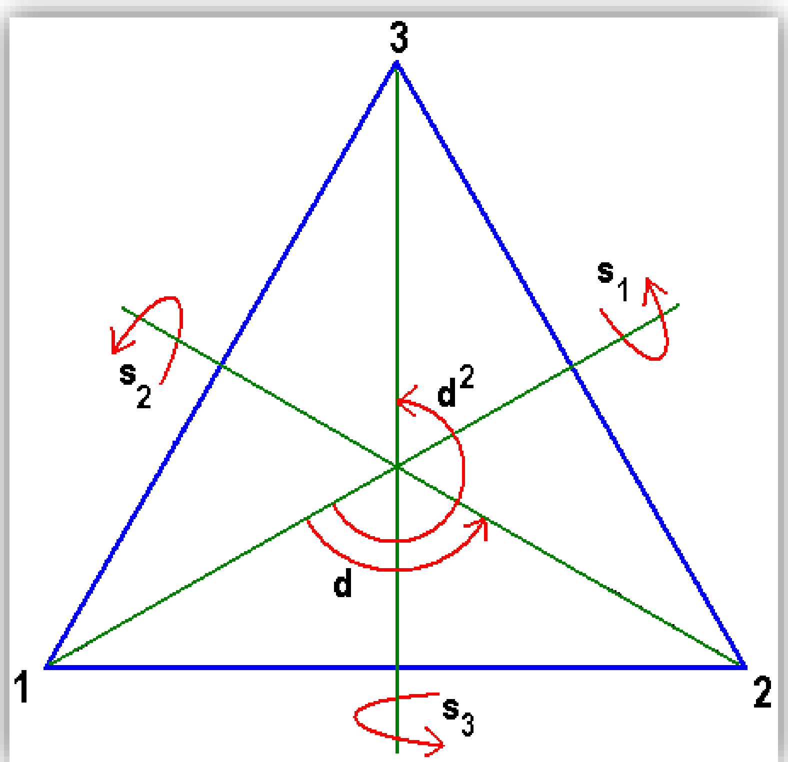
Aufgabenstellungen: *auch unten auf den Folien, vor jeweiligen Lösungen* *Teil_06* *http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs20_u06.pdf*

***Anwendungsbeispiele** zur heutigen Sitzung:*

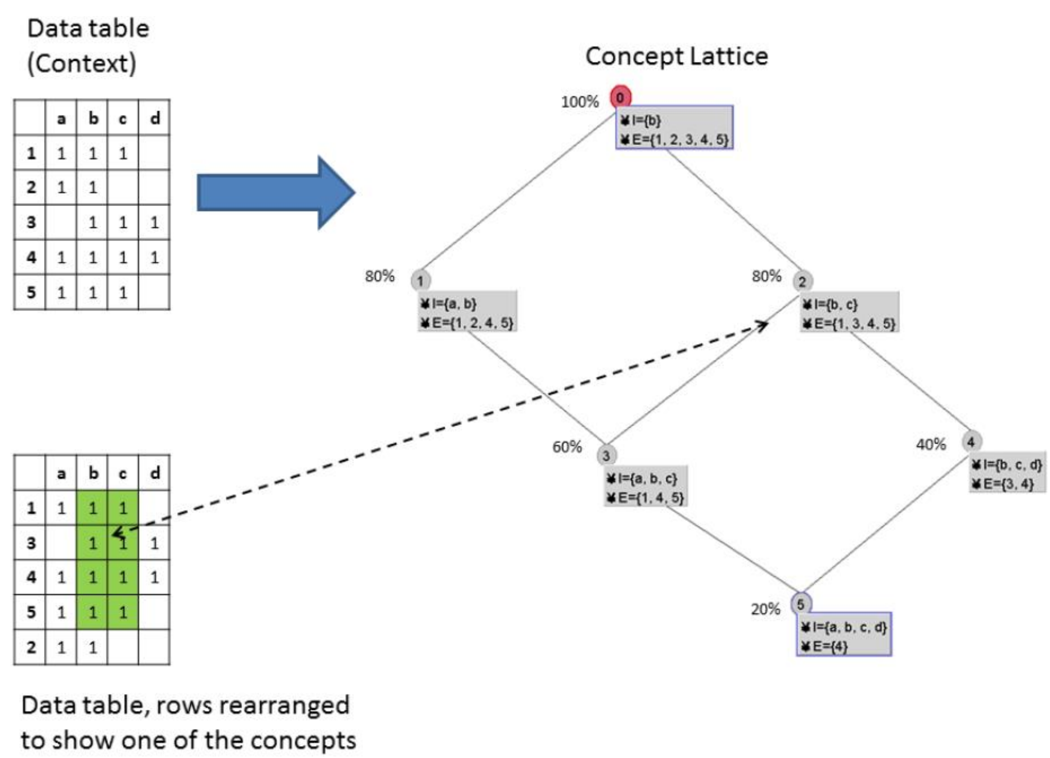
Viel Glück bei euren Klausuren! Ihr schafft das!

