

**Aufgabenstellungen:**  
auch unten auf den Folien, vor jeweiligen Lösungen

Teil\_01

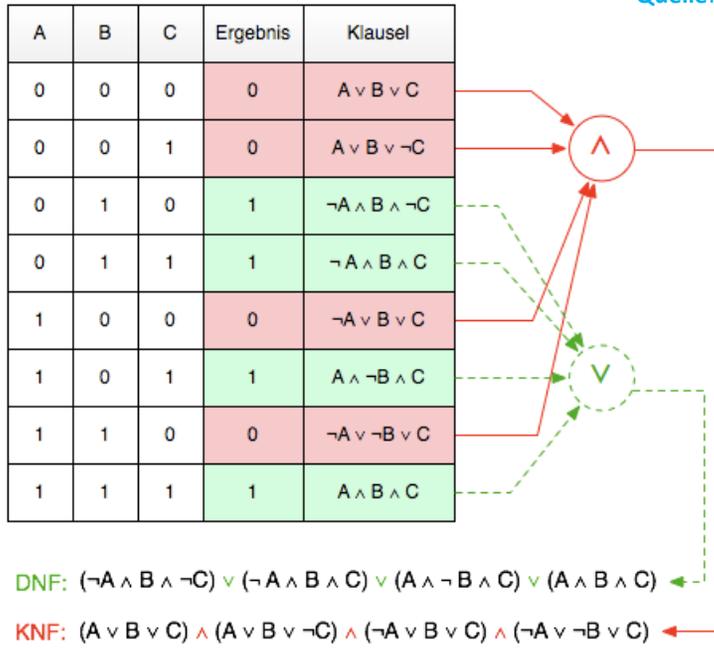
[http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs20\\_u01.pdf](http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs20_u01.pdf)

Die **Themenpalette** der heutigen Sitzung:

**Aussagenlogik**

Bildung von KKNF und KDNF

Quelle: Wikibooks



Wahrheitstafel



truth table (A or not (B implies C)) equivalent (B and C) =

| B | C | A | $B \wedge C \Leftrightarrow A \vee \neg(B \Rightarrow C)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T   |
| T | T | F | F   |
| T | F | T | F   |
| T | F | F | F   |
| F | T | T | F   |
| F | T | F | T   |
| F | F | T | F   |
| F | F | F | T   |

Die **Schlüsselbegriffe** der heutigen Sitzung:

Umformungsregel

Wahrheitstafel

Tautologie

KNF

DNF

## Inhaltsverzeichnis

|   |    |
|---|----|
| <b>Aufgabe T1.1:</b> <i>Übersetzung in die Symbolsprache / Vereinfachung von Formeln #1</i> ..... | 3  |
| <b>Lösung: (a)</b> .....  | 4  |
| <b>Lösung: (b)</b> .....  | 5  |
| <b>Aufgabe T1.2:</b> <i>Tautologie</i> .....  | 7  |
| <b>Lösung: (a)</b> .....  | 8  |
| <b>Lösung: (b)</b> .....  | 8  |
| <b>Aufgabe T1.3:</b> <i>DNF / KNF</i> .....   | 9  |
| <b>Lösung</b> .....   | 10 |
| <b>Aufgabe T1.4:</b> <i>Übersetzung in die Symbolsprache / Vereinfachung von Formeln #2</i> ..... | 11 |
| <b>Lösung</b> .....   | 12 |
| <b>Aufgabe T1.5:</b> <i>Äquivalenz der Formeln</i> .....  | 13 |
| <b>Lösung</b> .....   | 14 |

[Aufgabe T1.1](#): Übersetzung in die Symbolsprache / Vereinfachung von Formeln #1**Aufgabe 1**

Die Suche nach Jasons Goldenem Vlies führt Indiana Jones zu einem verborgenen Tempel. Der Öffnungsmechanismus des Eingangs wird von drei Hebeln gesteuert, die sich in der Wand befinden. Aus seinem Studium der griechischen Mythologie weiß Indiana Jones, dass er

- mindestens einen der Hebel ziehen muss,
- Hebel 1 nicht ziehen darf, wenn er nicht ebenfalls Hebel 2 oder Hebel 3 zieht,
- auf keinen Fall beide Hebel 1 und 3 ziehen darf,
- Hebel 2 und Hebel 3 entweder beide ziehen muss oder beide nicht ziehen darf.

(a) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf, die die Regeln für die Öffnung des Tempels beschreibt.

(b) Finden Sie die Hebelkonstellation, die zur Öffnung führt.

