe, d.h. von den realen physikalischen Entfernungen der Webseiten (bzw. der Rechner, auf denen sie gespeichert sind) wird abstrahiert. Auch der für die Differential- und Integralrechnung wichtige Begriff der „Konvergenz" (einer Folge) ist im Kern ein topologischer Begriff, weil er auf den Umgebungsbegriff zurückgeführt werden kann.

Beispielen für diese drei Grundstruktur-Typen der Mathematik werden wir im Folgenden immer wieder begegnen.

KAPITEL 1: MENGENLEHRE

Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein Satz, der wahr oder falsch sein kann.
Bsp: „ 5 ist eine gerade Zahl" (Wahrheitswert „f").

Gebräuchliche Abkürzungen:

$a \wedge b$	„ a und b" (englisch „AND")
$a \vee b$	„a oder b" (lateinisch „vel")
$\neg a$	„nicht a"
$a \Rightarrow b$	„a impliziert b", „wenn a, dann auch b", „a ist hinreichend für b"
$a \Leftrightarrow b$	„a genau dann, wenn b" (Äquivalenz)
$\forall x$	„für alle x"
$\exists x$	„es existiert ein x"
$\exists_1 x$	„es existiert genau ein x"
:=	„ ist definitionsgemäß gleich"

Mengen

Definition 1.1: Eine ***Menge*** ist eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Objekten, die ***Elemente*** der Menge genannt werden. In welcher Reihenfolge die Elemente genannt werden, ist unerheblich.
Eine Menge kann ***endlich*** oder ***unendlich*** viele Elemente enthalten. Sie heißt dann endliche oder unendliche Menge.

Beispiel 1.1:

Die Zahl 7 ist Element der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, weil sie die Bedingung erfüllt, eine ganze positive Zahl zu sein.
Die ***Menge der natürlichen Zahlen*** ist eine ***Zahlenmenge****,* die hier die Funktion der sogenannten ***Grundmenge*** übernimmt.

Beispiel 1.2:

Die Elemente der Menge der Laubbäume im Bestand erfüllen die Eigenschaft, Bäume zu sein. In diesem Fall ist die Menge der Bäume die Grundmenge.
Dieses Beispiel beschreibt eine bestimmte Situation aus einem Anwendungsgebiet.

Schreibweisen & Symbole

- Mengen werden mit Großbuchstaben, ihre Elemente mit kleinen Buchstaben bezeichnet:
  $a \in M$ bedeutet: a ist Element der Menge M,
  $a \notin M$ bedeutet: a ist nicht Element von M.
- Mengen können entweder durch Aufzählung der Elemente in geschweiften Klammern oder durch Aussage über die verlangte Eigenschaft in den geschweiften Klammern dargestellt werden.

  a) $A := \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
  b) $A := \{ x \mid x$ ist eine natürliche Zahl und kleiner als 6 $\}$

  (In Worten: A ist die Menge aller x, für die gilt: x ist eine natürliche Zahl und kleiner als 6.)
  $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen. Wir können auch schreiben: $A := \{ x \in \mathbb{N} \mid x < 6 \}$.
  (In Worten: die Menge aller x aus der Menge der natürlichen Zahlen, für die gilt: x ist kleiner als 6*.)*
  Die Menge A wird also aus solchen Elementen der Grundmenge $\mathbb{N}$ gebildet, die die Aussage $x < 6$ erfüllen.

- Für die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M schreiben wir $|M|$.
  Im Beispiel von oben: $|A| = 5$.

Beispiel 1.3:

Aussage A: „$\exists\ n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 = 2^n$“. *(In Worten: Es gibt mindestens ein Element n der Grundmenge* $\mathbb{N}$*, für das gilt:* $n^2 = 2^n$*.)*
Die Aussage ist richtig, da die Bedingung durch $n = 2$ erfüllt wird.

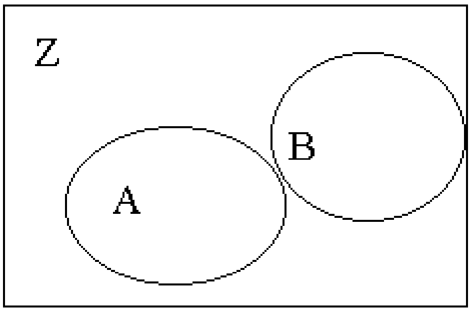
¬A: „$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 \neq 2^n$“. *(In Worten: Für alle Elemente n der Grundmenge* $\mathbb{N}$ *gilt:* n^2 *ist nicht gleich* 2^n*.)*

Operationen mit Mengen

Darstellungsweise

Zum besseren Verständnis ist eine grafische Darstellung vorteilhaft. Deswegen wird das sogenannte ***Venn-Diagramm*** benutzt:

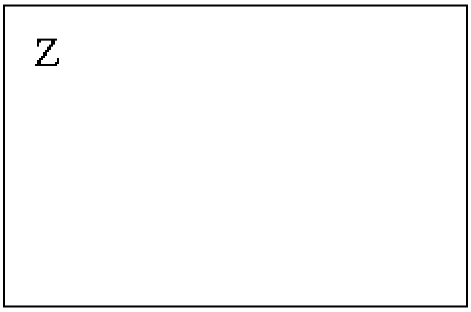
Abbildung 1



- Die Grundmenge, hier Z, wird jeweils als Rechteck dargestellt.
- Die Teilmengen werden durch das Innere geschlossener Kurven innerhalb dieses Rechtecks verdeutlicht.

Die leere Menge

Abbildung 2



Definition 1.2: Die leere Menge ist diejenige Menge, die ***keine Elemente enthält***. Es existiert also kein x aus der Grundmenge, für das die Aussage, die die Menge bestimmt, Gültigkeit hat.

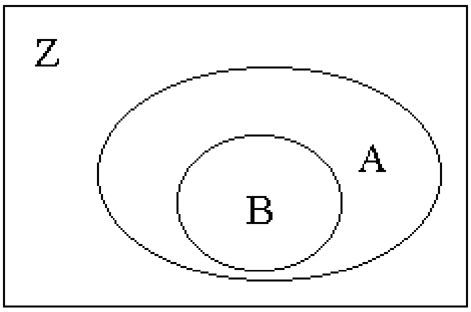
Symbol: $\emptyset$

Teilmengen

Definition 1.3 Die Menge B ist genau dann Teilmenge von A, wenn jedes ihrer Elemente gleichzeitig der Menge A angehört.

Symbol: $B \subseteq A$. *(Das bedeutet ausgehend von der Grundmenge Z:* $\forall x \in Z$ *gilt:* $x \in B \Rightarrow x \in A$. *)*

Abbildung 3



Nach der Definition gilt: $A \subseteq A$, sowie $\emptyset \subseteq A$. Die Menge selbst und die leere Menge sind sogenannte ***unechte Teilmengen*** von A. Alle übrigen Teilmengen heißen ***echte Teilmengen*** von A.

Beispiel 1.4: $A := \{ n \in \mathbb{N} \mid n$ ist eine gerade Zahl und $n \leq 6\}$
$B := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$

Es ist $A \subseteq B$.

Beispiel 1.5: $A := \{ x \mid x$ ist ein Baum des Bestandes mit dem Alter 40 bis 50 Jahre $\}$
$B := \{ x \mid x$ ist ein ***Laub***baum des Bestandes mit dem Alter 40 bis 50 Jahre.$\}$

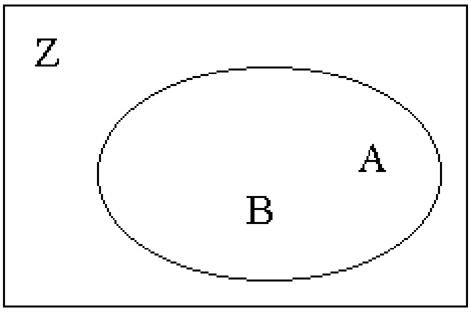
Es ist $B \subseteq A$.

Gleichheit zweier Mengen

Definition 1.4: Die Menge A ist genau dann gleich der Menge B, wenn A Teilmenge von B und gleichzeitig B Teilmenge von A ist.

Symbol: $A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$

Abbildung 4



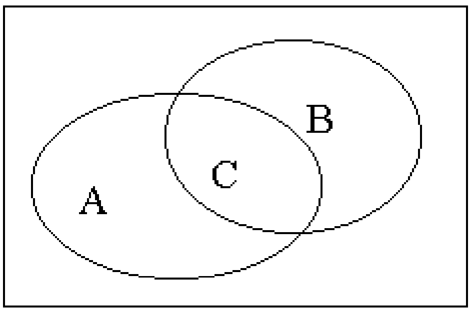
- Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.
- Sind die Mengen A und B ungleich, so schreiben wir $A \neq B$.

Beispiel 1.6: $A := \{ -1, 2 \}$
$B := \{ x \mid x$ ist eine reelle Zahl mit $x^2 - x - 2 = 0\}$

Es gilt $A = B$.

Die Schnittmenge

Abbildung 5



Definition 1.5: Der Schnitt zweier Mengen A und B ist die Menge C aller Elemente, die ***sowohl zu A als auch zu B gehören.***

Symbol: $C = A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \wedge x \in B\}$ *(in Worten: die Menge aller x aus der Grundmenge M, für die gilt: x ist Element von A* ***und*** *Element von B.)*

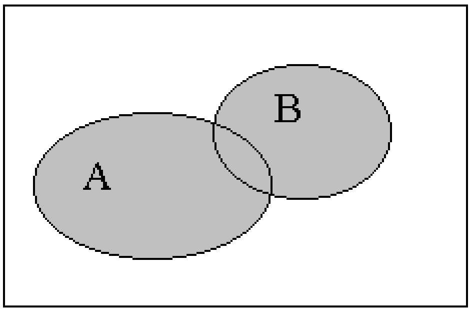
Beispiel 1.7: $A := \{-1, 2, 3, 4, 5\}$
$B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$

Es gilt: $A \cap B = \{-1, 2\}$.

