GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN	**Formale Systeme** / Übungen	***WiSe 19/20***

Übungsblatt 3 / Aufgabe 6:

$$F = \forall z \exists y \big(p(x, g(y), z) \ \vee \ \neg \forall x q(x)\big) \quad \wedge \quad \neg \forall z \exists x \neg r(f(x, z), z)$$

$$F = \forall z \exists y \big(p(x, g(y), z) \ \vee \quad \boldsymbol{G} \quad \big) \quad \wedge \quad \boldsymbol{H}$$

1) Umformung von F in eine äquivalente Formel in ***Pränex-Normalform*** (*PNF*):

$F \equiv \forall z \exists y \big(p(x, g(y), z) \vee \exists x \neg q(x)\big) \wedge \exists z \neg \exists x \neg r(f(x, z), z)$	Negation nach innen schieben
$\equiv \forall z \exists y \big(p(x, g(y), z) \vee \exists x \neg q(x)\big) \wedge \exists z \forall x \neg \neg r(f(x, z), z)$	Negation nach innen schieben
$\equiv \forall z \exists y \big(p(x, g(y), z) \vee \exists x \neg q(x)\big) \wedge \exists z \forall x r(f(x, z), z)$	Doppelnegation
$\equiv \forall z \exists y \big(p(x, g(y), z) \vee \exists t \neg q(t)\big) \wedge \exists u \forall v r(f(v, u), u)$	Umbennenung gebundener Variablen (d.h. **Ersetzung** durch neue Variablen): **in *G***: x/t, **in H**: z/u und x/v
$\equiv \forall z \exists y \exists t \big(p(x, g(y), z) \vee \neg q(t)\big) \wedge \exists u \forall v r(f(v, u), u)$	Quantoren nach außen ziehen
$\equiv \exists u (\forall z \exists y \exists t \big(p(x, g(y), z) \vee \neg q(t)\big) \wedge \forall v r(f(v, u), u))$	Quantoren nach außen ziehen
$\equiv \exists u \forall v (\forall z \exists y \exists t \big(p(x, g(y), z) \vee \neg q(t)\big) \wedge r(f(v, u), u))$	Quantoren nach außen ziehen
$\equiv \exists u \forall v \forall z (\exists y \exists t \big(p(x, g(y), z) \vee \neg q(t)\big) \wedge r(f(v, u), u))$	Quantoren nach außen ziehen
$\equiv \exists u \forall v \forall z \exists y (\exists t \big(p(x, g(y), z) \vee \neg q(t)\big) \wedge r(f(v, u), u))$	Quantoren nach außen ziehen
$\equiv \exists u \forall v \forall z \exists y \exists t (\big(p(x, g(y), z) \vee \neg q(t)\big) \wedge r(f(v, u), u))$	Quantoren nach außen ziehen

Pränex-Normalform von F:

$$\exists u \forall v \forall z \exists y \exists t \big((p(x, g(y), z) \vee \neg q(t)) \wedge r(f(v, u), u)\big)$$

2) Weitere Umformung in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in ***Skolem-Normalform*** (*SNF*):

$$\equiv \forall x \exists u \forall v \forall z \exists y \exists t \big((p(x, g(y), z) \vee \neg q(t)) \wedge r(f(v,u), u) \big)$$

Allabschluß (betrifft jeweils **alle** **freien Variablen** – hier ist solche nur x)

$$\equiv^{*} \forall x \forall v \forall z \left((p(x, g(h(x,v,z)), z) \vee \neg q(i(x,v,z))) \wedge r\left(f(v, j(x)), j(x)\right)\right)$$

Skolemisierung (erfüllbarkeitsäquivalent)

Skolem-Normalform von F:

$$\forall x \forall v \forall z \left(\left(p\left(x, g\left(h(x,v,z)\right), z\right) \vee \neg q\left(i(x,v,z)\right)\right) \wedge r\left(f\left(v, j(x)\right), j(x)\right)\right)$$

Skolemisierungsweg:

Aus $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y\, Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m\, M$	Q_i **ist** $\exists$ **oder** $\forall$
mache $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m\, M[y/f(x_1 \ldots x_n)]$	$M[y/f(x_1 \ldots x_n)]$ bedeutet das Ergebnis der in M durchgeführten Ersetzung von y durch **eine neue Funktion** f. Die Argumenten dieser Funktion sind genau all die allquantifizierten Variablen (hier - $x_1 \ldots x_n$), in denen Bindungsbereich die Variable y lag. Wie man sieht, die Stelligkeit solcher Funktion ist gleich der **Anzahl** von allen allquantifizierten Variablen, die vor der zu ersetzenden existenzquantifizierten Variablen stehen: sollte keine allquantifizierten Variablen vor so einer zu ersetzenden Variablen stehen ***(die oben erwähnte Anzahl ist dann einfach* 0*)***, wird diese zu ersetzende Variable durch eine neue 0-stellige Funktion (anders gesagt – **durch eine neue Konstante**) ersetzt.
wiederhole, bis alle $\exists$ eliminiert	