### Aufgabe T1.1

Lösung: (a)

Schritt #1: Umbenennen der Bausteine

| Symbol | Aussage                  |
|--------|--------------------------|
| $A$    | der Hebel 1 wird gezogen |
| $B$    | man zieht den Hebel 2    |
| $C$    | man zieht den Hebel 3    |

Schritt #2: Übersetzung der Regeln für die Öffnung des Tempels

| Namengebung | Formel  | Regel   |
|-------------|---|---|
| $G$         | $A \vee B \vee C$   | man zieht den Hebel 1 <b>oder</b> den Hebel 2 <b>oder</b> den Hebel 3   |
| $H$         | $\neg(B \vee C) \rightarrow \neg A$   | <b>wenn</b> der Hebel 2 <b>oder</b> der Hebel 3 <b>nicht</b> gezogen wird, <b>dann</b> wird der Hebel 1 <b>nicht</b> gezogen<br>ALTERNATIV<br>„wenn der Hebel 1 gezogen wird, dann wird der Hebel 2 oder der Hebel 3 gezogen“   |
| $I$         | $\neg(A \wedge C)$  | man zieht die beiden von den Hebeln 1 <b>und</b> 3 <b>nicht</b><br>ALTERNATIV<br>„wenn der Hebel 1 gezogen wird, dann wird der Hebel 3 nicht gezogen“<br>ALTERNATIV<br>„wenn der Hebel 3 gezogen wird, dann wird der Hebel 1 nicht gezogen“                               |
| $J$         | $(B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$<br>ALTERNATIV<br>$B \leftrightarrow C$ | man zieht entweder die beiden von den Hebeln 2 <b>und</b> 3 <b>oder</b> man zieht <b>keinen</b> von 2 <b>und</b> 3<br>ALTERNATIV<br>„wenn der Hebel 2 gezogen wird, dann wird der Hebel 3 gezogen<br>und<br>wenn der Hebel 3 gezogen wird, dann wird der Hebel 2 gezogen“ |

Schritt #3: Bilden der „Gesamtformel“  $F$ , die alle Regeln enthält

$$G \wedge H \wedge I \wedge J$$

**Hausaufgabe:** überprüft ob die 5 ausgeblendeten Aussagen wirklich **äquivalent** zu den jeweiligen eingeblendeten Aussagen sind

### Aufgabe T1.1

Lösung: (b)

Schritt #4: Vereinfachung von  $F$  anhand von Umformungsregeln

| #  | Umformungsregel                                   | Vereinfachungsschritt  |
|----|---|--|
| 0  | $\alpha$ aka Start                                | $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg(B \vee C) \rightarrow \neg A) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$   |
| 1  | <a href="#">Darstellung von Implikation</a>       | $(A \vee B \vee C) \wedge ((B \vee C) \vee \neg A) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$  |
| 2  | <a href="#">Assoziativgesetz</a>                  | $(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$<br>$(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$                       |
| 3  | <a href="#">Distributivgesetz</a>                 | $((B \vee C) \vee (A \wedge \neg A)) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$<br>$((B \vee C) \vee (A \wedge \neg A)) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$   |
| 4  | <a href="#">Satz vom Widerspruch</a>              | $((B \vee C) \vee \perp) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$<br>$((B \vee C) \vee \perp) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$   |
| 5  | <a href="#">Gesetze mit Falsch</a>                | $(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$<br>$(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$   |
| 6  | <a href="#">Distributivgesetz</a>                 | $(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee \neg B) \wedge ((B \wedge C) \vee \neg C)$<br>$(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee \neg B) \wedge ((B \wedge C) \vee \neg C)$   |
| 7  | <a href="#">Distributivgesetz</a>                 | $(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge (((B \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B)) \wedge ((B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg C)))$<br>$(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge (((B \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B)) \wedge ((B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg C)))$ |
| 8  | <a href="#">Satz vom ausgeschlossenen Dritten</a> | $(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge ((\top \wedge (C \vee \neg B)) \wedge ((B \vee \neg C) \wedge \top))$   |
| 9  | <a href="#">Gesetze mit Wahr</a>                  | $(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge (((C \vee \neg B)) \wedge ((B \vee \neg C)))$   |
| 10 | <a href="#">Assoziativgesetz</a>                  | $(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C)$<br>$(B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge C)) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C)$   |

