Formale Systeme

Vorlesung: Winfried Kurth

Übung: Aleksi Tavkhelidze

Lehrstuhl Computergrafik und ökologische Informatik
Büsgenweg 4, Raum 0.116 bzw. 0.125 (1. Stock)
Tel. 39-9715
wk<at>informatik.uni-goettingen.de
http://www.uni-goettingen.de/de/72781.html

Hausaufgaben zur Übung: Bearbeitung der Übungsblätter ist freiwillig. Die Lösungen werden in der darauffolgenden Übung besprochen. Der Stoff der Übungen ist prüfungsrelevant.

Hinweise zur Lehrveranstaltung und Web-Links:

http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs17_home.htm

Quellenangaben unter
http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs10_lit.htm

Inhaltsübersicht:

Prüfung: Abschlussklausur (90 Min.)

1. Logik

Geschichte:

erste Ansätze bei Aristoteles, Leibniz

Gottlob Frege (Ende 19. Jh.)
um 1900 Grundlagenkrise der Mathematik, löste verstärktes Interesse an Logik aus
1920 David Hilbert: "Hilbertsches Programm" – Forderung, die Mathematik als widerspruchsfrei nachzuweisen
1930 Kurt Gödel: Unvollständigkeitssätze
1963 Paul Cohen: Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und der Kontinuumshypothese

Zielsetzung der math. Logik: Untersuchung der Grundlagen der Mathematik
Voraussetzung: es gibt ein "mathematisches Universum" – *Hintergrundmathematik* (z.B. Mengen, Relationen, Funktionen, Beweismethoden...)
in der Logik zu entwerfende formale Mathematik: *Objektmathematik* – eine Imitation der Hintergrundmathematik, so formuliert, dass eine Maschine sie verstehen und mathematisch argumentieren kann.
Anwendungen: automatisches Beweisen von Theoremen, Wissensrepräsentation, Schlussfolgern auf Grundlage einer Wissensbasis, Auffinden von Gesetzmäßigkeiten in Daten, Auffinden von Widersprüchen, Modelle von Systemen

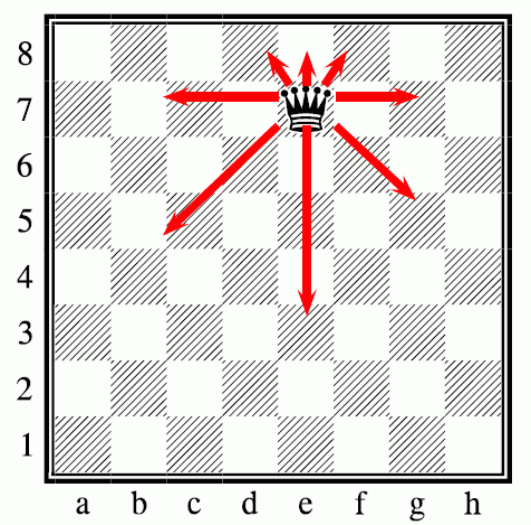
elementarste Variante der Logik:

Aussagenlogik

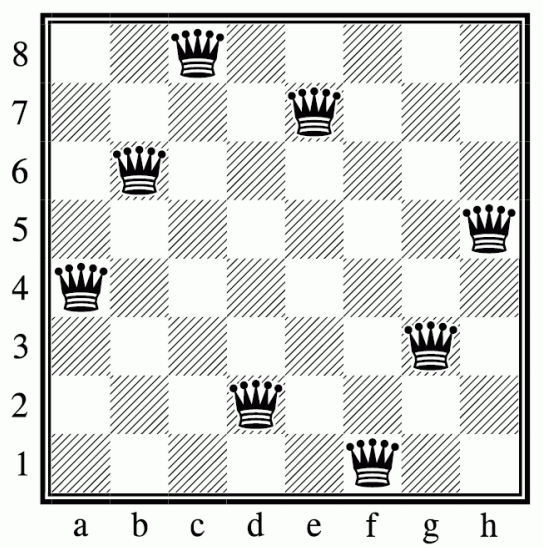
gleich ein Anwendungsbeispiel:
Das 8-Damen-Problem

Man plaziere 8 Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

Bewegungs- (Bedrohungs-) möglichkeiten der Dame im Schach:



Eine Lösung des 8-Damen-Problems:



aussagenlogische Codierung des Problems:

boolesche Variable $D_{i,j}$ = *wahr*, falls eine Dame auf Feld (*i*, *j*) steht, sonst *falsch* (benutze Zahlen statt Buchstaben fürs Schachbrett)

Bedingungen für Plazierung:
Dame auf Feld (1, 1) bedroht bestimmte Felder:

$$D_{1,1} \rightarrow \neg D_{1,2} \wedge \neg D_{1,3} \wedge \neg D_{1,4} \wedge \neg D_{1,5} \wedge \neg D_{1,6} \wedge \neg D_{1,7} \wedge \neg D_{1,8}$$
$$D_{1,1} \rightarrow \neg D_{2,1} \wedge \neg D_{3,1} \wedge \neg D_{4,1} \wedge \neg D_{5,1} \wedge \neg D_{6,1} \wedge \neg D_{7,1} \wedge \neg D_{8,1}$$
$$D_{1,1} \rightarrow \neg D_{2,2} \wedge \neg D_{3,3} \wedge \neg D_{4,4} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{8,8}$$

für Feld (5, 7):

$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{5,8} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$
$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{1,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{8,7}$$
$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{6,8} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3}$$
$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,8} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}$$

Für jedes Feld (*i*, *j*) sei $FE_{i,j}$ die Konjunktion der Formeln, die die Einschränkungen für dieses Feld beschreiben.