Wenn *A* und *B* sich *nicht* schneiden, wenn also gilt: $A \cap B = \emptyset$, so heißen sie *disjunkt.*
(siehe Abbildung 1)

Die Vereinigungsmenge

Abbildung 6



Definition 1.6: Die Vereinigungsmenge von A und B ist die Menge C, die alle Elemente beinhaltet, die ***der Menge A, der Menge B oder beiden Mengen angehören.***

Symbol: $C = A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \vee x \in B\}$
(in Worten: A vereinigt mit B ist die Menge aller x aus der Grundmenge M, für die gilt: x ist Element von A ***oder*** *von B, d.h. x ist Element mindestens einer der beiden Mengen.)*

Beispiel 1.8: $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$A \cup B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

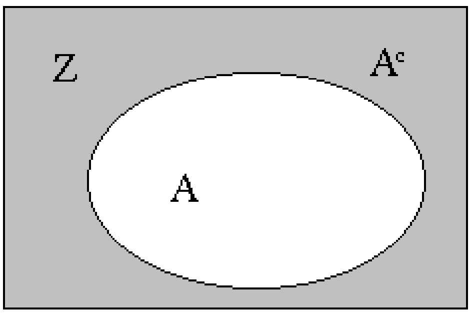
Elementanzahl der Vereinigungsmenge:
Falls A und B disjunkt sind, gilt: $|A \cup B| = |A| + |B|$.
Allgemein gilt: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Das Komplement einer Menge in der Grundmenge

Definition 1.7: Das Komplement der Menge A in der Grundmenge Z ist die Menge der Elemente aus Z, die nicht zu A gehören.

Symbol: $A^c := \{x \in Z \mid x \notin A\}$.

Abbildung 7



Beispiel 1.9:

$Z := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A := \{2, 4, 6, 8\}$
$A^c := \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Wichtige Beziehungen:

$A \cup A^c = Z$	$Z^c = \emptyset$	$A \cap A^c = \emptyset$
$A \subseteq (A \cup B)$	$B \subseteq (A \cup B)$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Die Potenzmenge

Definition 1.8:

Die Menge, die alle Teilmengen einer Menge M enthält, heißt ***Potenzmenge*** der Menge M.

Symbol: $\wp(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$

Bedeutung hat die Potenzmenge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Beispiel 1.10: $M = \{1, 2, 3\}$

$$\wp(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Wichtig: Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge M hat $\mathbf{2^n}$ Elemente (bei diesem Beispiel also $2^3 = 8$ Elemente).

Beweis: Aus der Kombinatorik weiß man, dass sich aus einer n-elementigen Menge $\binom{n}{k}$

(gelesen: „n über k“) Teilmengen mit k Elementen bilden lassen.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ heißt Binomialkoeffizient (Anzahl der k-elementigen Teilmengen).

$n!$ *(gelesen: „n Fakultät“)* = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

$0! = 1$ *(nach Definition)*

Beispiel 1.11: Wieviele 2-elementige Teilmengen können aus einer 3-elementigen Menge gebildet werden?

$n = 3$ *(Die Gesamtmenge hat 3 Elemente)*
$k = 2$ *(Anzahl der Elemente jeder Teilmenge)*

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

Für die Anzahl ***aller*** Teilmengen ergibt sich: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Die allgemeine binomische Formel lautet: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Damit hinter dem Summenzeichen ***nur noch der Binomialkoeffizient*** steht, was für die Berechnung der Anzahl ***aller*** Teilmengen erfüllt sein muss (s.o.), muss gelten: $a = b = 1$, also: $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge hat also 2^n Elemente, was zu beweisen war.

Kartesisches Produkt von Mengen

Definition 1.9: Die ***Menge der geordneten Wertepaare***, bei denen das erste Element der Menge M, das zweite der Menge N angehört, heißt kartesisches Produkt der Mengen M und N.

Symbol: $M \times N := \{(a, b) \mid a \in M \text{ und } b \in N\}$ *(In Worten: Das kartesische Produkt von M und N ist die Menge aller geordneten Wertepaare (a, b), für die gilt: a ist Element von M , und b ist Element von N.)*

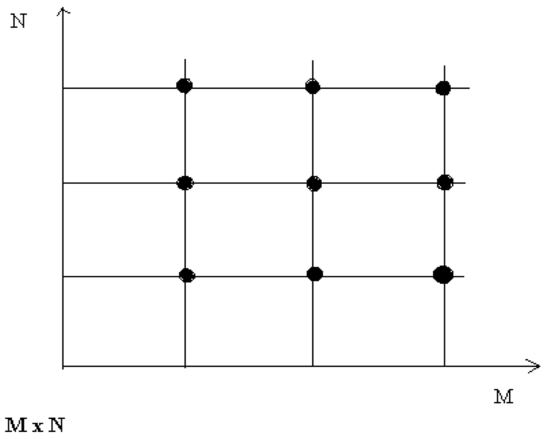
Ein geordnetes Wertepaar ist ein Paar, bei dem die Reihenfolge der Elemente festliegt.
D.h. $(a, b) \neq (b, a)$. Wenn $(a, b) = (b, a)$, dann gilt $a = b$.
Elementeanzahl von $M \times N$: $|M \times N| = |M| \cdot |N|$.

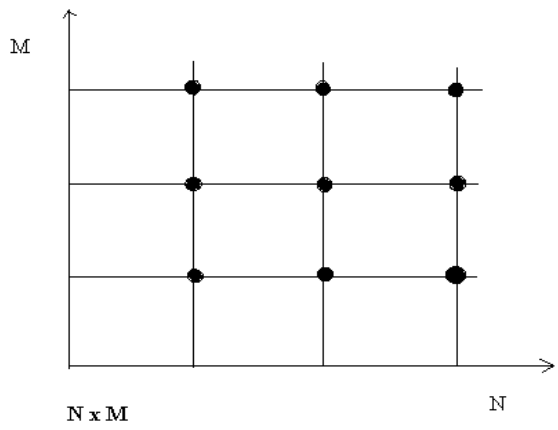
Beispiel 1.12: $M := \{a, b, c\}$
$N := \{1, 2, 3\}$

$M \times N := \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), \ldots\ldots, (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$
$N \times M := \{(1, a), (2, a), \ldots\ldots (2, c), (3, c)\}$

Im Allgemeinen gilt $M \times N \neq N \times M$!

Abbildung 8

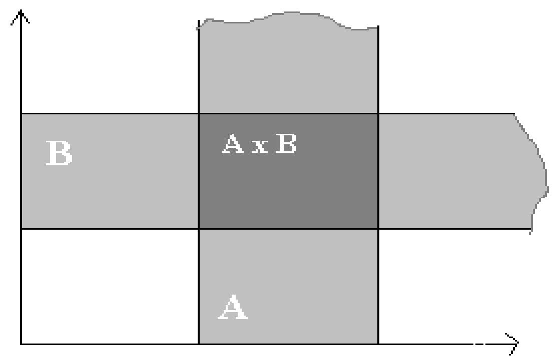




Das kartesische Koordinatensystem ist die grafische Darstellung des kartesischen Produktes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen). Auf der Abszisse (x-Achse) und der Ordinate (y-Achse) ist jeweils die Menge $\mathbb{R}$ aufgetragen. x_0 ist Element der auf der x-Achse aufgetragenen Menge, y_0 Element der auf der y-Achse aufgetragenen Menge.

<u>**Beispiel 1.13:**</u> Gegeben sind: $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$
Es gilt: $A \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Deshalb schreiben wir symbolisch: $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in A \wedge y \in B\}$
(In Worten: Die Menge aller geordneten Wertepaare (x, y) aus der Grundmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, für die gilt: x ist Element von A und y Element von B.)*

Abbildung 9



Jede Menge sei ***durch den Wahrheitsbereich einer Aussage*** bestimmt.
Im Beispielfall: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid V(x)\}$ *(Die Menge aller x aus* $\mathbb{R}$*, für die die Aussage V(x) wahr ist.)*
$B = \{y \in \mathbb{R} \mid W(y)\}$
Eine Aussage $V(x)$ könnte z.B. lauten: „x ist eine ganze Zahl.“. Die Menge A wäre dann die Menge der ganzen Zahlen.
$A \times B$ ist die Menge aller geordneten Wertepaare (x, y), für die sowohl die Aussage für x als auch die für y gilt.

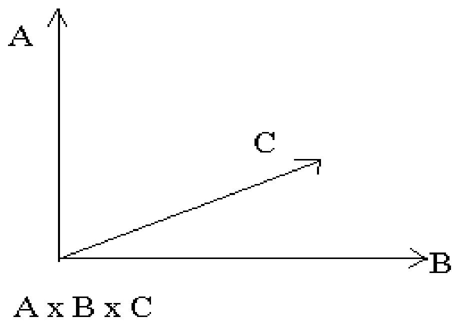
Wenn also beide Aussagen gleichzeitig wahr sind, stimmt die Gesamtaussage $V(x) \wedge W(y)$.

$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid V(x) \wedge W(y)\}$.