Symmetrische Gruppe S_3

Quelle: Wiki



***Formale Begriffsanalyse** (mehr zum Diagramm hier)*



***Die Schlüsselbegriffe** der heutigen Sitzung:*

Cayley-Graph

Erzeugendensystem

Halbgruppe, Monoid, Gruppe, Ring, Verband

Begriffsverband

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe T6.1: *Cayley-Graph - Erzeugendensystem #1*

A sei die Gruppe mit den Erzeugenden $\{a; b; c\}$ und den definierenden Relationen
$a^2 = b^2 = c^2 = e$
$(ab)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = e$
(e = Einselement von A). Zählen Sie die unterschiedlichen Elemente von A auf.
Zeichnen Sie den Cayley-Graphen von A.

QuickFact: alternativ zum Lösungsansatz auf der nächsten Seite, nachdem die Relationen "entziffert" sind, man kann auch in geschickter Weise **auf die Lösung kommen**:

$$\boxed{\begin{cases} aa = e \\ bb = e \\ cc = e \end{cases}} \text{ heißt } \begin{cases} ordnung(a) = 2 \\ ordnung(b) = 2 \\ ordnung(c) = 2 \end{cases} \text{ heißt } \begin{cases} inverse(a) = a \\ inverse(b) = b \\ inverse(c) = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} abab = e \\ acac = e \\ bcbc = e \end{cases} \text{ heißt } \boxed{\begin{cases} ab = ba \\ ac = ca \\ bc = cb \end{cases}}$$

Hausaufgabe für Mathe Fans ☺: beweist dass die erzeugte Gruppe in so einem Fall (d.h. bei kommutierenden und dabei beliebig vielen Erzeugenden) kommutativ ist

Für jedes Element $g \in G$:

$$g = \prod_{s \in S_g \subseteq S} s \text{ in } g = a^k \cdot b^m \cdot c^n \text{ umstellbar}$$

Wobei $(k, m, n) \in \{0, 1\}^3$ und $s^0 \overset{\text{def}}{=} e$

Die Ordnung der erzeugten Gruppe: $|G| = |\{0, 1\}^3| = 2^3 = 8$

Aufgabe T6.1

Lösung:

Schritt #1: Nutzung der Definition eines Erzeugendensystems einer Gruppe $\boldsymbol{G}(\cdot, \boldsymbol{e})$

Hausaufgabe für Mathe Fans ☺: beweist es für den allgemeinen Fall von endlichen Gruppen und beliebig vielen Erzeugenden

$$\text{für jedes } \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G} \stackrel{\text{def}}{=} \langle S \rangle : \boldsymbol{g} = \prod_{i=1}^{n(g) \geq 1} \boldsymbol{s_i} \text{, wobei } \boldsymbol{s_i} \in S := \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$$

Schritt #2: Auffinden aller Elemente der Gruppe $\boldsymbol{G}$ je Kettenlänge $\boldsymbol{n}$ mithilfe der definierenden Relationen

$\boldsymbol{n(g) = 1}$ | $\boldsymbol{g = s_1}$

s_1	a	b	c

$\boldsymbol{n(g) = 2}$ | $\boldsymbol{g = s_1 \cdot s_2}$

		s_2		
		a	b	c
s_1	a	e	$a \cdot b$	$a \cdot c$
	b		e	$b \cdot c$
	c			e

$\boldsymbol{n(g) = 3}$ | $\boldsymbol{g = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3}$

		$s_2 \cdot s_3$		
		$a \cdot b$	$a \cdot c$	$b \cdot c$
s_1	a	b	c	$a \cdot b \cdot c$
	b	a	$a \cdot b \cdot c$	c
	c	$a \cdot b \cdot c$	a	b

$\boldsymbol{n(g) \geq 4}$ | $\boldsymbol{g = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdots s_{n(g)}}$

		$s_{n(g)}$		
		a	b	c
$s_1 \cdot s_2 \cdots s_{n(g)-1}$	$a \cdot b \cdot c$	$b \cdot c$	$a \cdot c$	$a \cdot b$

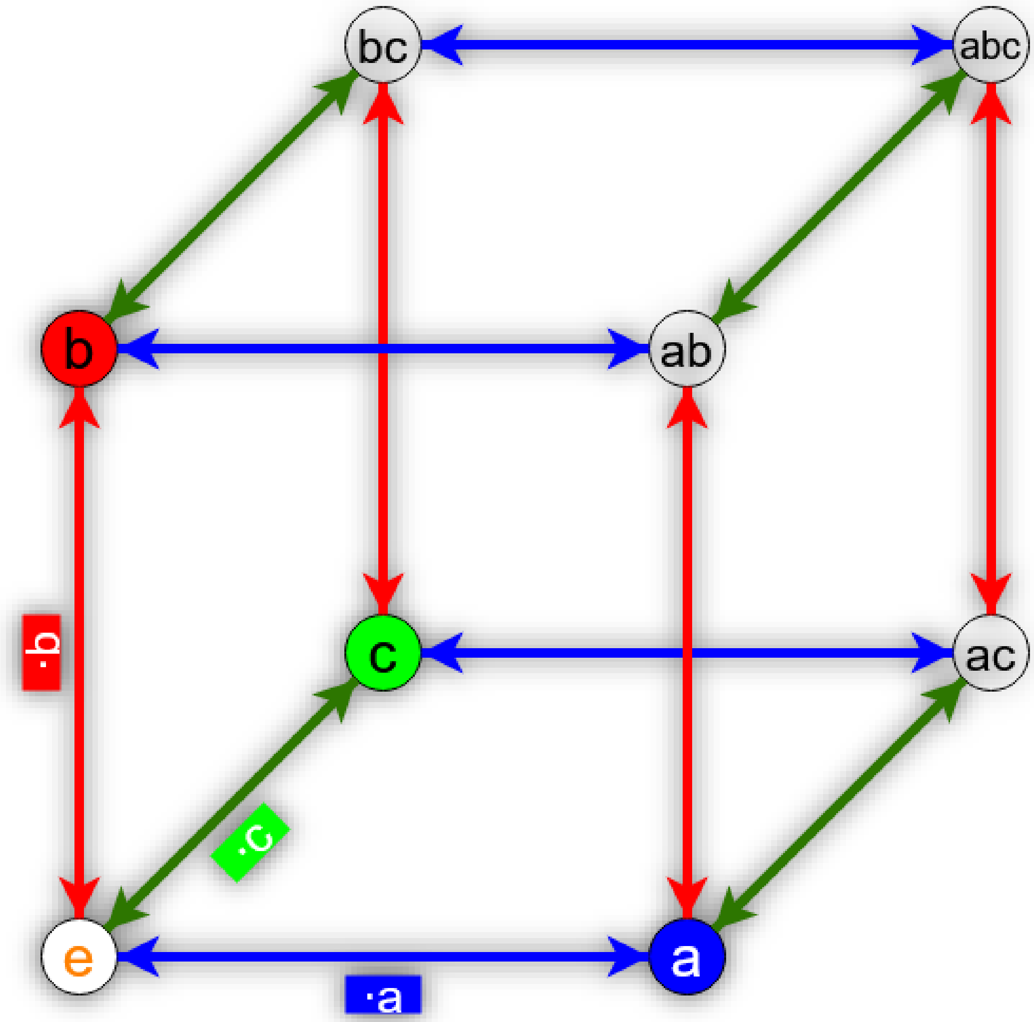
QuickFact: das schildert im Prinzip nur den Fall $\boldsymbol{n(g) = 4}$, aber im Allgemeinen deutet auf die **Abwesenheit neuer Elemente** bei längeren Ketten