Zusätzliche Bedingung: für genau 8 Felder (*i*, *j*) soll $D_{i,j}$ wahr sein. Gleichwertig: für jedes *k*, *k* = 1, ..., 8, soll R_k wahr sein:

$$D_{1,k} \vee D_{2,k} \vee D_{3,k} \vee D_{4,k} \vee D_{5,k} \vee D_{6,k} \vee D_{7,k} \vee D_{8,k}$$

Lösung des Problems:
finde Belegung aller 64 Variablen $D_{i,j}$ so, dass alle Formeln $FE_{i,j}$ und R_k wahr werden (*Erfüllbarkeitsproblem*).

Vokabular der Aussagenlogik (Objektmathematik)

Logische Zeichen

1	Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
0	Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
$\neg$	Negationssymbol („nicht“)
$\wedge$	Konjunktionssymbol („und“)
$\vee$	Disjunktionssymbol („oder“)
$\rightarrow$	Implikationssymbol („wenn . . . dann“)
$\leftrightarrow$	Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
(,)	die beiden Klammern

Signatur

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge Σ von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \ldots\}.$$

Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Aussagenlogische Formeln:

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der *Formeln über* Σ (oder der *Aussagen über* Σ) induktiv definiert durch

1. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in For0_\Sigma$, $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
2. Mit A, B sind auch

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$$

Elemente von $For0_\Sigma$

Wir nennen die Sonderzeichen mit Ausnahme der Klammern auch die *logischen Operatoren*, unter ihnen $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ die *logischen Konstanten*. Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Wenn klar ist, um welches Σ es sich handelt, schreiben wir oft einfach $For0$ statt $For0_\Sigma$.

Beweisprinzip der *strukturellen Induktion*:

Gilt für eine Eigenschaft Eig

1. $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ und jedes Atom $p \in \Sigma$ haben die Eigenschaft Eig
2. Für beliebige $A, B \in For0_\Sigma$:
   - Hat A die Eigenschaft Eig, dann auch $\neg A$.
   - Haben A, B die Eigenschaft Eig, dann auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$.

dann gilt Eig für alle $A \in For0_\Sigma$.

Man nennt die *strukturelle Induktion* auch Induktion nach dem Aufbau der Formeln.

Variante: Definition einer Funktion auf der Menge der Formeln

Ist eine Funktion f

1. eindeutig definiert auf $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ und den Atomen.
2. sind $f(\neg A)$, $f((A \wedge B))$, $f((A \vee b))$, $f((A \rightarrow B))$, $f((A \leftrightarrow B))$ eindeutig definiert unter der Annahme, es seien $f(A)$, $f(B)$ schon definiert

dann ist f auf der gesamten Menge $For0_\Sigma$ eindeutig definiert.

Teilformeln:

Eine *Teilformel* einer Formel *A* ist ein Teilwort von *A*, welches Formel ist.

Abkürzungen

1. Ganz außen stehende Klammern in einer Formel dürfen weggelassen werden.

2. Klammern dürfen weggelassen werden gemäß der Prioritätsregel: $\wedge$, $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. (Achtung: nach Def. . ist $\neg A \wedge B$ immer als $(\neg A \wedge B)$ und nicht als $\neg(A \wedge B)$ zu lesen, da zu $\neg$ keine Klammern gehören.)

Wegen der Assoziativgesetze für $\wedge$ und $\vee$ können wir für $A \wedge (B \wedge C)$ oder $(A \wedge B) \wedge C$ kurz $A \wedge B \wedge C$ schreiben, entsprechend $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, entsprechend $A_1 \vee \ldots \vee A_n$. Wir sprechen von Konjunktionen bzw. Disjunktionen.

Semantik der Aussagenlogik

Wahrheitswerte

Für alles Folgende seien zwei feste, ansonsten beliebige Objekte $\mathbf{W}, \mathbf{F}$ ausgezeichnet, die wir die beiden *Wahrheitswerte* nennen. (Vorausgesetzt wird nur, daß beide voneinander verschieden sind.)

