Übungsblatt 6/Aufgabe 4: **[ihr könnt direkt zur Lösung überspringen]**

Stichangaben:

1. wir haben einen **Verband**[1] (sogar einen **vollständigen {Begriffs}Verband**, aber dies gilt auch ohne Kontext, weil der endlich ist),
2. **der** durch den Graphen, und zwar durchs **Hasse-Diagramm**[2] (d.h. unser **Liniendiagramm**) veranschaulicht wird.

Etwas detaillierter über die **hervorgehobenen Begriffe**:

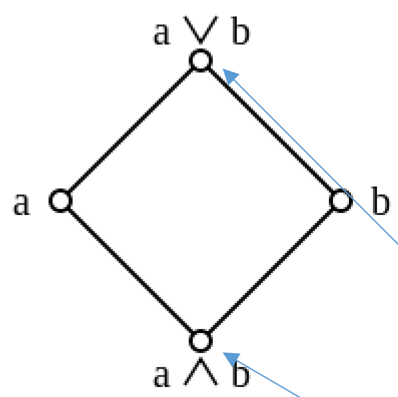
Verband[1] = analysierbar auf zweierlei Weise (algebraische Struktur, Ordnungsstruktur), 2 Verknüpfungen und deren Eigenschaften wie *Absorption, Kommutativität und Assoziativität* (**Idempotenz** wird von diesen abgeleitet).

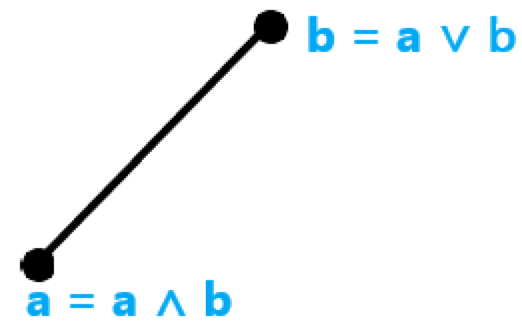
Hasse-Diagramm[2] = ein (von unten nach oben) gerichteter Graph, wird für die Veranschaulichung halbgeordneter (intuitiver gesagt – **partiell** geordneter) Mengen genutzt.

Knoten $\{a, b, \dots\}$ sind Elemente dieser Mengen,
Kanten $\{(a, b), \dots\}$ repräsentieren die Ordnung folgender Art (auch als „Striktordnung" bekannt):
wenn ein Element $\boldsymbol{b}$ beispielsweise *oberhalb* von einem anderen Element $\boldsymbol{a}$ steht *(siehe das Bild unten rechts)*, versehen mit der Kante dazwischen, dann bedeutet es:

$\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ (das heißt, $a \leq b$ und $a \neq b$) und
es gibt kein Element $\boldsymbol{c}$, so dass $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{b}$ gilt.

Hilfsmittel – einfache Navigationsschemas fürs Hasse-Diagramm:



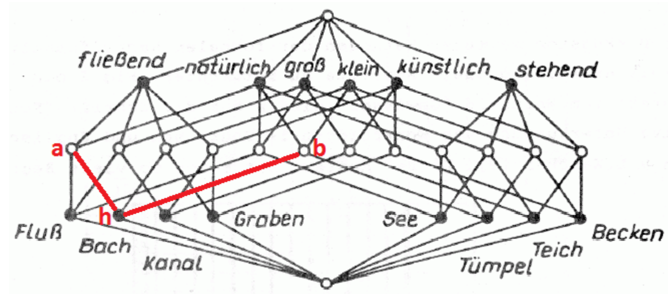


Erläuterungen:

1) Das untere Element (nennen wir es mal Element u) ist gleich $a \wedge b$, denn $u < a$ und $u < b$ und dabei existiert kein anderes Element c, das $u < c < a$ und $u < c < b$ erfüllt *(dies ist einfach die Kanteninterpretation bei Hasse-Diagrammen, wie auch oben erwähnt)*.
   Das ist aber genau die Definition von **Infimum** bei halbgeordneten Mengen. Deshalb gilt $\boldsymbol{u = inf\{a, b\} = a \wedge b}$.
2) *(Dual zum 1). Punkt)*: das obere Element (nennen wir es mal Element o) ist gleich $a \vee b$, weil $a < o$ und $b < o$ und dabei kein anderes Element c existiert, das $a < c < o$ und $b < c < o$ erfüllt.
   Das ist aber genau die Definition von **Supremum** bei halbgeordneten Mengen. Daher gilt $\boldsymbol{o = sup\{a, b\} = a \vee b}$.
3) *Grobe Faustregel*: ∧ deutet auf die Richtung **unten**, ∨ - **oben** *(beim Durchlauf eines Verbandes)*.

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN	**Formale Systeme** / Übungen	***WiSe 19/20***

Die Lösung fängt hier an:

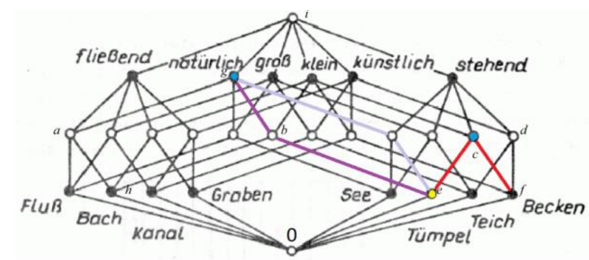
a) $a \wedge b = h$	Folgt direkt aus dem Fragment *(siehe rechts)*	Fragment: 

b) Analyse von $c \wedge g$:
*[also hier gibt's keine sofortige Antwort, weil c und g mit keiner Kante verbunden sind – deswegen braucht man eine etwas tiefere Analyse, die aber **viel einfacher** (als hier unten) **aussehen soll** – ich mache die Analyse viel detaillierter, damit ihr diese einfacher versteht]*

1. Solches Element existiert und ist eindeutig bestimmt – dies heißt, es gibt in unserem Netz (Diagramm) einen Knoten, der genau dieses Element darstellt. Man kann natürlich einen anderen Lösungsansatz einsetzten und beispielsweise dieses Element direkt berechnen *obwohl es einem nicht immer ohne Aufwand gelingt* – deswegen machen wir es lieber sicherer durchs Finden von diesem Element, während wir das Diagramm (genauer gesagt, uns interessierendes Fragment davon) stufenweise in eine bestimmte Richtung durchlaufen.
2. Da es sich hier um $\wedge$-Verknüpfung (engl. *meet*) handelt, ist dieser Knoten:
    a. Selbst c oder g – wenn diese mit einer Kante verbunden sind (kein Fall hier);
    b. **Unterhalb** von c und g – das impliziert die Verbindung direkt mit einer Kante oder indirekt mit einem Kantenzug, also **nicht einfach unten** ohne solche Verbindung.
    Dies bestimmt unsere Richtung beim Finden und vereinfacht das Verfahren, weil wir nur diese verbundenen Elemente betrachten und nicht alle, die in unteren Schichten (relativ zu c und g) unseres Diagramms sind.
    Solches Element werden wir auf jeden Fall finden, weil mindestens das unterste Element

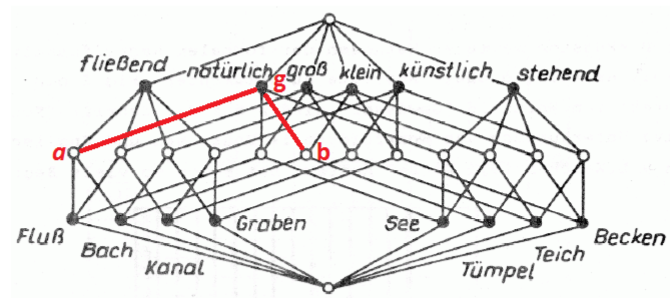
Weil wir einen Verband haben, und dessen Definition genau diese Existenz mit sich bringt.