Erweiterung des kartesischen Produkts auf eine beliebige Anzahl von Mengen

Die Definition 1.9 für das kartesische Produkt lässt sich auf eine beliebige Anzahl von Mengen erweitern. Bei drei Mengen würde man je eine Menge auf einer Achse des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems auftragen *(s. Abb. 10).*

Abbildung 10



Ab einer Anzahl von 4 Mengen ist die räumliche Vorstellung nicht mehr möglich. In der Theorie kann jedoch trotzdem das kartesische Produkt von *n* Mengen gebildet werden:
$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n\}$
Sind die Mengen A_1, A_2, … A_n identisch, so kann man schreiben:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i = A^n$$

(In Worten: Das kartesische Produkt aller A_i mit i von 1 bis n ***bei Gleichheit der A_i*** *heißt A^n.)*

(vergleiche mit dem Summenzeichen: $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, *in Worten: Summe über alle x_i von $i = 1$ bis $i = n$.*)

$A^n := A \times A \times A \times \ldots \times A$ (*n* Faktoren) Menge aller <u>*n*-Tupel</u> mit Elementen aus *A*.

z.B. $B = \{x, y\} \Rightarrow B^3 = \{(x,x,x),(x,x,y),(x,y,x),(x,y,y),(y,x,x),(y,x,y),(y,y,x),(y,y,y)\}$
3-Tupel (Tripel)

$A^* :=$ $A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$ Menge aller <u>Strings</u> (Wörter) mit Elementen aus *A*, einschließlich des leeren Wortes ε.

z.B. $B^* = \{\varepsilon, x, y, xx, xy, yx, yy, xxx, xxy, \ldots\}$

$A^+ :=$ $A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$ Menge aller Strings mit Elementen aus *A* ohne das leere Wort.

Exkurs:

<u>Schreibweise bei Wiederholung einer Operation</u>

Summe $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ z.B. $\sum_{k=3}^{5} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 9 + 16 + 25 = 50$

$\sum_{i=1}^{4} i*(i+1) = 1*2 + 2*3 + 3*4 + 4*5 = 2 + 6 + 12 + 20 = 40$

Produkt $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 * x_2 * \ldots * x_n$

Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, analog Schnitt

kartesisches Produkt $\bigtimes_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, somit:

$$A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$$

Relation / Binäre Relation

Definition 1.10: Jede ***Teilmenge eines kartesischen Produkts*** $M \times N$ ist eine ***Relation*** zwischen den Mengen *M* und *N*. Ist *M* = *N*, so spricht man von einer ***Relation in N.***
Wird das kartesische Produkt von genau zwei Mengen gebildet, so spricht man von einer ***binären Relation.*** Die geordneten Wertepaare einer binären Relation heißen ***Dupel.*** Bei einer *n*-stelligen Relation spricht man vom ***n-Tupel***.

Die künftig angewandten Begriffe wie „Abbildung zwischen Mengen" oder „Funktion" sind spezielle Formen der binären Relation. Beispiel: Ehegatte – Ehefrau, Angestellte – Position...

Beispiel 1.14: $A = \{a, b, c\}$ $B = \{\Delta, ♣, \otimes\}$
$T = \{(a, \Delta), (c, ♣), (c, \Delta), (a, \otimes)\}$ $T \subseteq (A \times B) \Rightarrow T$ ist eine binäre Relation zwischen *A* und *B*.

Angewandt wird das kartesische Produkt bzw. die Relation in der Forstwissenschaft z.B. bei der Beschreibung eines Probanden (Objekt aus Datenerhebungen) durch mehrere Variablen. Ein Baum kann zum Beispiel durch je ein Element aus den folgenden Mengen beschrieben werden:

$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 70\}$ *Durchmesser in cm*
$A_2 = \{$Fi, Ta, Dgl, Bu,...$\}$ *Baumart*
$A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *soziologische Stellung im Bestand (Kraftsche Klassen)*
$A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 50\}$ *Höhe in m*
$A_5 = \{$Ca, N, P, K$\}$ *Art der Düngungsbehandlung.*

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$ ist das kartesische Produkt der Mengen. Ein einzelner Baum wird durch ein Element dieses kartesischen Produktes beschrieben. Dargestellt wird es in Form eines Vektors bzw. eines 5-Tupels.

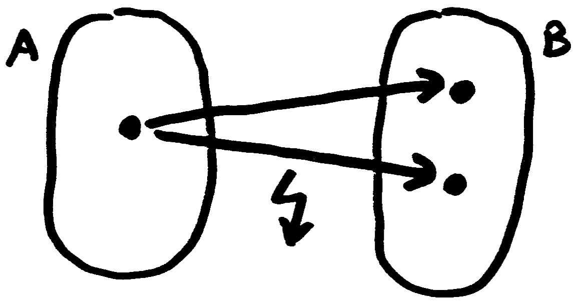
z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 35 \\ Ta \\ 4 \\ 25 \\ P \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{p}$ ist Element von $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$.

Abbildungen

Definition 1.11: *T* sei eine Relation zwischen zwei beliebigen Mengen *A* und *B*. Sie wird ***Abbildung*** der Menge *A* in die Menge *B* genannt, wenn ***jedem Element x aus A nur ein Element y der Menge B zugeordnet*** ist, so dass gilt $(x, y) \in T$. *(Das Wertepaar (x, y) ist Element der Relation T.)*
Der Abbildungsbegriff ist also eine „Verschärfung" des Relationsbegriffes.

Bei einer Abbildung von *A* in *B* wird im allgemeinen vorausgesetzt, dass jedem Element *x* von *A* ein *y* aus *B* („ein Bildelement") zugeordnet ist. Ist das nicht der Fall, spricht man von einer partiellen Abbildung.

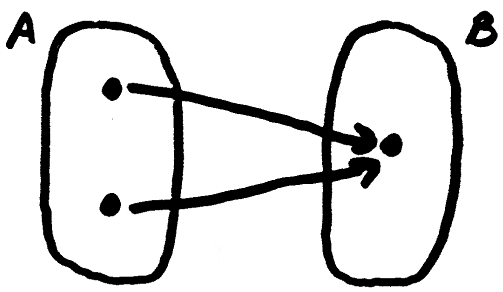
Abbildung 11



Hier erfolgt keine Abbildung von A in B, da a zwei Bilder hätte.

Jedoch stellt Abbildung 12 eine Abbildung von A nach B dar: $f(a) = c, f(b) = c$, das „Bild" ist stets eindeutig bestimmt.

Abbildung 12



Als Menge geschrieben ist $f = \{ (a, c), (b, c) \} \subseteq A \times B$.

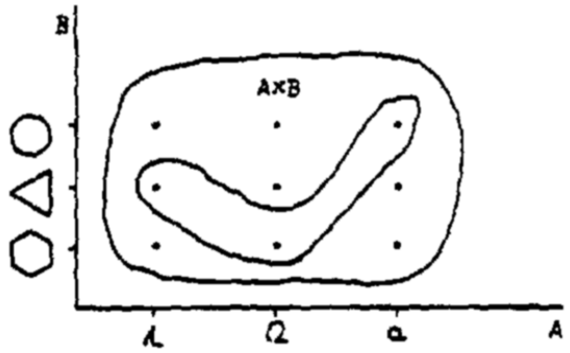
Schreibweisen:

$f \subseteq A \times B$ Abbildung (Funktion)
$f: A \to B$
$f: a \mapsto c \qquad (a \in A, c \in B)$
$f(a) = c$
„f bildet a auf c ab"
„c ist Bild von a unter f"
„a ist ein <u>Urbild</u> von c"

In der Forstwissenschaft sind Abbildungen z.B. in folgenden Zusammenhängen von Bedeutung:

Beim Holzverkauf wird jedem Baum nach bestimmten Vorschriften ein Geldwert zugeordnet. Die Menge der Bäume wird hier in die Menge der Geldbeträge (reelle Zahlen) abgebildet. Zwar können verschiedene Bäume denselben Geldwert besitzen, einem bestimmten Baum kann jedoch nur ein einziger Geldbetrag zugeordnet werden.
Die Mengen, die durch verschiedene Regeln ineinander abgebildet werden, brauchen keine Zahlenmengen zu sein, z.B. sind bei der Untersuchung der Sozialfunktion des Waldes die Abbildung der Waldlandschaftstypen in die Menge der Präferenzen von Waldbesuchern von Bedeutung.

Abbildung 13



Gilt $A = B$, ist also die abgebildete Menge gleich der Menge, in die abgebildet wird, dann spricht man von ***Abbildungen der Menge A***.

Eineindeutigkeit von Abbildungen (Injektivität) / inverse Relationen

Beispiel 1.25: A sei die Menge aller Männer und B die Menge aller Frauen.
Es sei $T = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ ist Ehegatte von } y\}$. Da in unserem Kulturkreis jeder Mann *nur mit einer Frau* verheiratet oder ledig sein kann, ist die Relation T eine (partielle) Abbildung. Diese Abbildung kann auch von der anderen Seite aus betrachtet werden: es ist nicht nur *jedem Mann nur eine Frau* zuzuordnen, sondern auch *jeder Frau nur ein Mann*. Eine Abbildung, die umgedreht werden kann und dann immer noch eine Abbildung darstellt, nennt man ***eineindeutig*** oder ***injektiv***.