Interpretation

Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Eine Interpretation über Σ ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \rightarrow \{W, F\}.$$

Auswertung

Zu jedem I über Σ wird eine zugehörige Auswertung der Formeln über Σ definiert

$$val_I : For0_\Sigma \to \{W, F\}$$

mit:

$$\begin{aligned} val_I(\mathbf{1}) &= W \\ val_I(\mathbf{0}) &= F \\ val_I(P) &= I(P) \qquad \text{für jedes } P \in \Sigma \end{aligned}$$

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} F & \text{falls } val_I(A) = W \\ W & \text{falls } val_I(A) = F \end{cases}$$

val_I auf $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ wird gemäß der folgenden Tabelle berechnet

$val_I(A), val_I(B)$	$val_I(C)$ für $C =$ $A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
W,W	W	W	W	W
W,F	F	W	F	F
F,W	F	W	W	F
F,F	F	F	W	W

Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

1. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
2. $\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
3. $\neg(A \vee B) \to (A \vee B)$
4. $(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$
5. $(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$

Beispiel

Bei der Auswertung einer Formel werden der Übersichtlichkeit halber die Werte der Teilformeln mitnotiert.

$$\Sigma = \{P, Q, R\}$$

$$I : I(P) = \mathbf{W}, I(Q) = \mathbf{F}, I(R) = \mathbf{W}.$$

Wir berechnen $val_I((P \wedge \neg R) \rightarrow \neg(R \vee Q))$

P	Q	R	$\neg R$	$(P \wedge \neg R)$	$(R \vee Q)$	$\neg(R \vee Q)$	$(P \wedge \neg R) \rightarrow \neg(R \vee Q)$
W	**F**	**W**	**F**	F	**W**	**F**	**W**

Boolesche Funktionen

Eine *Boole'sche Funktion* ist eine Funktion von $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ nach $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$, für ein $n \in \mathbb{N}$. ($\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.) Ist n die Anzahl der in einer Formel A auftretenden Atome, und legt man für diese eine *bestimmte Reihenfolge* fest – identifiziert sie also mit Argumentstellen –, so liefert die Wahrheitstafel von A eine Boole'sche Funktion $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$. Es ist bekannt (leichte *Übung*), daß sich umgekehrt auch *jede* Boole'sche Funktion als Wahrheitstafel einer Formel in dieser Weise erhalten läßt.

Modell, Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit

- Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- Zu einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt allgemeingültig
  gdw
  $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt erfüllbar
  gdw
  es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Es gilt

A erfüllbar $\Leftrightarrow \neg A$ nicht allgemeingültig,
A allgemeingültig $\Leftrightarrow \neg A$ nicht erfüllbar.

Man nennt die allgemeingültigen Formeln auch *Tautologien*. (Erst in der Prädikatenlogik werden beide Begriffe differieren.)

Beispiele allgemeingültiger Formeln

$A \to A$	Selbstimplikation
$\neg A \vee A$	Tertium non datur
$A \to (B \to A)$	Abschwächung
$\mathbf{0} \to A$	Ex falso quodlibet
$A \wedge A \leftrightarrow A$	Idempotenz
$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	Absorption
$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität
$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow$	
$((A \to B) \to (A \to C))$	Verteilen
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	De Morgan
$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	De Morgan

Semantischer Folgerungsbegriff:

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For0_\Sigma$, $A, B \in For0_\Sigma$.

- $M \models A$ lies: aus M folgt A
  gdw
  Jedes Modell von M ist auch Modell von A.
- $A, B \in For0_\Sigma$ heißen logisch äquivalent
  gdw
  $A \models_\Sigma B$ und $B \models_\Sigma A$

Einfache Sätze:

- A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar
- $A \models B$ gdw $\models A \rightarrow B$
- $M \cup \{A\} \models B$ gdw $M \models A \rightarrow B$
- A, B sind logisch äquivalent gdw $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig

zum letztgenannten Satz:

Zwei Formeln A, B sind logisch äquivalent genau dann, wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Beweis A, B logisch äquivalent
$\Leftrightarrow val_I(A) = val_I(B)$ für alle Interpretationen I (über Σ)
(d. h. A und B haben dieselben Modelle)
$\Leftrightarrow \models_\Sigma A \leftrightarrow B$
$\Leftrightarrow A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig.

Satz:

Logische Äquivalenz ist bezüglich der aussagenlogischen Operatoren eine Kongruenzrelation auf $For0_\Sigma$. Insbesondere gilt für beliebige $A \in For0_\Sigma$

A allgemeingültig $\Leftrightarrow$ A logisch äquivalent zu $\mathbf{1}$
A unerfüllbar $\Leftrightarrow$ A logisch äquivalent zu $\mathbf{0}$.

Def. "Interpolante":

Seien A,B aussagenlogische Formeln, so daß $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist. Eine Formel C heißt eine *Interpolante* von $A \rightarrow B$, falls

1. $A \rightarrow C$ und $C \rightarrow B$ Tautologien sind und
2. in C nur solche aussagenlogischen Atome $P \in \Sigma$ vorkommen, die sowohl in A als auch in B vorkommen.
   An eventuelle Vorkommen von $\mathbf{1}$ und $\mathbf{0}$ in C werden keinerlei Einschränkungen gemacht.

Satz (*Craigsches Interpolationslemma*):
Es seien A und B zwei aussagenlogische Formeln und $A \rightarrow B$ sei eine Tautologie. Dann existiert zu A und B eine Interpolante.

(Beweis siehe Schmitt 2008.)

