Aufgabenstellungen: *Teil_02* *http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs20_u02.pdf*

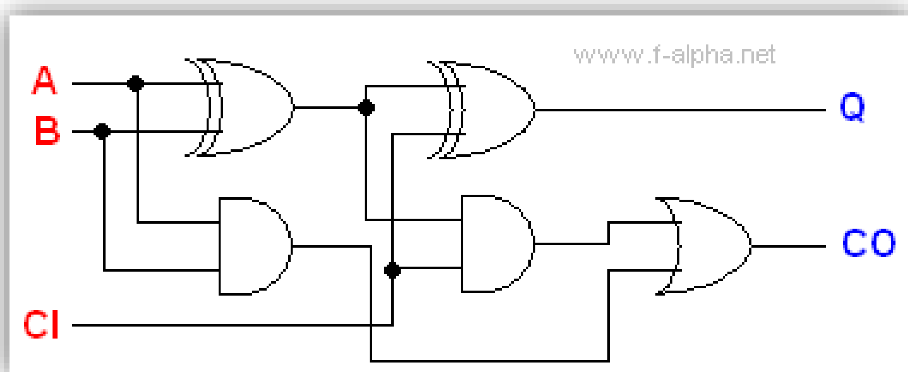
auch unten auf den Folien, vor jeweiligen Lösungen

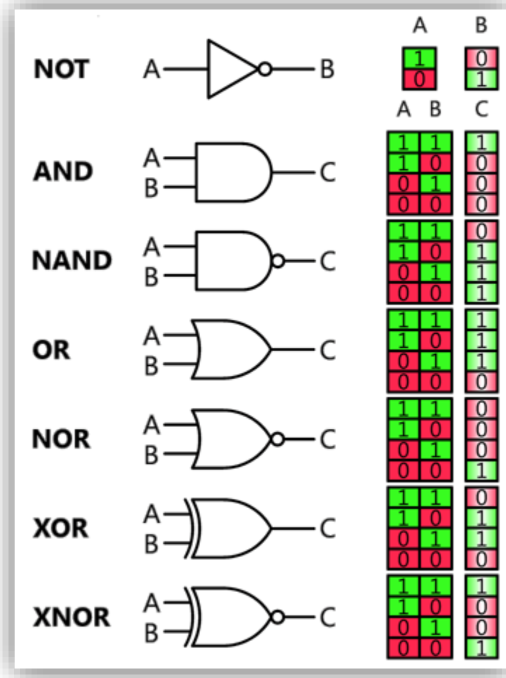
***Die Anwendungspalette** zur heutigen Sitzung [nicht **klausurrelevant** – lediglich zum Naschen für Neugierige ☺]:*

Aussagenlogik

Volladierer	***Gatter***

Quelle: Wiki





***Die Schlüsselbegriffe** der heutigen Sitzung:*

Resolutionskalkül

Boolesche Funktion

Shannon ☺

KNF

DNF

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe T2.1: *DNF & KNF*

Aufgabe 1

Erzeugen Sie von der folgenden Formel mittels Umformungsregeln oder Wahrheitstafel eine äquivalente Formel in DNF und KNF:

$$F = (\neg A \rightarrow B) \wedge ((A \wedge \neg C) \leftrightarrow B)$$

Aufgabe T2.1

Lösung:

Schritt #1: DNF und KNF durch Umformungsregeln

Analog zur Aufgabe T1.3 – gilt als **Hausaufgabe #1** (überprüft zusätzlich eure Ergebnisse auf Richtigkeit – erstellt und **vergleicht** eure Tabellen)