Abbildung 14: injektive Funktion

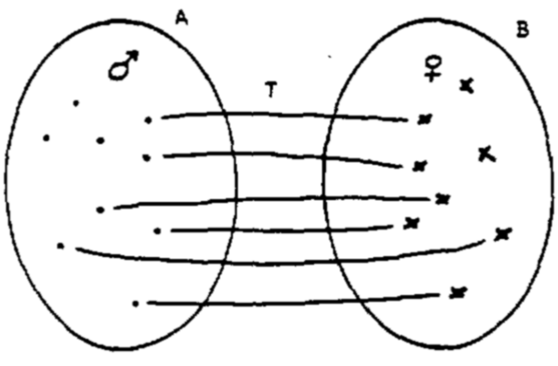
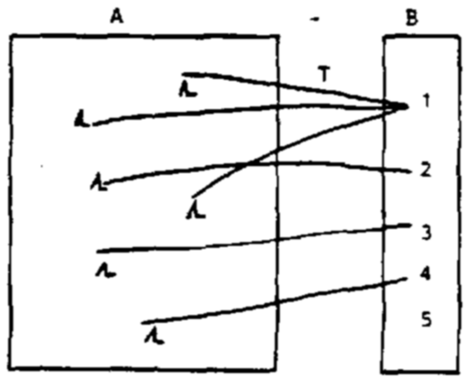


Abbildung 15: nicht injektive Funktion



Beispiel 1.26: Den Bäumen eines Bestandes wurden nach Vermessung die Stärkeklassen 1 bis 10 zugeordnet. Diese Zuordnung ist eine Abbildung, die jedoch nicht eineindeutig ist. Zwar wird jedem einzelnen Baum nur eine Stärkeklasse zugeordnet, doch kann umgekehrt nicht jeder Stärkeklasse nur ein bestimmter Baum zugeordnet werden.

Definition 1.12: S sei eine beliebige Relation zwischen den Mengen A und B. Die Relation S^{-1} nennt man genau dann ***inverse Relation*** zu S, wenn gilt: $\forall x \in A$ und $\forall y \in B$: $(x, y) \in S \Leftrightarrow (y, x) \in S^{-1}$. (*In Worten: Wenn für alle x aus A und alle y aus B gilt, dass das Wertepaar (x, y) Element von S ist genau, wenn (y, x) Element von* S^{-1}, *dann heißt* S^{-1} *inverse Relation zu S.*)

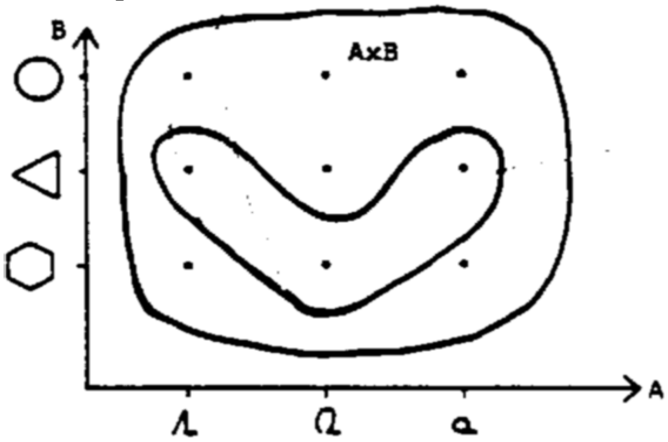
Beispiel 1.27: Die Relation aus Beispiel 1.25 hat die inverse Relation:
$T^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid x \text{ ist Ehegatte von } y\}$.
T hat die Elemente (Ehegatte, Ehefrau), während T^{-1} die Elemente (Ehefrau, Ehegatte) hat. Die inverse Relation zum Beispiel 1.26 hat die Elemente (Stärkeklasse, Baum).

Von besonderem Interesse sind diejenigen Abbildungen, deren Inversionen ebenfalls Abbildungen sind.

Definition 1.13: Die Abbildung T von A in B heißt genau dann ***injektive Abbildung***, wenn für zwei beliebige Elemente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T$ mit $x_1 \neq x_2$ auch $y_1 \neq y_2$ gilt.

In Kurzform: T injektiv $:\Leftrightarrow \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T: x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$.

Abbildung 16



(nicht injektive Abbildung)

Definitionsbereich /Wertebereich

F sei eine beliebige Relation mit den Elementen $(x, y) \in F$ mit $x \in A$ und $y \in B$.
Wir bilden zwei Mengen:

$$D(F) = \{ x \in A \mid \exists y \in B, \text{ so dass } (x, y) \in F \}$$

$$B(F) = F(A) = \{ y \in B \mid \exists x \in A, \text{ so dass } (x, y) \in F \}$$

Die Menge $D(F)$ heißt erster Bereich oder Definitionsbereich der Relation F.
Die Menge $B(F)$ heißt zweiter Bereich oder Wertebereich der Relation F.

Abbildung 17

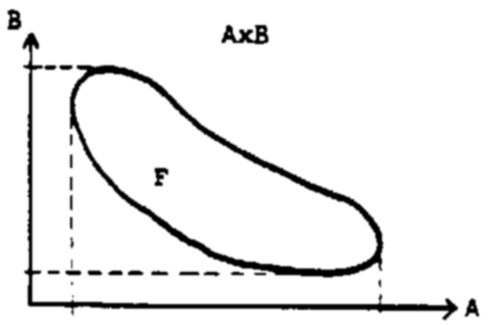
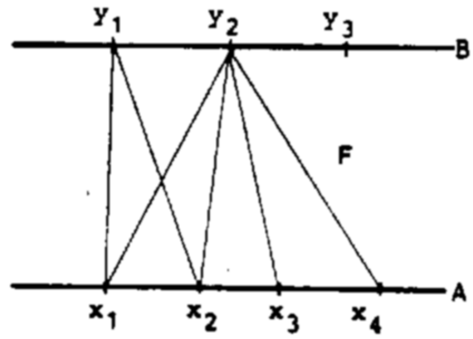
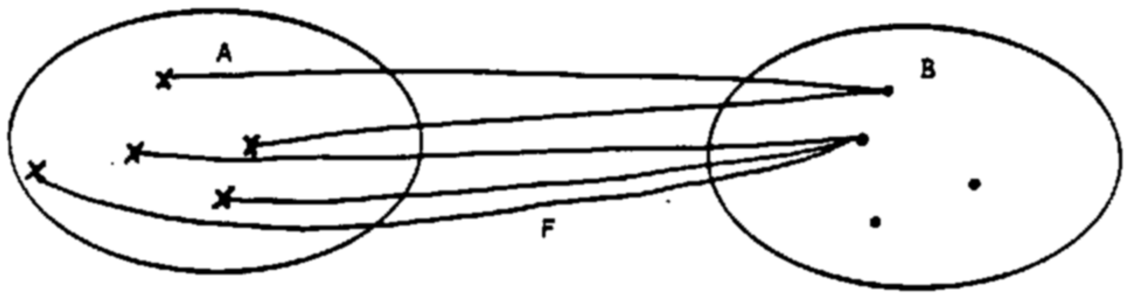


Abbildung 18



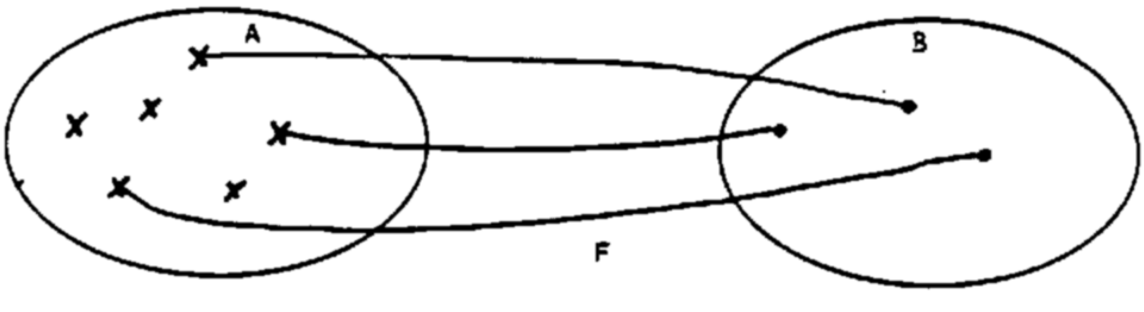
F sei eine Abbildung von *A* in *B*.
Ist $D(F) = A$, so spricht man von ***Abbildung der Menge A in die Menge B***.
Jedem Element der Menge *A* ist ein Element der Menge *B* zugeordnet, die Menge *A* ist ausgeschöpft. Die Menge *B* ist jedoch nicht notwendigerweise ausgeschöpft (siehe Abb. 19).

Abbildung 19



Ist $B(F) = B$, so spricht man von einer *Abbildung von A **auf** B*.
Die Menge *A* ist nicht notwendigerweise ausgeschöpft (partielle Abbildung), die Menge *B* ist dagegen ausgeschöpft (siehe Abb. 20).

Abbildung 20



Ist $D(F) = A \wedge B(F) = B$, so spricht man von Abbildung der Menge *A* auf *B* oder von ***surjektiver*** Abbildung. Beide Mengen sind ausgeschöpft.

Ist *F* ***surjektiv und zusätzlich injektiv*** (eineindeutig), so nennt man *F* ***bijektive*** Abbildung.

Abbildung 21

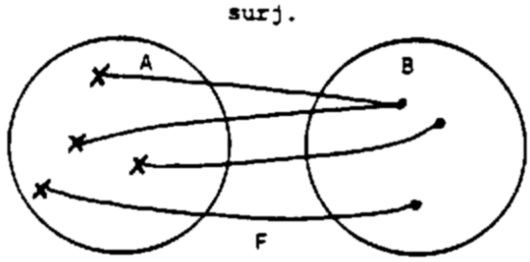
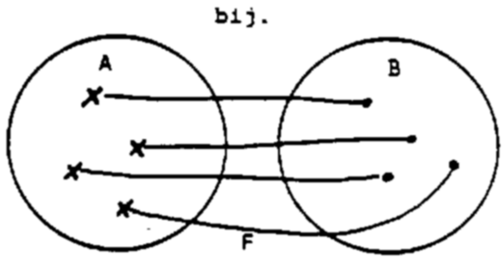


Abbildung 22



Zusammenfassung: injektiv: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$, eineindeutig.
surjektiv: $D(F) = A \wedge B(F) = B$, d.h. A und B sind ausgeschöpft.
bijektiv: injektiv und surjektiv.