Fragment:

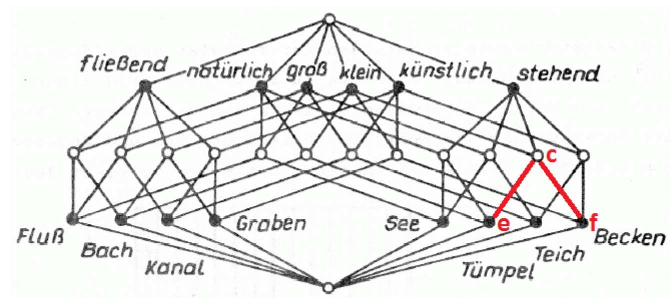


mit der Bezeichnung 0 (wir haben dies einfach so genannt) genau unterhalb von c und g liegt und ist mit denen jeweils mit einem Kantenzug verbunden. Aber da **die ∧-Verknüpfung** für unser Diagramm **durch Infimum definiert** wird, müssen wir das am höchsten liegende Element finden, das die gleichen Bedingungen relativ zu c und g erfüllt. 3. Da c in unserem Netz niedriger als g platziert ist, können wir direkt mit der ersten unter dem Element c liegenden Ebene anfangen. Hier befinden sich nur die Elemente e und f aus denen, die direkt mit dem Element c verbunden sind. Wenn eins von diesen beiden auch mit dem Element g durch einen Kantenzug verbunden ist (natürlich nicht mit einer Kante, weil g 2 Ebenen höher liegt), dann ist dieses Element unsere Antwort: a. Das Element f hat solche Verbindung mit g offensichtlich nicht – es fällt aus unseren Kandidaten daher weg. b. Das Element e hat aber genau solchen Kantenzug zu g (sogar zwei Kantenzüge, aber es reicht schon wenn‘s mindestens einen gibt). Das bringt uns die Antwort: $c \wedge g = e$		

0 bezeichnet einen Begriff mit dem Umfang (d.h. Extension) Ø (d.h. leere Menge von Gegenständen) – ***ACHTUNG***: der tiefste Begriff repräsentiert nicht in jedem Fall die leere Menge von Gegenständen, aber in diesem konkreten Beispiel - schon. Obwohl für die Lösung brauchen wir solche Einzelheiten nicht – **diese Fußnote dient ausschließlich als eine Randbemerkung**.

<table>
<tr>
<td>c) $a \vee b = g$</td>
<td>Aus dem Fragment</td>
<td>Fragment:


</td>
</tr>
</table>

d) $c \vee f = (e \vee f) \vee f =$ $= e \vee (f \vee f) =$ $= e \vee f =$ $= c$	Aus dem Fragment Assoziativität Idempotenz Aus dem Fragment	Fragment: 

<u>Tipp</u>: Lösungsansätze [ihr könnt diesen Teil überspringen - enthält nur extra Erläuterungen]

I Hier haben wir die Antwort (d.h. das Zielelement – Supremum von c und f) berechnet, durch die Nutzung von $\vee$-Eigenschaften in unserem Verband.
Dies ist ein Beispiel eines anderen Ansatzes zur Lösung. Dies scheint hier ganz kurz, präzis und attraktiv, aber in anderen Fällen sollte man die Schritte mit mehr Vorsicht und Aufwand formulieren – zum Beispiel, man darf hier die Distributivität nicht verwenden, weil dieser Verband nicht distributiv ist, obwohl für die konkreten Elemente, die sich in einem distributiven Unterverband dieses Verbandes befinden, solche Schritte sind zugelassen, allerdings muss man diese Zulässigkeit zuerst beweisen.

I I Natürlich könnte man auch hier das Zielelement finden (wie oben oder anhand von den Navigationschemas) und nicht so explizit algebraisch berechnen.