$$\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{a \cdot b}, \quad \boldsymbol{a \cdot c}, \quad \boldsymbol{b \cdot c}, \quad \boldsymbol{a \cdot b \cdot c}\}$$

Aufgabe T6.1

Lösung:

Schritt #3: Cayley-Graph



Aufgabe T6.2: *Cayley-Graph – Erzeugendensystem #2*

T sei das von $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ erzeugte Transformationsmonoid. Zählen Sie die unterschiedlichen Elemente von T (als Transformationen) auf und zeichnen Sie den Cayley-Graphen von T.

QuickFact: auch diese Aufgabe lässt sich etwas geschickter (als auf der nächsten Seite) lösen:

Die Elemente des zu erzeugenden Monoids kann man als Transformationen eines gleichseitigen Dreiecks ansehen (siehe das linke Bild):

- Elemente wie $\boldsymbol{\alpha}$ sind Permutationen (sprich, Drehungen oder Spiegelungen des Dreiecks);
- Elemente wie $\boldsymbol{\beta}$ sind **degenerative** Transformationen, bei denen ein Dreieck in einen seiner Eckpunkte überführt wird.

Die Komposition der Transformationen $\circ$ ist einfach deren Hintereinanderausführung (**hier**: von rechts nach links):

- für jedes $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\boldsymbol{\alpha^n \circ \beta}$ wird das Dreieck erst in seinen Eckpunkt $\mathbf{3}$ umwandeln, und danach diesen Punkt um $\mathbf{120}°$ um den Mittelpunkt des Dreiecks drehen - somit in einen anderen Punkt überführen und zwar:

$$\begin{cases} \text{bei } n \in 3\mathbb{N}_0 + 1 \text{ in den Punkt } \mathbf{1}\text{: } \boldsymbol{\alpha^n \circ \beta} = \alpha^1 \circ \beta = \boldsymbol{\alpha \circ \beta} \\ \text{bei } n \in 3\mathbb{N}_0 + 2 \text{ in den Punkt } \mathbf{2}\text{: } \boldsymbol{\alpha^n \circ \beta} = \boldsymbol{\alpha^2 \circ \beta} \\ \text{bei } n \in 3\mathbb{N}_0 \text{ in den Punkt } \mathbf{3}\text{: } \boldsymbol{\alpha^n \circ \beta} = e \circ \beta = \boldsymbol{\beta} \end{cases}$$

- für jedes $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\beta \circ t}$ wird das Dreieck im Endeffekt in den Punkt 3 umwandeln, also ganz egal was $\boldsymbol{t}$ angerichtet hat: $\boldsymbol{\beta \circ t = \beta}$

Für jedes $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{t} = \prod_{s \in S_t \subseteq S = \{\alpha, \beta\}} \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\alpha}^{k \in \{0,1,2\}} \circ \boldsymbol{\beta}^{m \in \{0,1\}} \text{ und } |\boldsymbol{T}| = |\{0,1,2\} \times \{0,1\}| = 3 \cdot 2 = 6$$

Aufgabe T6.2

Lösung:

Schritt #1: Festlegen einer Reihenfolge bei Transformationen des Monoids $\boldsymbol{T}\left(\cdot = \circ, e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right)$

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt #2: Aufzählen aller Elemente von $\boldsymbol{T}$

$$\text{für jedes } t \in T: t = \prod_{i=1}^{n(t) \geq 1} s_i \text{, wobei } s_i \in \{\alpha, \beta\}$$

$n(t) = 1$	$t = s_1$
$n(t) = 2$	$t = s_1 \cdot s_2$
$n(t) = 3$	$t = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$
$n(t) \geq 4$	$t = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdots s_{n(t)}$

s_1	α	β

		s_2	
		α	β
s_1	α	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
	β	β	β

		$s_2 \cdot s_3$	
		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
s_1	α	e	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

		$s_2 \cdot s_3 \cdot s_4$
		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
s_1	α	β

QuickFact: d.h. keine neuen Elemente
(d.h. alle werden ausgeblendet)

$$T = \left\{\alpha, \quad \beta, \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e, \alpha^2\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Aufgabe T6.2

Lösung:

Schritt #3: Cayley-Graph

analog zur T6.1 - **Hausaufgabe**

Aufgabe T6.3: *Algebraische Strukturen: Monoid, Ring*

Beweisen Sie: Für jeden Ring $(R, +, \cdot)$ definiert $a * b = a + b - a \cdot b$ ein Monoid $(R, *, 0)$.

Aufgabe T6.3

Lösung:

Schritt #1: Assoziativität der inneren zweistelligen Verknüpfung $*$

$$\text{für jedes Tripel } (a,b,c) \in R \times R \times R \stackrel{\text{def}}{=} R^3 \; gilt:$$

$$\begin{aligned}
&(a*b)*c = \\
&(a+b-a\cdot b)*c \stackrel{\text{def}}{=} (a+b+(-a\cdot b))*c = \\
&(a+b-a\cdot b)+c-(a+b-a\cdot b)\cdot c = \\
&(a+b+(-a)\cdot b)+c+(a+b+(-a)\cdot b)\cdot(-c) = \\
&a+b+(-a)\cdot b+c+(a+b+(-a)\cdot b)\cdot(-c) = \\
&a+b+(-a)\cdot b+c+a\cdot(-c)+b\cdot(-c)+((-a)\cdot b)\cdot(-c) = \\
&a+b+a\cdot(-b)+c-a\cdot c+(-b)\cdot c-(a\cdot(-b))\cdot c = \\
&a+b-a\cdot b+c-a\cdot c-b\cdot c-a\cdot(-b)\cdot c = \\
&c+b-b\cdot c+a-a\cdot c-a\cdot b-a\cdot(-b)\cdot c = \\
&c+b-b\cdot c+a-a\cdot(c+b+(-b)\cdot c) = \\
&(b+c-b\cdot c)+a-a\cdot(b+c-b\cdot c) = \\
&a+(b*c)-a\cdot(b*c) = \\
&a*(b*c)
\end{aligned}$$

$*\,c \rightleftarrows a\,*$ Übergangsbereich

$\backslash begin\{proof\}$

Definition der Verknüpfung $*$

für jede $x,y \in (R,+,\cdot)$: $(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -(x\cdot y)$ aka $-x\cdot y$

Assoziativität der Verknüpfung $+$

Rechtsdistributivität von $\cdot$ über $+$

obige Eigenschaft

Assoziativität der Verknüpfung $\cdot$

Kommutativität von $+$

Linksdistributivität von $\cdot$ über $+$

obige Eigenschaften

obige Eigenschaften

$\backslash end\{proof\}$ aka $\backslash qed$

Hausaufgaben: beweist dies und das ☺

Schritt #2: Rechtsneutralität des Elements $0 \in (R,+)$ für jedes Element $a \in (R,*)$

$$\begin{aligned}
&a*0 = \\
&a+0-a\cdot 0 = \\
&a+0+0 = \\
&a+(0+0) = \\
&a+0 = \\
&a
\end{aligned}$$

$\backslash begin\{proof\}$

Definition der Verknüpfung $*$

für jedes $x \in (R,+,0,\cdot)$: $x\cdot 0 = 0\cdot x = 0$

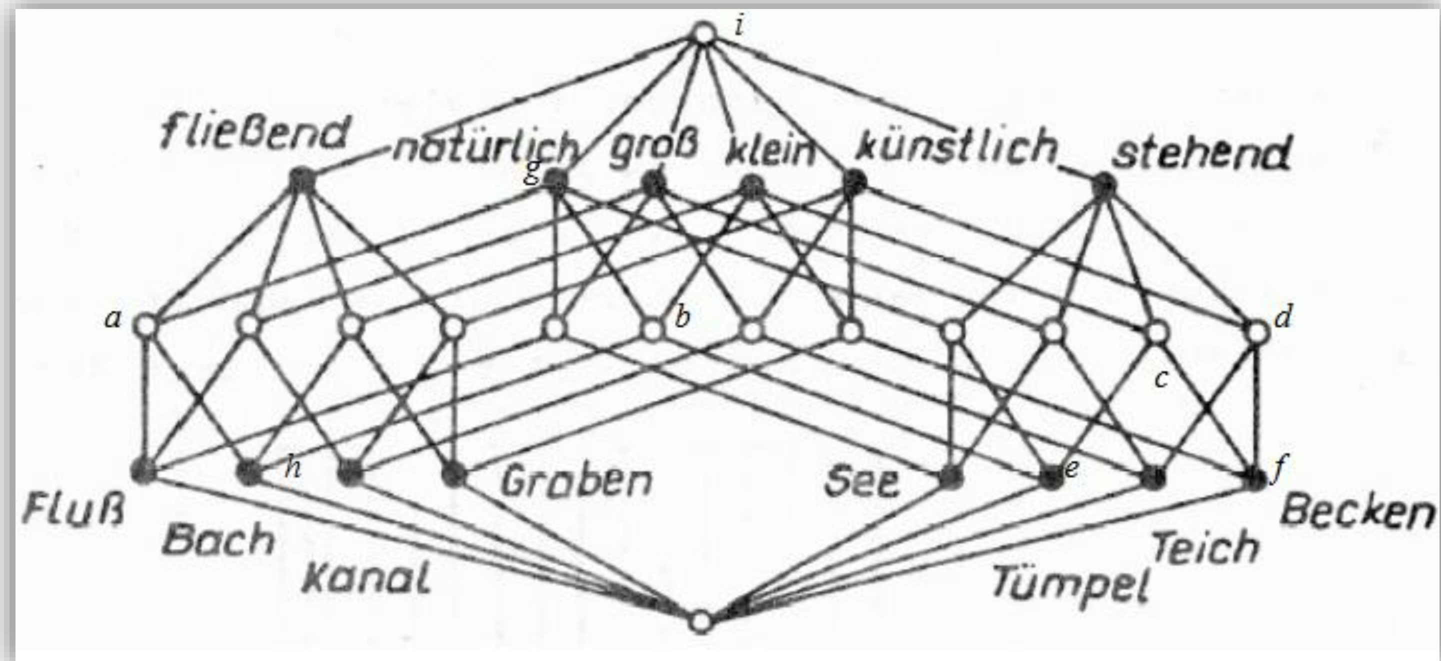
Assoziativität der Verknüpfung $+$ (aka Addition)

Neutralität des Elements 0 im $(R,+,0,\dots)$

$\backslash end\{proof\}$

Hausaufgabe: es muss noch auf Einhaltung der **Links**neutralität geprüft werden

Aufgabe T6.4: *Begriffsverband: Liniendiagramm*



(a) $a \wedge b$

(b) $c \wedge g$

(c) $a \vee b$

(d) $c \vee f$

(e) $b \vee d$

(f) $(a \vee e) \vee f$

Aufgabe T6.4

Lösung:

siehe http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs19_u06a4loesung.pdf