$D(F)$ heißt ***Definitionsbereich*** der Abbildung F.
$B(F)$ heißt ***Bildbereich*** der Abbildung F.

Der Funktionsbegriff

Definition 1.14: Jede Abbildung in der Menge der reellen Zahlen nennt man eine reelle Funktion einer reellen Variablen.

Symbol: $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Die Funktion wurde als Menge eingeführt, so dass man hier alle bekannten Mengenoperationen durchführen kann.

Die Umkehrabbildung (inverse Funktion)

Sei $f: A \to B$ eine Funktion.
Die Umkehrabbildung f^{-1}: $B \to A$ existiert (als Funktion!), wenn f bijektiv ist.

Im kartesischen Koordinatensystem erhält man den Funktionsgraphen von f^{-1} aus dem Funktionsgraphen von f durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

Beachte: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Umkehrabbildungen wichtiger Funktionen:

$f(x)=x^2$	$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$	
exp, $f(x)=e^x$	$f^{-1}(x)=\ln x$	(logarithmus naturalis)
sin	arcsin	(arcus sinus)
cos	arccos	
tan	arctan	
sinh (sinus hyperbolicus)	Arsinh	(area sinus hyperbolicus)
cosh	Arcosh	

Bestimmung der Umkehrfunktion zu einer bijektiven Funktion $y = f(x)$:

Auflösen der Gleichung nach *x*, dann *x* und *y* vertauschen.

Beispiel:

$$y = f(x) = \frac{1}{2x^2 - 8} \qquad (x > 2)$$

$$\frac{1}{y} = 2x^2 - 8$$

$$\frac{1}{y} + 8 = 2x^2$$

$$\frac{1}{2y} + 4 = x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2y} + 4}$$

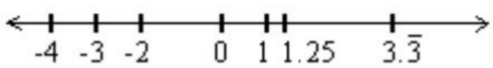
somit: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{2x} + 4}$

Die Menge der reellen Zahlen

Der Begriff der reellen Zahl ist zwar in der Mathematik fundamental, seine präzise Grundlegung soll hier aber nicht näher erläutert werden, da für unsere Zwecke eine naive Vorstellung ausreicht.

Symbol: $\mathbb{R}$

Abbildung 23



$\mathbb{R}$ ist eine Zahlenmenge und lässt sich grafisch mit Hilfe von Punktmengen darstellen, indem jeder Zahl auf der Zahlengeraden eindeutig ein Punkt zugeordnet wird.

Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$\mathbb{N}$: Die Menge der natürlichen Zahlen *(positive, ganze Zahlen ohne Null)*

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$: *(positive, ganze Zahlen einschließlich Null)*

$\mathbb{Z}$: Die Menge der ganzen Zahlen $(\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots)$

$\mathbb{Q}$: Die Menge der rationalen Zahlen *(alle Zahlen, die sich als Quotient* $\frac{p}{q}$ *aus den ganzen Zahlen p und q darstellen lassen, wobei q* $\neq 0$ *sein muss)*

***Achtung:** Jede rationale Zahl lässt sich entweder als endliche Dezimalzahl oder als unendliche periodische Dezimalzahl darstellen. Siehe Bsp. 1.15.*

$\mathbb{Q}^C$: Die Menge der irrationalen Zahlen *(* $\{x \mid x \neq \frac{p}{q}$ *mit* $p, q \in \mathbb{Z}\}$*, z.B. die Eulersche Zahl e,* $\sqrt{2}$ *und die Zahl* π*, also nicht abbrechende und nicht periodische Dezimalzahlen.)*

Es gilt:

1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *(In Worten: $\mathbb{N}$ ist Teilmenge von $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ wiederum Teilmenge von $\mathbb{Q}$ usw.)*
2) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$ *(In Worten: Die Schnittmenge von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^c$ ist die leere Menge.)*
3) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$ *(In Worten: Die Vereinigungsmenge der Menge der rationalen Zahlen und ihrer Komplementärmenge, den irrationalen Zahlen, ist die Menge der reellen Zahlen.)*

Beispiel 1.15: $0,\overline{62} = 0{,}62 \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \ldots\right) = 0{,}62 \cdot \frac{100}{99} = \frac{62}{99}$

Eigenschaften von $\mathbb{R}$

Ordnungsrelation ($\leq$)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ *(in Worten: für alle a, b aus der Menge $\mathbb{R}$)* gilt genau eine der folgenden Beziehungen:

$a < b$ (In Worten: a ist kleiner als b) → Ungleichung
$a > b$ (In Worten: a ist größer als b) → Ungleichung
$a = b$

Eine wichtige Eigenschaft der Ordnung ist die ***Transitivität***, d.h.:
wenn $a < b$ und $b < c$, dann gilt auch $a < c$.

Die Ordnung ist eine binäre Relation in $\mathbb{R}$.

Operation Addition (+)

$\forall a, b \in \mathbb{R} \, \exists_1 c \in \mathbb{R}$ mit $c = a + b$ *(in Worten: Für alle Elemente a, b aus der Menge der reellen Zahlen gibt es genau ein Element c aus der Menge der reellen Zahlen, für das gilt: c = a + b.)*

Eigenschaften der Addition:

1. Kommutativität: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ist $a + b = b + a$ *(Vertauschbarkeit der Elemente bei der Addition.)*
2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(bei der Addition ist die Reihenfolge, in welcher die Elemente zusammengezählt werden, unerheblich;Klammern können beliebig gesetzt werden.)*
3. Existenz eines neutralen Elements (0): $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt $a + 0 = a$ *(das Hinzuaddieren der Zahl* 0 *ändert den Wert der Zahl a nicht.)*
4. Existenz eines inversen Elements: $\forall a \in \mathbb{R} \; \exists_1 -a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$ *(jede Zahl a hat ein inverses Element mit entgegengesetztem Vorzeichen, das, zu a addiert, das neutrale Element Null ergibt.)*

Die Existenz des neutralen und des inversen Elementes ermöglicht die Subtraktion reeller Zahlen. ***Die Subtraktion ist keine Grundoperation:*** $a - b = a + (-b)$.

Operation Multiplikation (·)

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ \exists_1 c \in \mathbb{R}$ mit $c = a \cdot b$ *(in Worten: Für alle Elemente a, b aus der Grundmenge der reellen Zahlen gibt es genau ein c aus der Menge der reellen Zahlen, für das gilt: c = a · b.)*

Eigenschaften der Multiplikation:

1. Kommutativität: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot b = b \cdot a$ *(Vertauschbarkeit der Elemente bei der Multiplikation.)*
2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(bei der Multiplikation ist die Reihenfolge, in welcher die Elemente multipliziert werden, unerheblich. Klammern können beliebig gesetzt werden.)*
3. Existenz eines neutralen Elements (1): $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot 1 = a$ *(das Multiplizieren mit der Zahl* 1 *ändert den Wert der Zahl a nicht.)*
4. Existenz eines inversen Elements: $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists_1\ a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$ *(jede Zahl a* $\neq 0$ *hat ein inverses Element, nämlich seinen Kehrwert, der, mit a multipliziert, das neutrale Element* 1 *ergibt.)*

Die Existenz des neutralen und des inversen Elementes ermöglicht die Division reeller Zahlen. ***Die Division ist keine Grundoperation:*** $a : b = a \cdot b^{-1}$.

Beschränkte Intervalle

offenes Intervall

Symbol: $I = (a, b)$

Definition 1.15: $I = (a, b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ und } x < b \,\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$
(in Worten: Als offenes Intervall bezeichnet man die Menge aller x aus $\mathbb{R}$*, die größer als a und kleiner als b sind. a und b sind nicht Elemente dieses Intervalls.)*

(a, b)

Achtung: Die Schreibweise (a, b) für das offene Intervall von a bis b sollte nicht mit dem geordneten Paar (a, b) verwechselt werden. Welche Bedeutung von (a, b) gemeint ist, muss jeweils dem Zusammenhang entnommen werden.

abgeschlossenes Intervall

Symbol: $[a, b]$

Definition 1.16: $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} = \{ a \} \cup (a, b) \cup \{ b \}$
(in Worten: als abgeschlossenes Intervall von a bis b bezeichnet man die Menge aller x aus $\mathbb{R}$*, die größer gleich a und kleiner gleich b sind. a und b* ***sind*** *Elemente dieses Intervalls.)*

$[a, b]$

rechts abgeschlossenes Intervall

Symbol: $(a , b]$

Definition 1.17: $(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} = (a, b) \cup \{ b \}$
(in Worten: Als rechts abgeschlossenes Intervall bezeichnet man die Menge aller x aus $\mathbb{R}$*, die größer als a und kleiner gleich b sind.* ***Nur*** *b, nicht a ist Element dieses Intervalls.)*

$(a, b]$

links abgeschlossenes Intervall:

Symbol: $[a, b)$
Definition 1.18: $[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} = \{ a \} \cup (a, b)$
(in Worten: Als links abgeschlossenes Intervall bezeichnet man die Menge aller x aus $\mathbb{R}$*, die größer gleich a und kleiner als b sind.* ***Nur*** *a, nicht b ist Element dieses Intervalls.)*