Disjunktive und konjunktive Normalform

Definitionen:

- Ein Literal ist ein Atom oder ein negiertes Atom
- Eine Formel ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn sie Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.
- Eine Formel ist in konjunktiver Normalform (KNF), wenn sie Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

Sätze:

1. Zu jeder aussagenlogischen Formel A gibt es eine logisch äquivalente in disjunktiver Normalform und ebenso eine logisch äquivalente in konjunktiver Normalform.
2. Die Algorithmen zur Herstellung beider Normalformen ergeben sich unmittelbar aus elementaren Tautologien.
3. Ist die Wahrheitstafel einer Formel gegeben, so lassen sich disjunktive und konjunktive Normalform aus dieser „direkt“ ablesen.
4. Disjunktive und konjunktive Normalform einer Formel sind nicht eindeutig.

Beispiel zur exponentiellen Länge einer KNF:

Um zu prüfen, ob

$$A_n = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge \ldots \wedge (\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,2})$$

eine Tautologie ist, wird die Unerfüllbarkeit von

$$\neg A_n \quad = \quad (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \ldots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

geprüft. Die konjunktive Normalform von $\neg A_n$ ist:

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \ldots \vee P_{n,f(n)} \mid f : 1, \ldots, n \to 1, 2\}.$$

Für $n = 3$ ist das:

$$\begin{array}{l}(P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\ (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \wedge \\ (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\ (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2})\end{array}$$

In $\neg A_n$ treten $2 * n$ Literale auf, in der KNF $n * 2^n$.

Jedoch: mit Einführung von Hilfsatomen in die Formel lässt sich immer eine äquivalente "kurze KNF" (kknf) konstruieren.

Zu jeder aussagenlogischen Formel A mit n Literalvorkommen gibt es eine konjunktive Normalform A_{kknf}, so dass

- *A ist erfüllbar gdw A_{kknf} erfüllbar ist,*
- *A_{kknf} enthält höchstens $c * n$ Literalvorkommen für eine von n unabhängige Konstante c,*

A_{kknf} kann effektiv aus A in linearer Zeit konstruiert werden. (siehe Schmitt 2008, S. 30ff.)

Shannonsche Normalform

eine graphbasierte Normalform, die auf Shannon 1938, Church 1956 und Bryant 1986 zurückgeht

Shannon-Formeln:

Shannon Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Der Wahrheitswerteverlauf von *sh* wird gegeben durch

$$sh(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} P_2 & \text{falls} \quad P_1 = 0 \\ P_3 & \text{falls} \quad P_1 = 1 \end{cases}$$

oder in Tabellenform:

P_1	1	1	1	1	0	0	0	0
P_2	1	1	0	0	**1**	**1**	**0**	**0**
P_3	**1**	**0**	**1**	**0**	1	0	1	0
$sh(P_1, P_2, P_3)$	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**

Eigenschaften des *sh*-Operators:

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
- $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
- $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$
- $sh(P_1, P_2, P_2) \leftrightarrow P_2$
- $sh(sh(P_1, P_2, P_3), P_4, P_5) \quad \leftrightarrow$
  $sh(P_1, sh(P_2, P_4, P_5), sh(P_3, P_4, P_5))$
- $A \leftrightarrow sh(P, A_{P=0}, A_{P=1})$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
   - A und B normierte *sh*-Formeln sind und
   - für jede in A oder B vorkommende Aussagenvariable P_j gilt $j > i$.

Theorem

Zu jeder aussagenlogischen Formel A gibt es eine äquivalente normierte sh-Formel B.

Beweis: Induktion nach der Anzahl n der in A vorkommenden Aussagevariablen.

Für $n = 0$ kann A logisch äquivalent auf eine der Konstanten 0 oder 1 reduziert werden. Konstanten sind normierte *sh*-Formeln.

Im Induktionsschritt wählen wir die in A vorkommende Aussagevariable P_i mit dem kleinsten Index. Mit A_0 bezeichnen wir die Formel, die aus A entsteht, indem jedes Vorkommen von P_i durch 0 ersetzt wird. Entsprechend wird A_1 gebildet. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es normierte *sh*-Formeln B_0, B_1, die logisch äquivalent (siehe Def. 2.16) sind zu A_0, A_1. Offensichtlich ist A äquvalent zu $sh(P_i, B_0, B_1)$, und $sh(P_i, B_0, B_1)$ ist eine normierte *sh*-Formel.

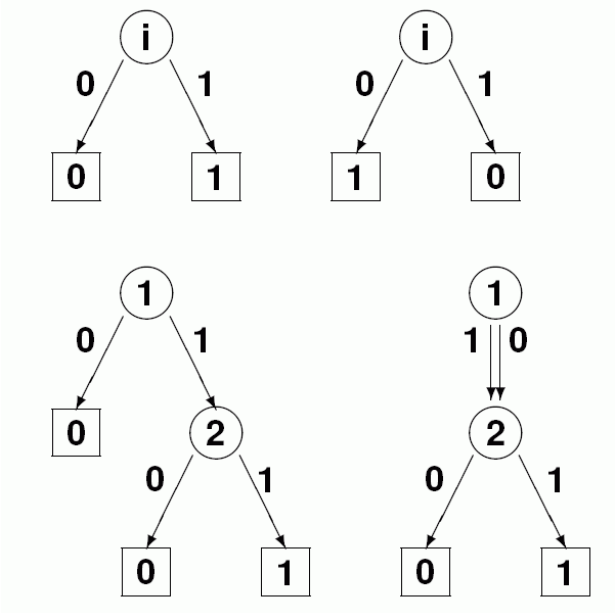
Definition "Shannon-Graph":