Schritt #2: DNF und KNF durch Wahrheitstafeln

Teilschritt #1: Erstellen der erweiterten Wahrheitstabelle

				Hilfsspalten				Klauseln für:	
Belegungs-#	A	B	C	$\neg A \longrightarrow B$	$A \wedge \neg C$	$(A \wedge \neg C) \leftrightarrow B$	F	DNF	KNF
1	0	0	0	0	0	1	0		$A \vee B \vee C$
2	0	0	1	0	0	1	0		$A \vee B \vee \neg C$
3	0	1	0	1	0	0	0		$A \vee \neg B \vee C$
4	0	1	1	1	0	0	0		$A \vee \neg B \vee \neg C$
5	1	0	0	1	1	0	0		$\neg A \vee B \vee C$
6	1	0	1	1	0	1	1	$A \wedge \neg B \wedge C$	
7	1	1	0	1	1	1	1	$A \wedge B \wedge \neg C$	
$\lvert\{0;1\}\rvert^{\lvert\{A,B,C\}\rvert}$	1	1	1	1	0	0	0		$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

Teilschritt #2: Zusammensetzen von je DNF und KNF

KDNF: $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$

KKNF: $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

Extra Hausaufgabe #2: zeigt die Äquivalenz von D und $D \vee (E \wedge D)$ mittels Umformungsregeln

Aufgabe T2.2: *Shannon-Formel & -Graph*

Aufgabe 2

Bilden Sie zu folgendem Ausdruck einen reduzierten Shannon-Graphen und geben Sie die dazu passende Shannon-Formel an:

$$(A \land B) \rightarrow (\neg C \lor D)$$

Aufgabe T2.2

FunFact: sh_A-Schachtelungseinheit

Hausaufgabe #3: warum?

Lösung:

Wahrheitstafel und die daraus folgende KKNF

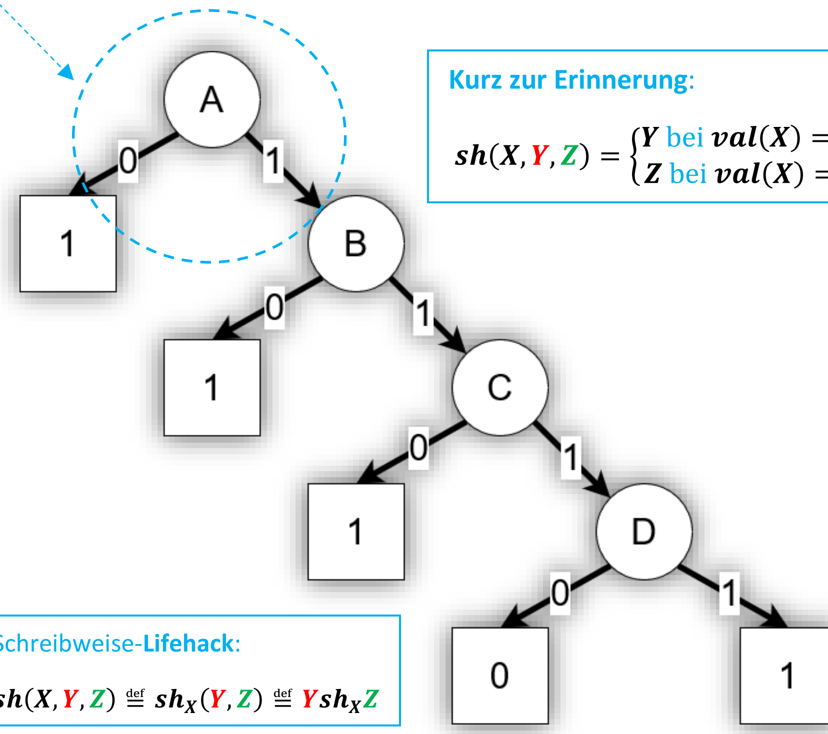
					Hilfsspalten		
#	A	B	C	D	$A \land B$	$\neg C \lor D$	F
1	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	0	1	1
3	0	0	1	0	0	0	1
4	0	0	1	1	0	1	1
5	0	1	0	0	0	1	1
6	0	1	0	1	0	1	1
7	0	1	1	0	0	0	1
8	0	1	1	1	0	1	1
9	1	0	0	0	0	1	1
10	1	0	0	1	0	1	1
11	1	0	1	0	0	0	1
12	1	0	1	1	0	1	1
13	1	1	0	0	1	1	1
14	1	1	0	1	1	1	1
15	1	1	1	0	1	0	0
2^4	1	1	1	1	1	1	1

KKNF: $\boxed{\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor D}$

FunFact: ist zugleich auch noch ne **DNF**

Sh-Formel und reduzierter Shannon-Graph

$$\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor D \iff \boldsymbol{sh}\Big(A, 1, \boldsymbol{sh}\big(B, 1, \boldsymbol{sh}(C, 1, \boxed{D})\big)\Big)$$



Kurz zur Erinnerung:

$$\boldsymbol{sh}(X, Y, Z) = \begin{cases} Y \text{ bei } \boldsymbol{val}(X) = 0 \\ Z \text{ bei } \boldsymbol{val}(X) = 1 \end{cases}$$

Schreibweise-**Lifehack**:

$$\boldsymbol{sh}(X, Y, Z) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{sh}_X(Y, Z) \overset{\text{def}}{=} Y\boldsymbol{sh}_X Z$$

Hausaufgabe #4: welchen Binärbaum kriegt man bei einer anderen Variablenordnung (der da oben hat die Ordnung $A < B < C < D$)?

Hausaufgabe #5: welchen Sh-Baum bekommt man aus der ursprünglichen Form der Formel (Ordnung: $C < A < D < B$)?

Aufgabe T2.3: *Boolesche Funktionen*

Aufgabe 3

Wie viele mögliche Boole'sche Funktionen gibt es, wenn n die Anzahl der Eingabeparameter ist? Leiten Sie einen Ausdruck zur Berechnung dieser Anzahl her und berechnen Sie die Anzahl möglicher Funktionen für $n \in \{1,2,3,4\}$!

Aufgabe T2.3

Lösung

Schritt #1: knappe Definition einer $\boldsymbol{n}$-stelligen Booleschen Funktion $\boldsymbol{f}$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n): \prod_1^n \{0;1\} \rightarrowtail \{0;1\}$$

Symbolerklärung: Mengenprodukt

$$\prod_1^n \{0;1\} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_{1 \le i \le n} \in \{0;1\}\}$$

Schritt #2: freundliche (in Bezug auf die abzählende Kombinatorik) Darstellung der Menge aller $\boldsymbol{n}$-stelligen Booleschen Funktionen

Da jede endliche Menge abzählbar ist, lässt sich die Menge aller Variablenbelegungen $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ **unabhängig von f** in eindeutiger Weise sortieren – zum Beispiel, **aufsteigend** im Sinne von n-stelligen Binärzahlen $x_1 x_2 \dots x_n$: von $00 \dots 0$ bis $11 \dots 1$ (siehe obige Wahrheitstafeln).

Sei $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ das k-Tupel der Werte von f (bei solcher aufsteigenden Sortierung) - dann:

$$\{f\} \stackrel{\text{def}}{=} \{(f_1, f_2, \dots, f_k): f_{1 \le j \le k} \in \{0;1\} \text{ und } k = |\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}|\} = \{(f_1, f_2, \dots, f_{|\{0;1\}|^n})\} = \{(f_1, f_2, \dots, f_{2^n})\}$$

Schritt #3: Aufzählen aller Elemente dieser Menge

Laut dem Fundamentalprinzip des Zählens (aka ***Produktregel*** *der Kombinatorik*):

$$|\{f\}| = |\{(f_1, f_2, \dots, f_{2^n})\}| = |\{0;1\}|^{2^n} = 2^{2^n}$$

Schritt #4: konkreter Fall $\boldsymbol{n = 4}$

Durch bloßes Einsetzen:

$$|\{f\}| = 2^{2^4} = 2^{16} = 10^{\log_{10} 2^{16}} = 10^{16 \cdot \log_{10} 2} = 10^{\frac{16}{\log_2 10}} = 10^{\frac{16}{3 + \log_{10} \frac{10}{8}}} = 5\text{-stellige Zahl}$$

Aufgabe T2.4: *Resolutionskalkül #1 – Allgemeingültigkeit vs. Unerfüllbarkeit*

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls die Allgemeingültigkeit der Formeln:

a) $(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge C) \vee A$

b) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Aufgabe T2.4

FunFact: NAND-Junktor/Gatter (aka $\overline{\wedge}$; dual zu ∧) kann **jeden** anderen ersetzen

QuickFact: der Satz ist auch ne Dualität von Tautologie und Antilogie aka Kontradiktion

Lösung: (a)

Schritt #1: Umwandeln in einen Unerfüllbarkeitstest für KNF

Laut dem direkt aus den Begriffsdefinitionen folgenden Zusammenhang „F ist Tautologie ⟺ $\neg F$ ist unerfüllbar" und wegen der ∧∨-***Dualität***:

FunFact: hier ein metasprachliches Zeichen

Offtop:
Schnörkelpfeil nach rechts (UTF-16-Kodierung: 0x21DD)
Bedeutung:"führt zu", "nächster Schritt ist"

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge C) \vee A \rightsquigarrow \boxed{(A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge \neg A}$$

Hausaufgabe #6: darf man direkt mit DNF-Klauseln resolvieren gehen ☺?

Wichtiger Hinweis: diese Formel heißt die ***Komplementierung*** der ursprünglichen Formel.

Die Komplementierung von DNF einer Formel F führt zu KNF deren Negierung $\neg F$

Schritt #2: Umwandeln in bequemere, **mengen**theoretische Form (aka Mengendarstellung): KNF als Klausel*menge*, Klauseln als Literal*menge*

$$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge \neg A \rightsquigarrow \boxed{\{\{A, B, \neg C\}, \{A, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{\neg A\}\}}$$

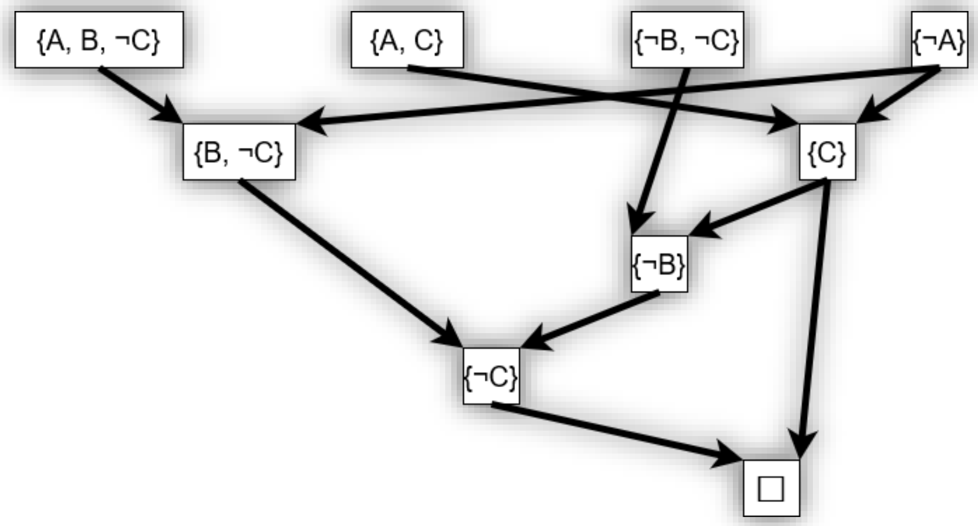
Vorsichtshinweis: niemals 2 Literale in einem Schritt resolvieren!

Hausaufgabe #7: wieso nicht?