$[a, b)$

Unbeschränkte Intervalle

rechts unbeschränktes Intervall

Symbol: $(a, +\infty)$

Definition 1.19: $(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$ mit $a \in \mathbb{R}$

(in Worten: Als rechts unbeschränktes Intervall von a bis +∞ wird die Menge aller x aus $\mathbb{R}$ *bezeichnet, die größer als a sind. a ist nicht Element dieser Menge.)*

(für $\{ a \} \cup (a, +\infty)$ schreiben wir $[a, +\infty)$. *a **ist** dann Element des Intervalls.*)

$(a, +\infty)$

$[a, +\infty)$

links unbeschränktes Intervall

Symbol: $(-\infty, a)$

Definition 1.20: $(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$ mit $a \in \mathbb{R}$

(in Worten: Als links unbeschränktes Intervall von −∞ bis a wird die Menge aller x aus $\mathbb{R}$ *bezeichnet, die kleiner als a sind. a ist nicht Element dieser Menge.)*

(für $\{ a \} \cup (-\infty, a)$ schreiben wir $(-\infty, a]$. *a **ist** dann Element des Intervalls.*)

$(-\infty, a)$

$(-\infty, a]$

Absoluter Betrag

Symbol: $| a |$

Definition 1.20 (1.):

$| a | = a$, wenn $a > 0$
$| a | = a$, wenn $a = 0$
$| a | = -a$, wenn $a < 0$

Beispiel zu 1.15 (1.): $|7| = 7$
$|-2| = 2$

Definition 1.20(2.): $|a| = \max(a, -a)$
(in Worten: | a | ist gleich der größeren Zahl aus der Menge {a, −a}, also gleich der positiven Zahl.)

Beispiel zu 1.15 (2.): $|7| = \max(7, -7) = 7$
$|-2| = \max(2, -2) = 2$

Aus den Definitionen folgt:
1. $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $|a| = |-a|$
2. $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $a \le |a|$
3. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ist $|a| > 0$
4. $\forall a \in \mathbb{R}, a \ge 0$ ist $|a| = a$
5. $\forall a \in \mathbb{R}, a < 0$ ist $|a| = -a$

Beispiel 1.16: Bestimme: $|3x - 10|$ für $x \in \mathbb{R}$.
Lösung: (a) Wenn $3x - 10 \ge 0 \Rightarrow |3x - 10| = 3x - 10$ *(siehe 4.)*
(b) Wenn $3x - 10 \le 0 \Rightarrow |3x - 10| = -(3x - 10) = -3x + 10$ *(siehe 4.)*

Potenz und Wurzel

Potenz mit ganzzahligem Exponenten:

Bsp.: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ *(sprich: „4 hoch 3")*
Die Zahl 4 heißt Basis, 3 ist der Exponent. Der Exponent drückt aus, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert wird.

Definition 1.21: 1. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, ist $a^0 = 1$. *(In Worten: Es wurde festgelegt, dass für alle von Null verschiedenen a aus* $\mathbb{R}$ *gilt „$a^0 = 1$".)*
2. $\forall a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}^+$ ist $a^n = a^{n-1} \cdot a$ *(in Worten: Für alle a aus* $\mathbb{R}$ *und n aus der Menge der positiven ganzen Zahlen ist $a^n = a^{n-1} \cdot a$.)*
3. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$ und $m \in \mathbb{Z}^-$ ist $a^m = (a^{-m})^{-1}$

Bsp. zu 3.: $4^{-3} = (4^3)^{-1} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

Beachte: $\forall a \in (0, \infty)$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x \in (0, \infty)$ mit $x^n = a$. (In Worten: Für alle positiven Zahlen a aus $\mathbb{R}$ und für alle n aus der Menge der natürlichen Zahlen gibt es ein x aus der Menge der positiven reellen Zahlen, für das gilt: $x^n = a$.)
Dieses x nennen wir die n-te Wurzel von a.

Wurzel:

Symbol:

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Definition 1.22: Diejenige positive reelle Zahl x, die die Gleichung $x^n = a$ für $a > 0$ eindeutig löst, heißt n-te Wurzel von a.
Ist $a < 0$ und n eine ungerade natürliche Zahl, sei die n-te Wurzel aus a:
$x = -\sqrt[n]{-a}$.
Für ein gerades n und negatives a ist die n-te Wurzel von a in $\mathbb{R}$ nicht definiert.

Beispiel 1.17: (1) $\sqrt[3]{27} = 3$

(2) $\sqrt{9} = 3$

(3) $\sqrt{-9}$ existiert in $\mathbb{R}$ nicht.

(4) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

(5) $\sqrt{3x - 10}$ existiert, wenn $3x - 10 \geq 0$, d.h. $x \geq \frac{10}{3}$

(6) $\sqrt[n]{3x - 10}$ existiert für ungerades n für alle $x \in \mathbb{R}$.

(7) $\sqrt[n]{3x - 10}$ existiert für gerades n für alle $x \geq \frac{10}{3}$.

Beachte:
$(\sqrt{x})^2 = x$ (nach Definition der Wurzel),

aber: $\sqrt{x^2} = |x|$ (Bsp.: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = +2 = |-2|$, nicht -2)

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Allgemeine Form einer quadratischen Gleichung: $x^2 + px + q = 0$.
(ggf. erst auf diese Form bringen!)

⇒ Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ (existieren, falls $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ ist).

Bsp.: $2x^2 + 30 = 16x$, $x = ?$
Umformen: $2x^2 - 16x + 30 = 0$
. ⇒ $x^2 - 8x + 15 = 0$
$x_{1,2} = +4 \pm \sqrt{(16 - 15)} = 4 \pm 1$
. ⇒ $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$

Wurzelsatz von Vieta: $x_1 + x_2 = 3 + 5 = 8 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 5 = 15 = q$

Potenz von reellen Zahlen mit gebrochenem Exponenten

Symbol: $a^{\frac{k}{n}}$

Definition 1.23: $\forall a \in (0, \infty)$ und $\forall q = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ ist $a^q = a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.

(In Worten: Für alle positiven reellen Zahlen a und für alle q aus der Menge der rationalen Zahlen ist $a^q = a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$ *.)* ⇒ (Die Operation „Wurzelziehen" lässt sich also auf die Potenz mit gebrochenem Exponenten zurückführen.)

Definition 1.24: (Rechenregeln für Potenzen)
Sind $a, b \in (0, \infty)$ und $r, s \in \mathbb{Q}$, so gilt:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ *(Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.)*
2. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ *(Die Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.)*
3. $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ *(Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten und unterschiedlicher Basis können zusammengefasst werden, indem die Basen multipliziert werden. Der Exponent gilt dann für das gesamte Produkt.)*
4. $a^r \div a^s = a^{r-s}$ *(Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert.)*

Logarithmen

Lösung von $b^x = a$ $(a, b > 0)$ ist $x = \log_b a$ *(Logarithmus von a zur Basis b).*

Üblicherweise arbeitet man mit dem natürlichen Logarithmus
zur Basis $e = 2{,}718281828...$: $\ln a = \log a = \log_e a$.

Es gilt: $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$.

ln ist die Umkehrfunktion von e^x .

Logarithmus-Rechenregeln (gelten für jede Basis b):

1. $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$
2. $\log(x / y) = \log x - \log y$
3. $\log(x^y) = y \cdot \log x$
4. $\log(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log x$

Wichtige Begriffe aus der Theorie der Zahlenmengen

Umgebung eines Punktes *b*:

Symbol: (b–ε, b+ε)

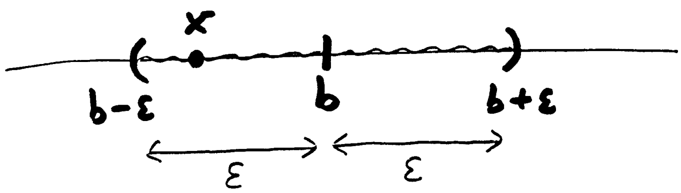
Definition 1.25: $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-b| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid b-\varepsilon < x < b+\varepsilon\}$
Dabei sei $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.
(In Worten: Die offene Umgebung des Punktes b, (b–ε, b+ε), ist definiert als die Menge aller x aus ℝ*, die größer als b–ε und kleiner als b+ε sind. ε (Epsilon) ist eine positive reelle Zahl, die einen beliebigen Wert annehmen kann.)*

ε heißt Radius der Umgebung; je nach Größe von ε nimmt die Umgebung des Punktes b eine bestimmte Größe an.

Beweis, dass $|x-b| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; b-\varepsilon < x < b+\varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
& |x-b| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow\;& x-b < \varepsilon \;\wedge\; -(x-b) < \varepsilon \\
\Leftrightarrow\;& x-b < \varepsilon \;\wedge\; (x-b) > -\varepsilon \\
\Leftrightarrow\;& x < b+\varepsilon \;\wedge\; x > b-\varepsilon \\
\Leftrightarrow\;& b-\varepsilon < x < b+\varepsilon \quad .
\end{aligned}
$$

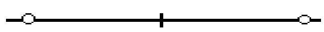
Abbildung 24



Beachte:

$|a-b|$ ist stets der Abstand von a und b. Abstände sind nicht negativ.

(a)



linke Umgebung von b: (b–ε, b]
rechte Umgebung von b: [b, b+ε)

(b)

Die Umgebung von +∞ ist (d, +∞), $d \in \mathbb{R}$ beliebig.
Die Umgebung von –∞ ist (–∞, d), $d \in \mathbb{R}$ beliebig.