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

- Jedem nichtterminalen Knoten v ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet.
- Von jedem nichtterminalen Knoten v gehen zwei Kanten aus. Eine davon ist mit 0, die andere mit 1 gekennzeichnet.
- Jedem terminalen Knoten v ist eine der Zahlen 0 oder 1 zugeordnet, bezeichnet mit $wert(v)$.
- Ist der nichtterminale Knoten w ein unmittelbarer Nachfolger von v, dann gilt $index(v) < index(w)$.
- Es gibt genau einen Wurzelknoten.

beachte: jeder Shannon-Graph ist azyklisch.

Beispiele für Shannon-Graphen:



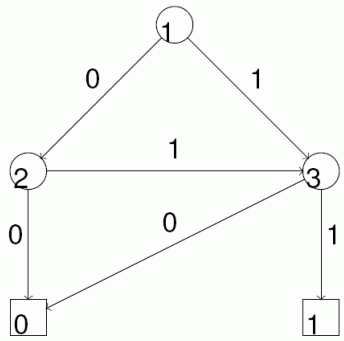
Es gibt eine offensichtliche Entsprechung zwischen Shannon-Graphen und normierten Shannon-Formeln:
n-te Variable entspricht den Knoten mit Index *n*.

Shannon-Graphen und boolesche Funktionen:

- Jedem *sh*-Graphen G kann man eine m-stellige Boolesche Funktion f_G zuordnen, wobei m die Anzahl der in G vorkommenden verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_m$ ist.
- Wir fassen f_G als eine Funktion mit den Eingabevariabeln $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ auf und bestimmen den Funktionswert $f_G(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m})$, indem wir an der Wurzel von G beginnend einen Pfad durch G wählen. Am Knoten v folgen wir der Kante 0, wenn die Eingabevariable $P_{index(v)}$ den Wert 0 hat, sonst der Kante 1.
- Der Wert des terminalen Knotens ist dann der gesuchte Funktionswert.

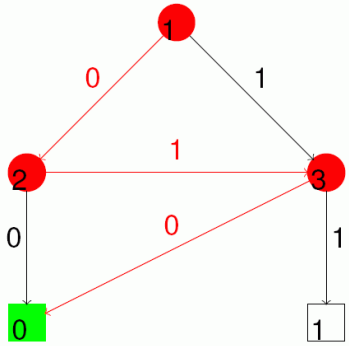
Beispiel:

G:



$f_G(0,1,0) = ?$

G:



$f_G(0,1,0) = ?0$

Umgekehrt gilt auch:

Zu jeder Boole'schen Funktion $f : \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}$ und jeder aufsteigenen Folge $i_1 < \ldots < i_m$ von Indizes gibt es einen *sh*-Graphen G mit

$$f_G = f.$$

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 37f.