I I I Alternativ könnte man auch die Bedeutung unseres Verbandes nutzen *(d.h. dass es sich hier um einen ganz konkret berechenbaren* ***Begriffsverband*** *handelt)* und dadurch die Antwort finden - Skizze: $c \vee f = sup\{c, f\} = sup\{(Umfang_c, Inhalt_c), (Umfang_f, Inhalt_f)\} =$
$= \left((Umfang_c \cup Umfang_f)'', Inhalt_c \cap Inhalt_f\right) = ((\{Tümpel, Becken\})'', \{stehend, klein\}) = (\{Tümpel, Becken\}, \{stehend, klein\}) = c.$

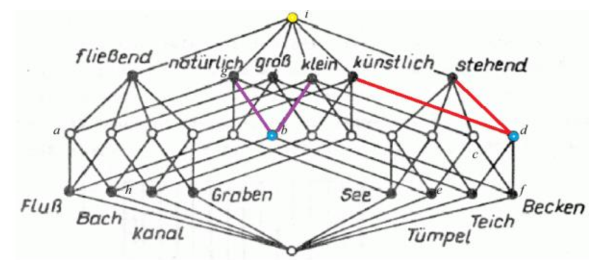
Also, diese 3 Lösungsansätze sind in jedem Fall einsatzbereit, und ihr könnt einfach wählen welchen Lösungsweg ihr nehmen wollt.

e) Analyse von $b \vee d$ [gleich wie oben]:

1. Solches Element existiert und zwar eindeutig – wir sollen es einfach in unserem Netz finden.
2. **Die Richtung ist <u>nach oben</u>** (d.h. zur Spitze des Diagramms, zum Element i), weil es sich um die $\vee$-Verknüpfung handelt, die das Supremum von b und d repräsentiert.
3. Wie man auf dem Bild (Fragment) sieht, liefert die erste höher (relativ zu b und d) liegende Ebene keine gemeinsamen Elemente, die sowohl mit b als auch mit d durch eine Kante verbunden sind. Diese Tatsache zwingt und dazu, das Diagramm weiter oben zu traversieren und zwar machen wir einen weiteren Schritt – betrachten die allerhöchste Ebene, weil wir schon zur Spitze gekommen sind und keine andere Möglichkeit haben. Hier befindet sich nur ein einziges Element i, das mit allen Elementen aus dem erstniedrigeren Niveau jeweils eine Kante teilt. Das liefert auch unsere Antwort:

$$b \vee d = i$$

Fragment:



i bezeichnet einen Begriff mit dem Umfang (d.h. Extension) $\{Fluß, Bach, Kanal, Graben, See, Tümpel, Teich, Becken\}$ (d.h. alle Gegenstände) – ***ACHTUNG***: im Gegensatz zum niedrigsten Element, repräsentiert der höchste Begriff in jedem Fall die Menge aller Gegenstände. <u>Obwohl für die Lösung brauchen wir diese Einzelheiten nicht</u> – **die Fußnote dient ausschließlich als eine Randbemerkung**.

f) Analyse von $(a \vee e) \vee f$:
[gleich wie oben, aber diese wird in 2 Teilen unterteilt – erst fürs Finden von $x = a \vee e$, anschließend – für $x \vee f$]

1. Immer wieder der gleiche erste Schritt – da es sich um einen Verband handelt, existiert ein solches Element und zwar eindeutig. Dies ist schon gesichert. Gehen wir weiter.
2. Die Richtung ist für die beiden Teile „oben“.
3. Wie uns das Fragment zeigt:
   a. ***Erster Teil ($x = a \vee e$)***: nur das Element g ist durch eine Kante (mindestens einen Kantenzug) mit dem Element a (Element e) verbunden. Dies heißt: $x = a \vee e = g$
   b. ***Zweite Hälfte ($x \vee f$)***: das Element f hat Kantenzüge nur zur Elementen *klein*, *künstlich* und *stehend*. Also nicht zum Element $x = g$ auf der gleichen Ebene.
   Deswegen müssen wir eine weitere Ebene betrachten, die aber die letzte ist, mit einem einzigen Element i, das sich mit jedem Element aus der unteren Nachbarebene verbindet. Daher auch die Antwort:
   $(a \vee e) \vee f = i$

Fragment: