Aufgabenstellungen:
auch unten auf den Folien, vor jeweiligen Lösungen

Teil_04

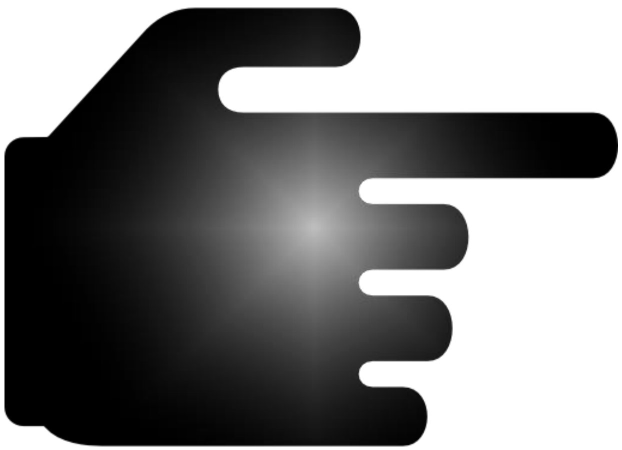
http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs20_u04.pdf

***Anwendungsbeispiele** zur heutigen Sitzung:*

Offtop: hier wird's fundierter erläutert

aussagenlogische Modallogik

Frohe Weihnachten ☺



***Leibniz⇢Gödels Gottesbeweis**, 1970*

Ax 1.	$\bullet\ \forall x\{[\varphi(x) \to \psi(x)] \wedge P(\varphi)] \to P(\Psi)$
Ax 2.	$P(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg P(\varphi)$
Th 1.	$P(\varphi) \to \Diamond \exists x\, [\varphi(x)]$
Df 1.	$G(x) \leftrightarrow \forall\varphi[P(\varphi) \to \varphi(x)]$
Ax 3.	$P(G)$
Th 2.	$\boxed{\Diamond \exists x\, G(x)}$
Df 2.	$\varphi \text{ ess } x \leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall\psi\{\psi(x) \to \bullet\ \forall x[\varphi(x) \to \psi(x)]\}$
Ax 4	$P(\varphi) \to \bullet\ P(\varphi)$
Th 3.	$G(x) \to G \text{ ess } x$
Df 3.	$E(x) \leftrightarrow \forall\varphi[\varphi \text{ ess } x \to \bullet \exists x\ \varphi(x)]$
Ax 5.	$P(E)$
Th 4.	$\boxed{\bullet\ \exists x\, G(x)}$

Offtop: l'esistenza di Dio

FunFact: es wird über **Prädikate quantifiziert** – Prädikatenkogik höherer Stufe

***Die Schlüsselbegriffe** der heutigen Sitzung:*

Kripke-Rahmen
Interpretation
Modell
Welt
notwendigerweise wahr
möglicherweise wahr

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe T4.1: *Prädikatenlogik – Modell*

Sei ∑ eine prädikatenlogische Signatur mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p.
Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F über ∑ an, so daß gilt: Eine Interpretation (D, I) ist genau dann ein Modell von F, wenn die Relation I(p) eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv) auf D ist.

Aufgabe T4.1

Lösung:

Schritt #1: Übersetzung der definierenden Kriterien einer Äquivalenzrelation in die Symbolsprache

Reflexivität	$\forall x\big(p(x,x)\big)$
Symmetrie	$\forall x \forall y\big(p(x,y) \longrightarrow p(y,x)\big)$
Transitivität	$\forall x \forall y \forall z\big(p(x,y) \land p(y,z) \longrightarrow p(x,z)\big)$

Schritt #2: Zusammensetzen der Formel für die Äquivalenzrelation

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{\forall x\big(p(x,x)\big) \land \forall x \forall y\big(p(x,y) \longrightarrow p(y,x)\big) \land \forall x \forall y \forall z\big(p(x,y) \land p(y,z) \longrightarrow p(x,z)\big)}$$

Hinweis: es genügt i.d.R. nicht, allein die Formel zu konstruieren – ein tatsächlicher Beweis wäre nötig, dass:

$\{p\}$ = **Σ-Struktur** $\langle D, I\rangle$ deren Modell ist
aka $\langle D, I\rangle \vDash F$
aka dass die Auswertung der Formel F in $\langle D, I\rangle$
für jede Variablenbelegung $v_{\langle D,I\rangle}: Var \rightarrowtail D$ den Wahrheitswert "**wahr**" (aka 1) liefert

Beispiel: laut der Definition, die Auswertung der Formel $\forall y\big(p(x,y) \longrightarrow p(y,x)\big)$ für die Variablenbelegung $v_{\langle D,I\rangle}$ ist gleich dem Wert „**wahr**" gdw. (aka genau dann wenn aka ⇔):

für alle Elemente (aka für jedes Element) d der Menge D (aka $d \in D$) stets gilt: es ist entweder **falsch**, dass das Element $v_{\langle D,I\rangle}(x)$ äquivalent zum Element d ist (sprich, dass $I(p)\big(v_{\langle D,I\rangle}(x), d\big)$) oder **wahr**, dass das Element d äquivalent zum Element $v_{\langle D,I\rangle}(x)$ ist (sprich, dass $I(p)\big(d, v_{\langle D,I\rangle}(x)\big)$)

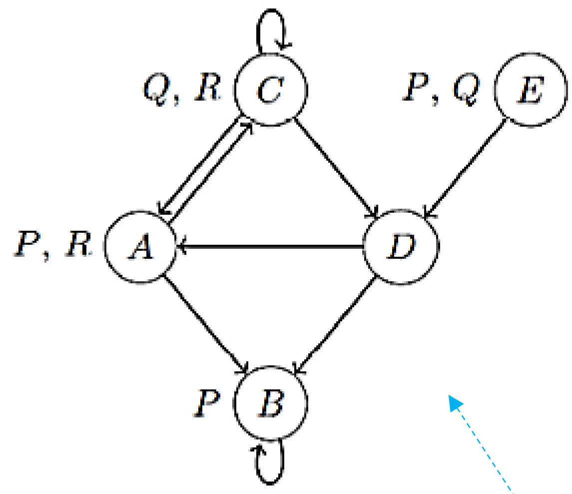
FunFact - Begrifflichkeiten: bei einigen Autoren, das Paar $\langle D, I\rangle$ nennt sich "eine ***Interpretation***", bei anderen - eine "***Struktur***", und noch bei anderen ☺ wäre das Tripel $\langle D, I, v\rangle$ "eine ***Interpretation***".

QuickFact: lasst euch nicht verwirren – der Ausdruck "ein Element a einer Menge A ist äquivalent zu einem (nicht unbedingt anderem) Element b der gleichen Menge A" macht Sinn und heißt bloß dass das geordnete Paar (a, b) ein Element der Äquivalenzrelation $I(p) \subseteq A \times A$ (kartesisches Quadrat der Menge A) ist.

Offtop: Große Konjunktion nur heute ☺ (am Abendhimmel)

Aufgabe T4.2: *Modallogik – Kripke-Frame mit Interpretation*

Eine Kripke-Struktur mit den Zuständen A, B, C, D, E und den aussagenlogischen Variablen P, Q, R sei durch das folgende Diagramm definiert:



Für welche Zustände liefern die folgenden modallogischen Formeln bei Auswertung in dieser Struktur jeweils den Wahrheitswert W (bzw. "true"): P, $\neg R$, $\Box P$, $\Diamond(P \wedge \neg Q)$?

FunFact: breites Anwendugsspektrum für Modellprüfer – zB bei reaktiven Systemen

Aufgabe T4.2

Lösung:

Hilfsformel	#	Formel	Wahrheit in der Welt A	B	C	D	E
ja	1	r	w		w		
nein	1.2	$\neg r$		w		w	w
jein	3	p	w	w			w
nein	3.4	$\Box p$		w		w	
ja	5	q					w
ja	5.6	$\neg q$	w	w	w	w	
ja	3,6.7	$p \wedge \neg q$	w	w			
nein	7.8	$\Diamond(p \wedge \neg q)$	w	w	w	w	

#	Ausgangswelt aka Betrachtungspunkt: $w \mapsto$	sichtbare aka zugängliche aka erreichbare Welten A	B	C	D	E
1	A		✓	✓		
2	B		✓			
2	C	✓		✓	✓	
4	D	✓	✓			
5	E				✓	