Folgen

Zwei (gleichwertige) Definitionen des Begriffs der (unendlichen) Folge mit Folgengliedern aus einer Menge M:

1. „∞-Tupel“
   $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \in M \times M \times M \times M \times \ldots$

2. Abbildung von $\mathbb{N}$ in M:
   $f: \mathbb{N} \to M \quad ; \quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
   $n \to a_n$

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} = \{1, \; 2, \; 3, \; 4, \ldots\} \\ \quad\;\; \downarrow \;\; \downarrow \;\; \downarrow \;\; \downarrow \\ \quad (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \end{array}$$

Häufige Schreibweisen für Folgen: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

z.B. (1, 4, 9, 16, 25, ...) = $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge der Quadratzahlen.

Häufungspunkte

Definition 1.26: Häufungspunkt einer Menge M nennt man den Punkt b, wenn in jeder beliebig kleinen Umgebung von b unendlich viele Punkte aus M liegen. ***Ein Häufungspunkt einer Menge muss nicht zur Menge gehören.***

Beispiel 1.18: $M = (-1, 2\,]$
Jedes $x \in (-1, 2\,]$ ist ***Häufungspunkt der Menge***, da in jeder beliebig kleinen Umgebung jedes Punktes $x \in (-1, 2\,]$ unendlich viele reelle Zahlen liegen, die gleichzeitig Elemente von M sind. Auch -1 und 2 sind Häufungspunkte, da in beliebig kleiner linker Umgebung von 2 und beliebig kleiner rechter Umgebung von -1 ebenfalls unendlich viele reelle Zahlen liegen.

! -1 ist Häufungspunkt, obwohl er nicht Element von M ist.

Definition 1.27: b ist ***Häufungspunkt einer Folge***, wenn in jeder Umgebung von b unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Beispiel 1.19: $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in M$ $\qquad M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4,} \ldots\right\}$

Die Folge a_n und ihre zugehörige Menge M haben den Häufungspunkt 0, der nicht Element der Menge ist.

! Wichtig ist die Unterscheidung zwischen Häufungspunkten einer Folge und Häufungspunkten der aus den Elementen der Folge gebildeten Zahlenmenge, was am folgenden Beispiel gezeigt werden soll:

Beispiel 1.20: Es ist: $a_n = (-1)^n \qquad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1 \quad \ldots$

Die entsprechende Menge zu dieser Folge ist: $A = \{-1, 1\}$. Diese Menge hat keinen Häufungspunkt.

! Eine endliche Menge kann keinen Häufungspunkt haben!

Nach der Definition des Häufungspunktes bei Folgen sind aber die Zahlen 1 und -1 Häufungspunkte der Folge, da in beliebig kleiner Umgebung von 1 und -1 unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Grenzwert einer Folge

Definition 1.24: *b* ist genau dann Grenzwert einer Folge, wenn *b* Häufungspunkt der zugehörigen Menge *M* ist und außerhalb jeder Umgebung von *b* nur endlich viele Punkte der Folge liegen.

Beispiel 1.21: (a) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ und ihre zugehörige Menge $M = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots\right\}$

haben den Häufungspunkt 0. Da außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von 0 nur endlich viele Elemente der Folge liegen, ist 0 gleichzeitig Grenzwert der Folge. In diesem Fall gehört der Häufungspunkt selbst nicht zu *M*.

(b) Die Folge $a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$ und ihre zugehörige Menge

$$M = \left\{-2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{6}{5},\ \frac{5}{6}, \ldots\right\}$$

haben die Häufungspunkte -1 und 1.
Außerhalb jeder Umgebung um einen der Häufungspunkte liegen jedoch immer unendlich viele Punkte. Z.B. liegen unendlich viele Punkte in der Umgebung von -1 (was ja Bedingung für den Häufungspunkt ist), so dass außerhalb einer kleinen Umgebung von +1 auch unendlich viele Punkte liegen.

! 2 Grenzwerte sind also ausgeschlossen!

Der Begriff „Reihe“ (= naiv: „unendliche Summe“)

Bsp.: Welchen Wert hat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$?

$$\left(= \quad 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right)$$

Man findet:

$$\begin{aligned}
&1 && = 1 \\
&1 + \frac{1}{2} && = 1{,}5 \\
&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} && = 1{,}75 \\
&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} && = 1{,}875 \\
&\ldots && \ldots
\end{aligned}$$

Als Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ definiert man den Grenzwert dieser Folge, dieser ist hier 2.

Anderes Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots = e$

Beachte:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht definiert (hat keinen Grenzwert, „konvergiert nicht").

Beschränkte Menge

Definition 1.25: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt ***obere Schranke*** der Menge M, wenn alle Zahlen der Menge kleiner oder gleich dieser Zahl sind.
h heißt ***untere Schranke*** von M, wenn alle Elemente von M größer oder gleich der Zahl h sind.

Bsp.: $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Die Zahl 4 ist eine obere Schranke von M, da alle Elemente von M kleiner oder gleich 4 sind. Genauso ist z.B. 38 obere Schranke, da ja ebenfalls alle Elemente kleiner als 38 sind. In diesem Fall ist 38 nicht Teil der Menge. Untere Schranken von M sind z.B. die Zahlen 1, 0 und –5.

Definition 1.26: Die Menge M heißt ***nach oben beschränkt***, wenn sie mindestens eine obere Schranke hat. Sie heißt ***nach unten beschränkt***, wenn sie mindestens eine untere Schranke hat.

Definition 1.27: Die Menge M heißt beschränkt, wenn sie ***sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt*** ist.

Beispiel 1.22: (a) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt.
(b) Die Menge der negativen Zahlen ist nach oben beschränkt.
(c) Die Menge $I = [6, 12)$ ist eine beschränkte Menge, da sie sowohl obere Schranken (alle $h \in \mathbb{R}$ mit $h \geq 12$) als auch untere Schranken (alle $h \in \mathbb{R}$ mit $h \leq 6$) hat.

(d) Die Menge $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt, da alle $h \in \mathbb{R}$, $h \geq 1$ obere und alle $h \in \mathbb{R}$, $h \leq 0$ untere Schranken von M sind.

Supremum, Infimum, Maximum und Minimum

Definition 1.28: Die kleinste obere Schranke einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt ***Supremum*** von M.
Die größte untere Schranke von M heißt ***Infimum*** von M.

Symbol: $\sup M$
$\inf M$

Beispiel 1.23: $M = \{1, 3, 5, 7\}$. 1 ist Infimum der Menge M, und 7 ist Supremum von M.

Definition 1.29: Gilt sup $M \in M$, so heißt sup M das ***Maximum*** von M. *(In Worten: Gehört das Supremum selbst zur Menge dazu, wird es Maximum genannt.)*
Gilt inf $M \in M$, so heißt inf M das ***Minimum*** von M. *(In Worten: Gehört das Infimum zur Menge M, so wird es Minimum genannt.)*

Symbole: max M
min M

Beispiel 1.24: $inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$

Das Infimum der Folge $\frac{1}{n}$ gehört nicht zur zugehörigen Menge und ist gleichzeitig Häufungspunkt. *(s. Bsp. 1.19).*

In der Analysis zeigt man:

(a) Eine beschränkte unendliche Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.
Diesen findet man durch Intervallteilung *(Man halbiert das Intervall, betrachtet diejenige Hälfte mit unendlich vielen Elementen als neues Intervall und teilt erneut...)*.

(b) Eine wachsende, nach oben beschränkte Folge hat den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Das sollte man nach dem Besuch der Vorlesungen und Übungen beherrschen:

- Bilden von Teilmenge, Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Komplement, Potenzmenge und kartesischem Produkt
- grafische Darstellung der Mengenoperationen
- rechnerische Anwendung der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Wurzelziehen, Logarithmieren
- Erkennen von Häufungspunkten von Mengen und Folgen
- Bestimmen des Grenzwertes einer Folge
- Bestimmen von Supremum, Infimum, Minimum und Maximum einer Zahlenmenge
- Erkennen von Abbildungen (Funktionen)
- Bestimmung von Definitions- und Bildbereich einer Abbildung
- Erkennen von Surjektivität, Injektivität und Bijektivität bei Abbildungen

Anhang zu Kapitel 1

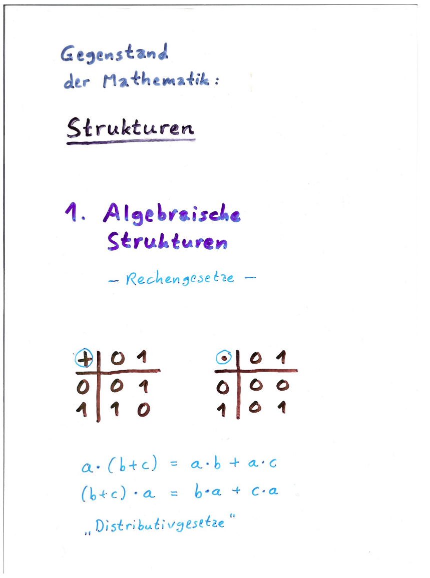


Abbildung A1

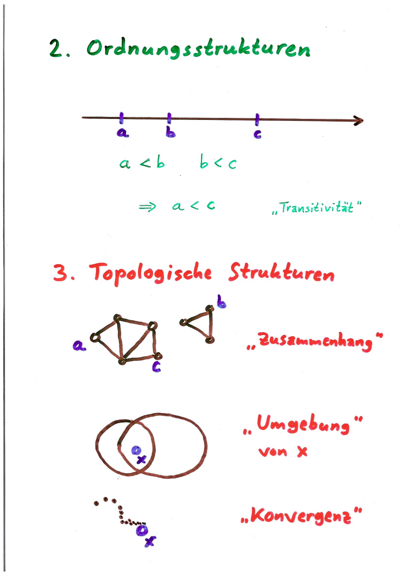


Abbildung A2

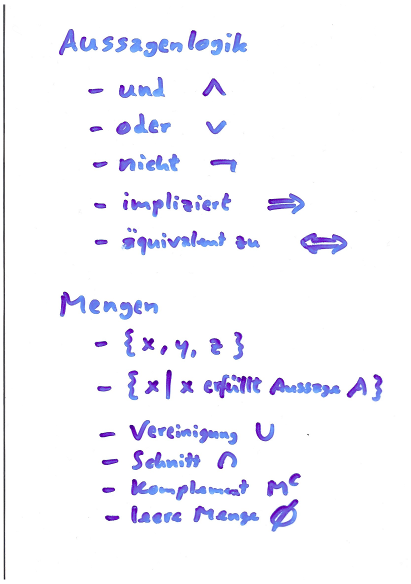


Abbildung A3

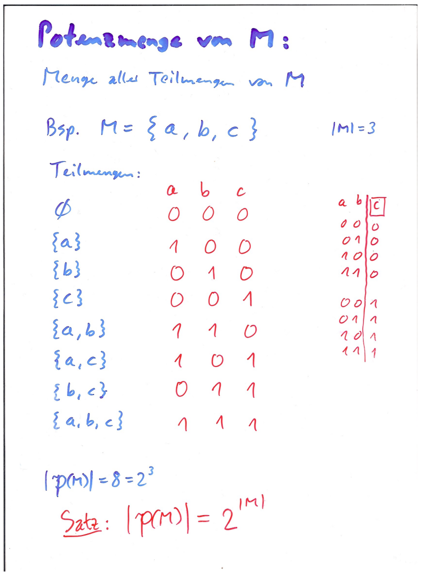


Abbildung A4

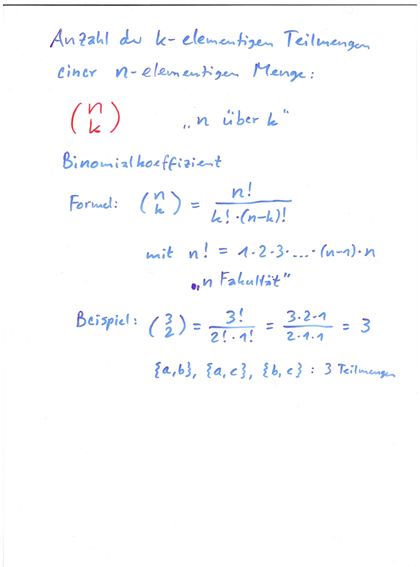


Abbildung A5

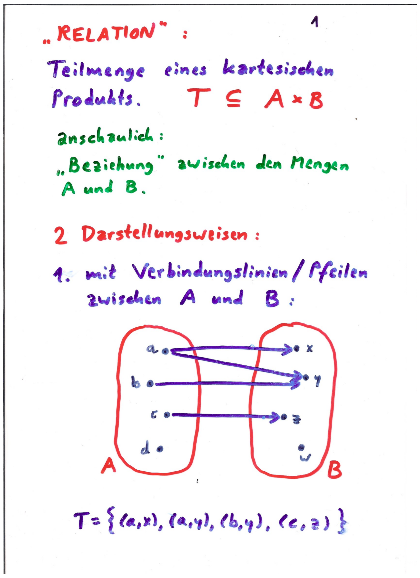


Abbildung A6

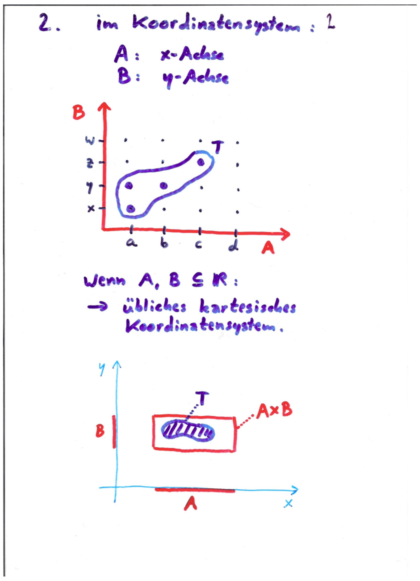


Abbildung A7

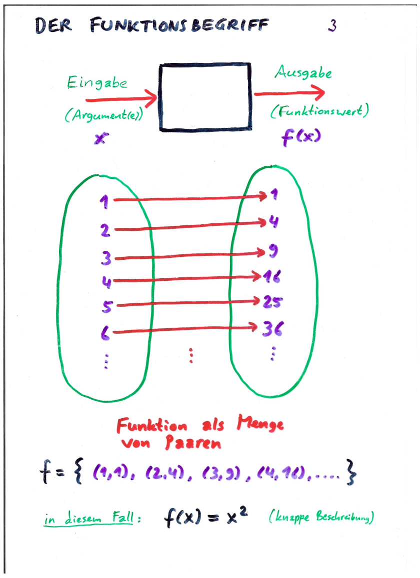


Abbildung A8

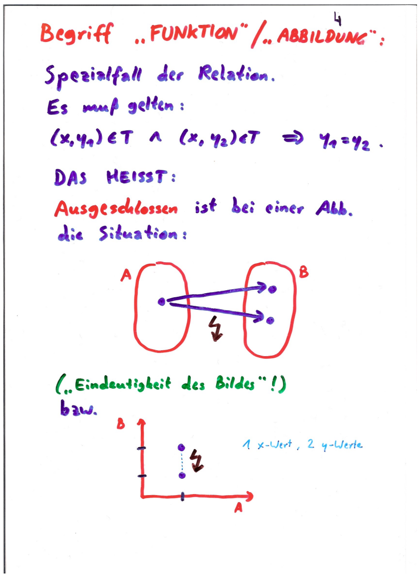


Abbildung A9

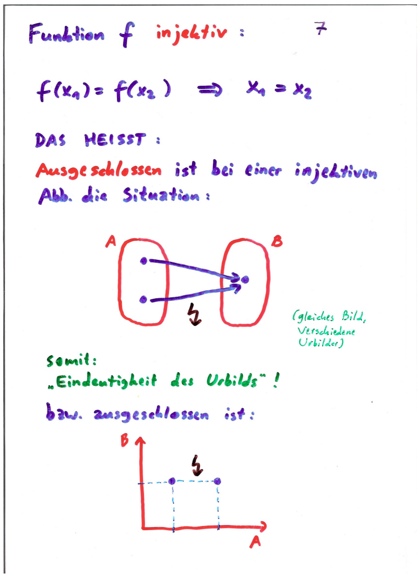


Abbildung A10

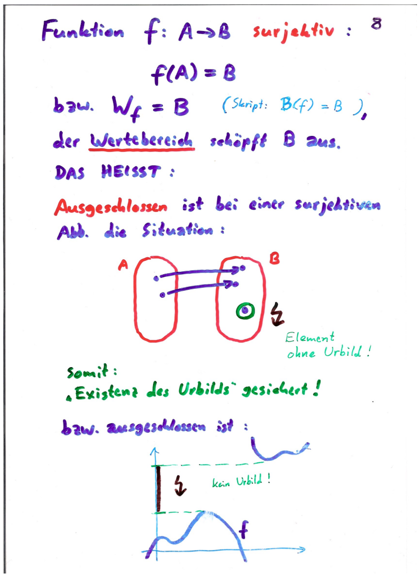


Abbildung A11

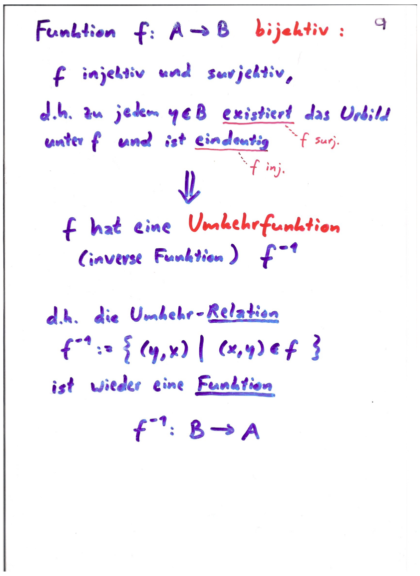


Abbildung A12

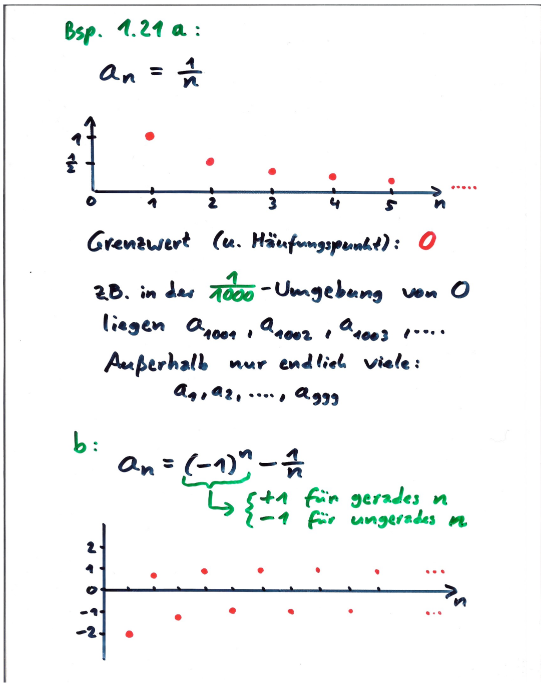


Abbildung A13