**Aufgabe T1.1: Lösung (b)**

| #  | Umformungsregel  | Vereinfachungsschritt  |
|----|--|--|
| 11 | Die De <u>Morgansche Regel</u>   | $(B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C)$<br>$(B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C)$ |
| 12 | <u>Assoziativgesetz</u> / <u>Kommutativgesetz</u>                            | $(B \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B)$   |
| 13 | <u>Distributivgesetz</u>   | $(B \vee (C \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B)$<br>$B \vee (C \wedge \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B)$                 |
| 14 | <u>Satz vom Widerspruch</u>  | $B \vee \perp \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B)$<br>$B \vee \perp \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B)$   |
| 15 | <u>Gesetze mit Falsch</u>  | $B \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B)$<br>$B \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B)$   |
| 16 | <u>Assoziativgesetz</u> / <u>Kommutativgesetz</u> / <u>Distributivgesetz</u> | $((B \wedge C) \vee (B \wedge \neg B)) \wedge (\neg A \vee \neg C)$<br>$(B \wedge C) \vee (B \wedge \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C)$   |
| 17 | <u>Satz vom Widerspruch</u>  | $((B \wedge C) \vee \perp) \wedge (\neg A \vee \neg C)$<br>$(B \wedge C) \vee \perp \wedge (\neg A \vee \neg C)$   |
| 18 | <u>Gesetze mit Falsch</u>  | $B \wedge C \wedge (\neg A \vee \neg C)$<br>$B \wedge C \wedge (\neg A \vee \neg C)$   |
| 19 | <u>Distributivgesetz</u>   | $B \wedge ((C \wedge \neg A) \vee (C \wedge \neg C))$<br>$B \wedge ((C \wedge \neg A) \vee (C \wedge \neg C))$   |
| 20 | <u>Satz vom Widerspruch</u>  | $B \wedge ((C \wedge \neg A) \vee \perp)$<br>$B \wedge ((C \wedge \neg A) \vee \perp)$   |
| 21 | <u>Gesetze mit Falsch</u>  | $B \wedge (C \wedge \neg A)$<br>$B \wedge (C \wedge \neg A)$   |
| 22 | <u>Assoziativgesetz</u> / <u>Kommutativgesetz</u>                            | $\neg A \wedge B \wedge C$   |
|    | <b><math>\omega</math></b> aka End   | $\neg A \wedge B \wedge C$   |

Schritt #5: Rückübersetzung der Lösung

**Nur die Hebel 2 und 3 ziehen**

[Aufgabe T1.2: Tautologie](#)**Aufgabe 2**

Beweisen Sie, dass die folgenden Formeln Tautologien sind:

a)  $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

b)  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

**Aufgabe T1.2**

Lösung: (a)

Schritt #1: Erstellen der Wahrheitstafel

| A | B | C | $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \Leftrightarrow A \vee (B \wedge C)$ |
|---|---|---|--|
| T | T | T | T  |
| T | T | F | T  |
| T | F | T | T  |
| T | F | F | T  |
| F | T | T | T  |
| F | T | F | T  |
| F | F | T | T  |
| F | F | F | T  |

**Aufgabe T1.2**

Lösung: (b)

Schritt #1: Erstellen der Wahrheitstafel

| A | B | C | $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T   |
| T | T | F | T   |
| T | F | T | T   |
| T | F | F | T   |
| F | T | T | T   |
| F | T | F | T   |
| F | F | T | T   |
| F | F | F | T   |

**Wichtige Anmerkung:** i.d.R. kommen noch die **Hilfsspalten** (für die Teilformeln) vor die letzte Spalte – die erleichtern die schnelle Erstellung der Tabelle

[Aufgabe T1.3: DNF / KNF](#)**Aufgabe 3**

Bilden Sie zu dem folgenden Ausdruck die DNF und die KNF:

$$(A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge D$$

### Aufgabe T1.3

#### Lösung

Schritt #1: KNF (durch Umformungsregeln, d.h. man bekommt nicht unbedingt die **KKNF** aka kanonische KNF aka Konjunktion von [Maxtermen](#))

| # | Umformungsregel                             | Vereinfachungsschritt  |
|---|---|--|
| 0 | $\alpha$                                    | $(A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge D$   |
| 1 | <a href="#">Darstellung von Implikation</a> | $(\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge D$<br>$(\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge D$ |
| 2 | <a href="#">Assoziativgesetz</a>            | $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge D$   |
|   | $\omega$                                    | $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge D$   |