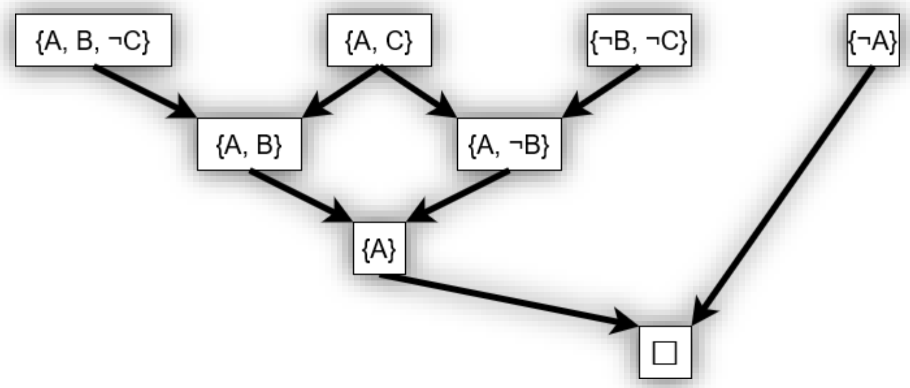
Aufgabe T2.4

Schritt #3: Erstellen des Resolutionsdiagramms (beide Versionen sind gleichermaßen gültig)

Version #1 „auf gut Glück" ☺ (etwas rechenzeitaufwendiger)



Version #G_{64} „Grahams Zahl ‚Schachbrett'" ☺



Aufgabe T2.4

Lösung: (b)

Analog zur Teilaufgabe (a) – gilt als **Hausaufgabe #8**

Aufgabe T2.5: *Resolutionskalkül #2 - Folgerung*

Aufgabe 5

Zeigen Sie mittels Resolutionsmethode, dass $\neg A \wedge B \wedge C$ eine Folgerung aus der Klauselmenge $F = \{\{A, B, \neg C\}, \{\neg A, B, \neg C\}, \{\neg A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg B, C\}\}$ ist.

Aufgabe T2.5

QuickFact: **Modell** der Formelsammlung $\mathbf{F}$ heißt $\boldsymbol{val(f)} = 1$ für jede $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F}$

Lösung

Schritt #1: Entzaubern des Begriffs „Folgerung"

$$\neg \boldsymbol{A} \land \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{C} \text{ ist eine Folgerung aus } \boldsymbol{F} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{F} \vDash \neg \boldsymbol{A} \land \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{C} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{val}(\neg \boldsymbol{A} \land \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{C}) = \mathbf{1} \text{ für jedes Modell von } \mathbf{F}$$

QuickFact: dieses Doppeldrehkreuz steht für "ist allgemeingültig" (semantische aka logische **Folgerung**)

Beweisidee: $X \longrightarrow Y \Leftrightarrow \neg(X \land \neg Y)$

Hausaufgabe #9-10: warum?

Schritt #2: Umwandeln in einen Unerfüllbarkeitstest für KNF

$$\boldsymbol{F} \vDash \neg \boldsymbol{A} \land \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{C} \implies \vDash \bigwedge_{|\boldsymbol{F}|} \boldsymbol{f_i} \longrightarrow (\neg \boldsymbol{A} \land \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{C}) \Leftrightarrow \vDash \neg \left(\bigwedge_{|\boldsymbol{F}|} \boldsymbol{f_i} \land \neg(\neg \boldsymbol{A} \land \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{C}) \right) \Leftrightarrow \nvDash \bigwedge_{|\boldsymbol{F}|} \boldsymbol{f_i} \land (\boldsymbol{A} \lor \neg \boldsymbol{B} \lor \neg \boldsymbol{C}) \Leftrightarrow \nvDash \mathbf{F} \cup \{\boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{B}, \neg \boldsymbol{C}\}$$

Und laut der Vollständigkeit des Resolutionskalküls:

$$\nvDash \mathbf{F} \cup \{\boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{B}, \neg \boldsymbol{C}\} \implies \mathbf{F} \cup \{\boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{B}, \neg \boldsymbol{C}\} \vdash \square$$

Schritt #3: Erstellen des Resolutionsdiagramms