Schritt #2: DNF (durch Umformungsregeln, d.h. man bekommt nicht unbedingt die **KDNF** aka kanonische DNF aka Disjunktion von [Mintermen](#))

| # | Umformungsregel                             | Vereinfachungsschritt  |
|---|---|--|
| 0 | $\alpha$                                    | $(A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge D$   |
| 1 | <a href="#">Darstellung von Implikation</a> | $(\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge D$<br>$(\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge D$ |
| 2 | <a href="#">Assoziativgesetz</a>            | $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge D$   |
| 3 | <a href="#">Distributivgesetz</a>           | $(\neg A \wedge D) \vee (\neg B \wedge D) \vee (C \wedge D)$                         |
|   | $\omega$                                    | $(\neg A \wedge D) \vee (\neg B \wedge D) \vee (C \wedge D)$                         |

|                 |   |  |
|-----------------|---|--|
| Formale Systeme |   | Georg-August-Universität Göttingen<br>WiSe 20/21 |
| Übung #1        | Prof. Winfried Kurth / Alex Tavkhelidze |  |

[Aufgabe T1.4](#): Übersetzung in die Symbolsprache / Vereinfachung von Formeln #2

#### **Aufgabe 4**

"Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?" wurde ein Hundertjähriger gefragt. "Ich halte mich streng an die Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann esse ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an."

Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend. Können Sie ihn vereinfachen?

(Hinweis: Übersetzen Sie den Text in eine aussagenlogische Formel. Vereinfachen Sie die Formel durch Anwendung von Umformungsregeln.)

|                 |   |   |
|-----------------|---|---|
| Formale Systeme |   | Georg-August-Universität Göttingen<br><b>WiSe 20/21</b> |
| <b>Übung #1</b> | Prof. Winfried Kurth / Alex Tavkhelidze |   |

**Aufgabe T1.4**

[Lösung](#)

Analog zur [Aufgabe T1.1](#) – gilt als **Hausaufgabe**

Die folgende Lösung ist zu erwarten:

**Stets Bier und nicht Eiscreme und Fisch zusammen**

---

[Aufgabe T1.5: Äquivalenz der Formeln](#)**Aufgabe 5**

Man zeige sowohl durch Wahrheitstafeln als auch durch Anwendung von Umformungsregeln, dass  $((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C)))$  äquivalent ist zu  $(C \vee D)$ .

### Aufgabe T1.5

#### Lösung

#### Schritt #1: Äquivalenz durch Umformungsregeln

| # | Umformungsregel   | Vereinfachungsschritt  |
|---|---|--|
| 0 | $\alpha$  | $(A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C))$   |
| 1 | Die De <a href="#">Morgansche Regel</a> / <a href="#">Assoziativgesetz</a> / <a href="#">Kommutativgesetz</a> | $(A \vee \neg A \vee \neg B) \wedge (C \vee C \vee D)$<br>$(A \vee \neg A \vee \neg B) \wedge (C \vee C \vee D)$ |
| 2 | <a href="#">Satz vom ausgeschlossenen Dritten</a> / <a href="#">Idempotenzgesetze</a>                         | $(T \vee \neg B) \wedge (C \vee D)$<br>$(T \vee \neg B) \wedge (C \vee D)$                                       |
| 3 | <a href="#">Gesetze mit Wahr</a>  | $T \wedge (C \vee D)$<br>$T \wedge (C \vee D)$   |
| 4 | <a href="#">Gesetze mit Wahr</a>  | $(C \vee D)$   |
|   | $\omega$  | $C \vee D$   |

**Aufgabe T1.5: Lösung**

**Schritt #2: Äquivalenz durch Wahrheitstafeln**

| A | B | C | D | $(A \vee \neg (B \wedge A)) \wedge (C \vee D \vee C)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T   |
| T | T | T | F | T   |
| T | T | F | T | T   |
| T | T | F | F | F   |
| T | F | T | T | T   |
| T | F | T | F | T   |
| T | F | F | T | T   |
| T | F | F | F | F   |
| F | T | T | T | T   |
| F | T | T | F | T   |
| F | T | F | T | T   |
| F | T | F | F | F   |
| F | F | T | T | T   |
| F | F | T | F | T   |
| F | F | F | T | T   |
| F | F | F | F | F   |

| A | B | C | D | $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge (C \vee D)$ |
|---|---|---|---|--|
| T | T | T | T | T  |
| T | T | T | F | T  |
| T | T | F | T | T  |
| T | T | F | F | F  |
| T | F | T | T | T  |
| T | F | T | F | T  |
| T | F | F | T | T  |
| T | F | F | F | F  |
| F | T | T | T | T  |
| F | T | T | F | T  |
| F | T | F | T | T  |
| F | T | F | F | F  |
| F | F | T | T | T  |
| F | F | T | F | T  |
| F | F | F | T | T  |
| F | F | F | F | F  |