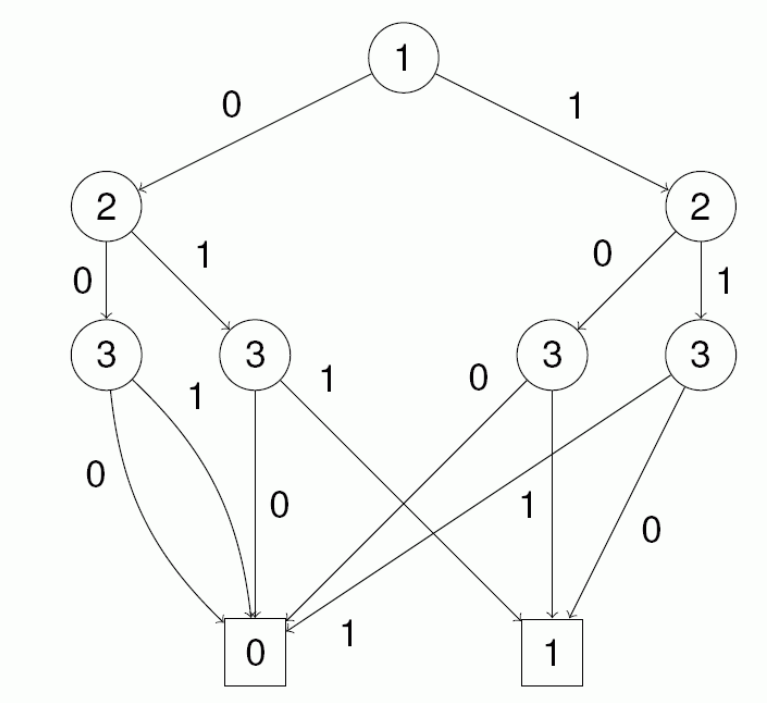
Reduzierte Shannon-Graphen

Ein *sh*-Graph heißt *reduziert*, wenn

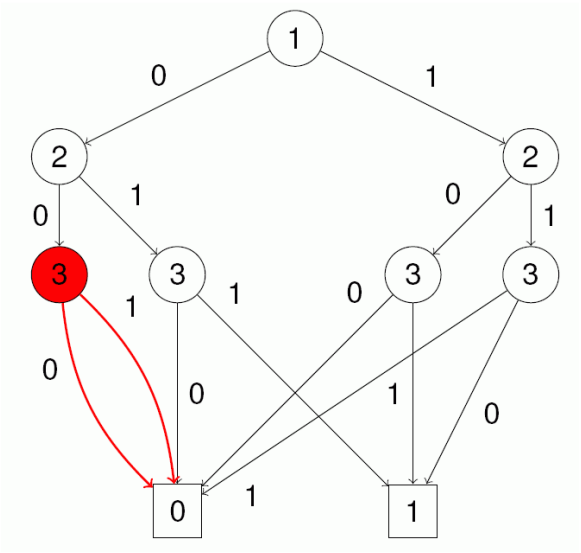
1. es keine zwei Knoten v und w ($v \neq w$) gibt, so daß der in v verwurzelte Teilgraph G_v mit dem in w verwurzelten Teilgraph G_w isomorph ist.
2. es keinen Knoten v gibt, so dass die beiden von v ausgehenden Kanten zum selben Nachfolgerknoten führen.

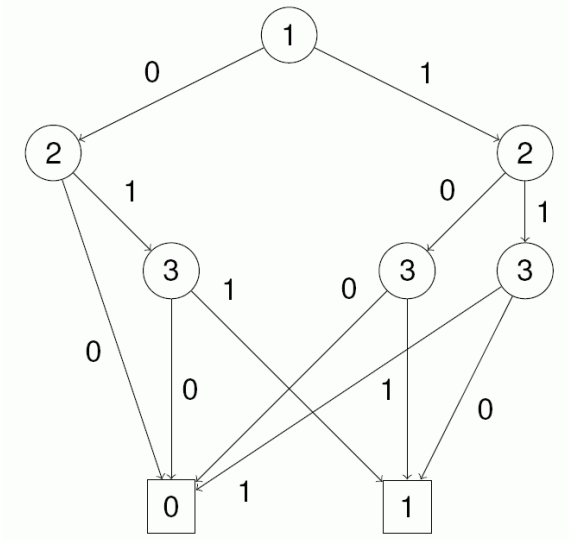
Ein reduzierter Shannongraph heißt auch *ordered binary decision diagram* (OBDD).

Beispiel für eine Reduktion eines Shannon-Graphen:

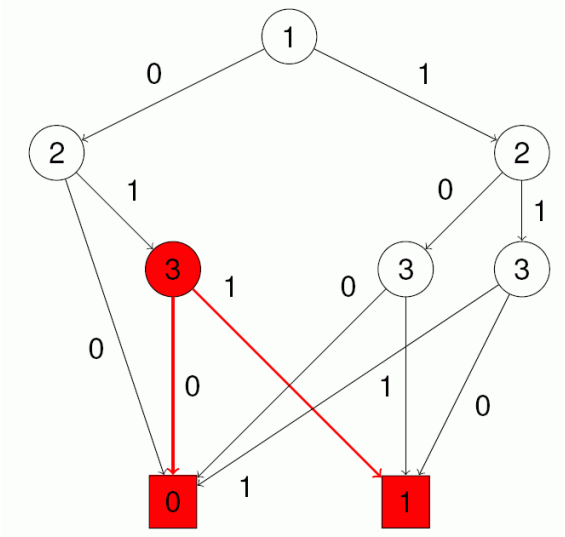


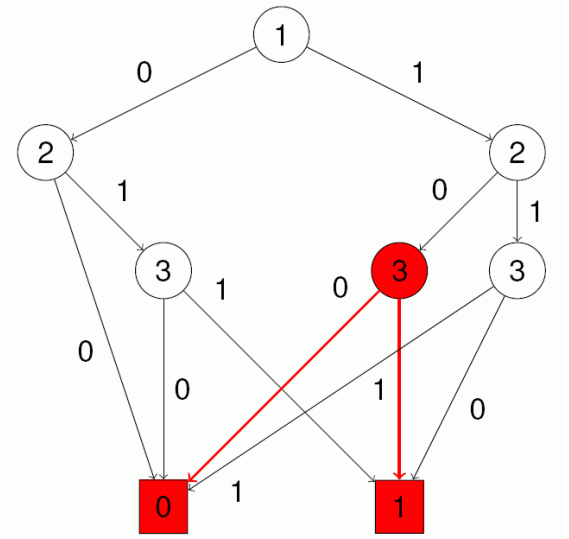
zuerst: Entfernen doppelter Kanten (mitsamt dem Knoten, von dem diese ausgehen)



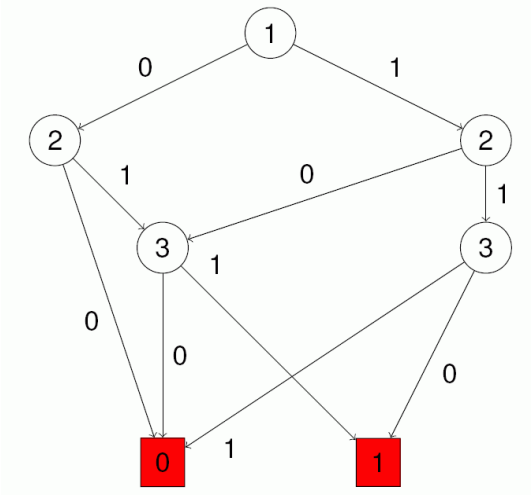


Auffinden isomorpher Teilgraphen:

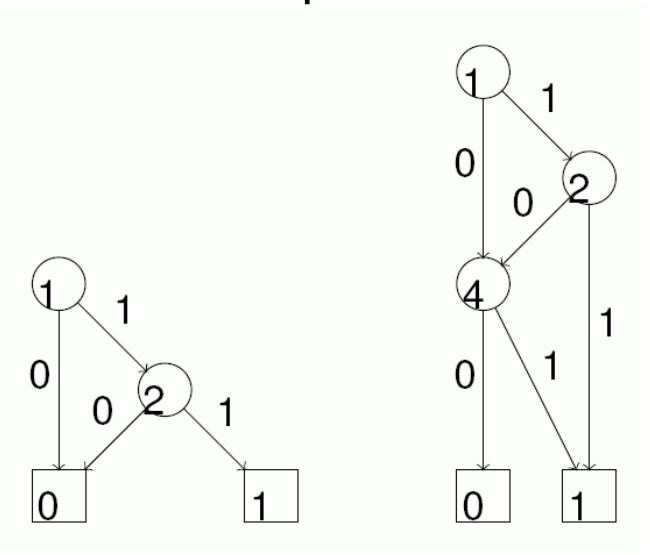




einer davon darf entfernt werden (einlaufende Kante neu verknüpfen):



Weitere Beispiele

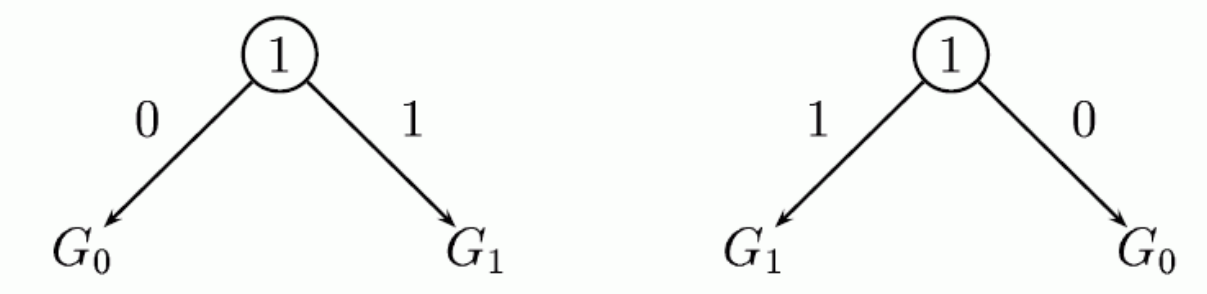


Isomorphie von Shannon-Graphen

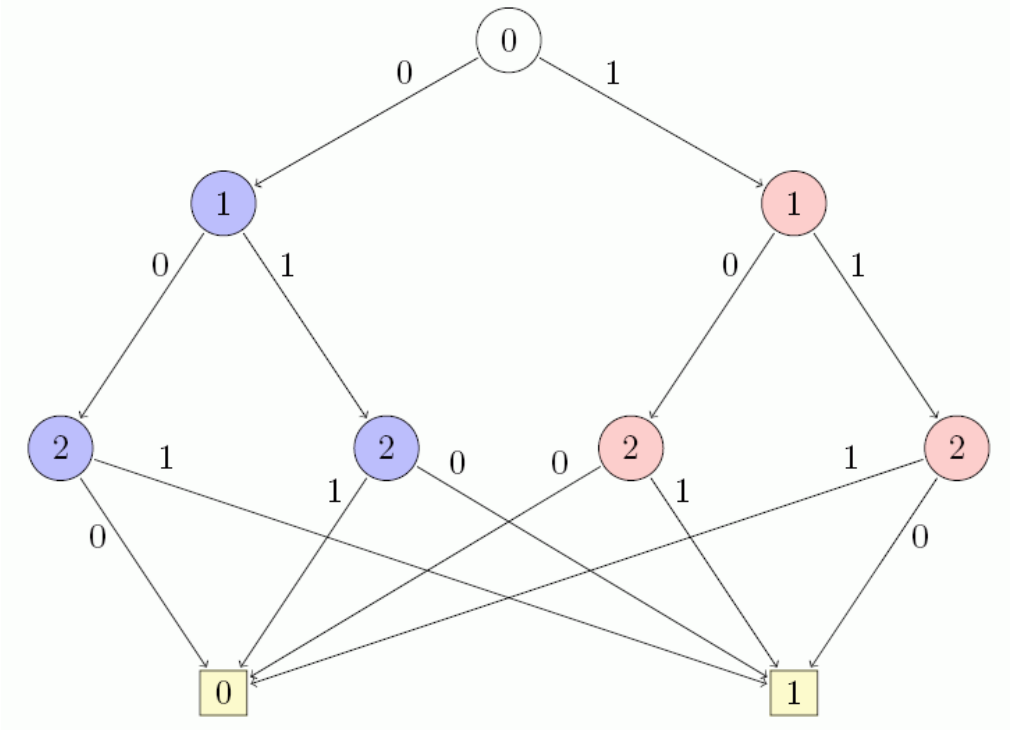
Seien zwei *sh*-Graphen H, G gegeben. Ihre Knotenmengen seien V_1, V_2.
H, G heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung π von V_1 nach V_2 gibt mit:

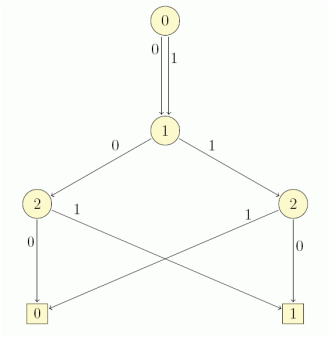
1. $index(k) = index(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$
2. $wert(k) = wert(\pi(k))$ für jeden Terminalknoten $k \in V_1$
3. Für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$, dessen 0-Kante/1-Kante zu dem Knoten k_0/k_1 führt, gilt: die 0-Kante von $\pi(k)$ führt zu $\pi(k_0)$, die 1-Kante zu $\pi(k_1)$.

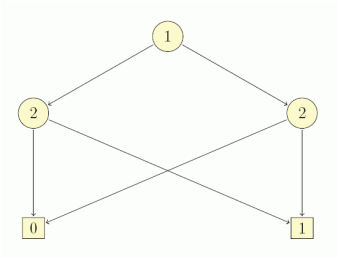
einfachstes Beispiel zweier isomorpher Shannon-Graphen:



komplexeres Beispiel: die beiden Teilgraphen unterhalb des Wurzelknotens sind isomorph:



(somit Reduktion möglich auf  und dann auf



)

Ein Kriterium für Reduziertheit:

Sei G ein Shannongraph, so daß für jedes Paar von Knoten v, w gilt

wenn die 1-Nachfolger von v und w gleich sind und die 0-Nachfolger von v und w gleich sind
dann $v = w$

Dann erfüllt G die Bedingung (1) aus der Definition reduzierter Shannongraphen, d.h. für jedes Paar x, y von Knoten gilt

wenn G_x *isomorph zu* G_y *ist*
dann $x = y$

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 41.

Eindeutigkeitssatz für reduzierte Shannon-Graphen:

Sind G, H reduzierte sh-Graphen zu $\Sigma = \{P_1, ..., P_n\}$, *dann gilt*

$$f_G = f_H \Leftrightarrow G \cong H.$$

(Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten sh-Graphen H mit $f = f_H$*).*

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 41ff.

Wie die "einfache" KNN kann auch der Shannon-Graph in ungünstigen Fällen "groß" werden:

[BDD für Multiplikationen]

- X enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen k-stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolsche Funktion, die das i-te Bit des Produktes von x mit y beschreibt.

Theorem

Für jede Ordnung $<$ *der Variablen in X gibt es einen Index* $0 \leq i < 2k$, *so dass der BDD* $B_{Mult_i,<}$ *mindestens* $2^{k/8}$ *Knoten besitzt.*

Das SAT-Problem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in For0$

Frage: Ist F erfüllbar?
Gibt es eine Interpretation I mit $val_I(F) = \mathbf{1}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Gäbe es einen (deterministischen) polynomialen Entscheidungsalgorithmus für die Erfüllbarkeit, dann wäre $NP = P$, d. h. jedes nichtdeterministisch-polynomiale Entscheidungsproblem auch deterministisch-polynomial.

vereinfachte Varianten des Problems:

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

- k-KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.

Horn-Formeln

Def.:
Eine *Horn-Formel* ist eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform, in der jede Disjunktion höchstens ein positives Literal enthält. Eine solche Disjunktion heißt eine *Horn-Klausel*.

Alternative Schreibweise:

$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$
$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$
A	A

Dabei heißt $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$ der *Rumpf* und A der *Kopf* der Horn-Klausel $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$.

Beispiel einer Horn-Formel:

$$\begin{array}{ll} & \neg P \\ \wedge & (Q \vee \neg R \vee \neg S) \\ \wedge & (\neg Q \vee \neg S) \\ \wedge & R \wedge S \wedge (\neg Q \vee P) \end{array}$$

Alternative Schreibweise

$$\begin{array}{ll} & (P \rightarrow \mathbf{0}) \\ \wedge & (R \wedge S \rightarrow Q) \\ \wedge & (Q \wedge S \rightarrow \mathbf{0}) \\ \wedge & R \wedge S \wedge (Q \rightarrow P) \end{array}$$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln:

Satz:

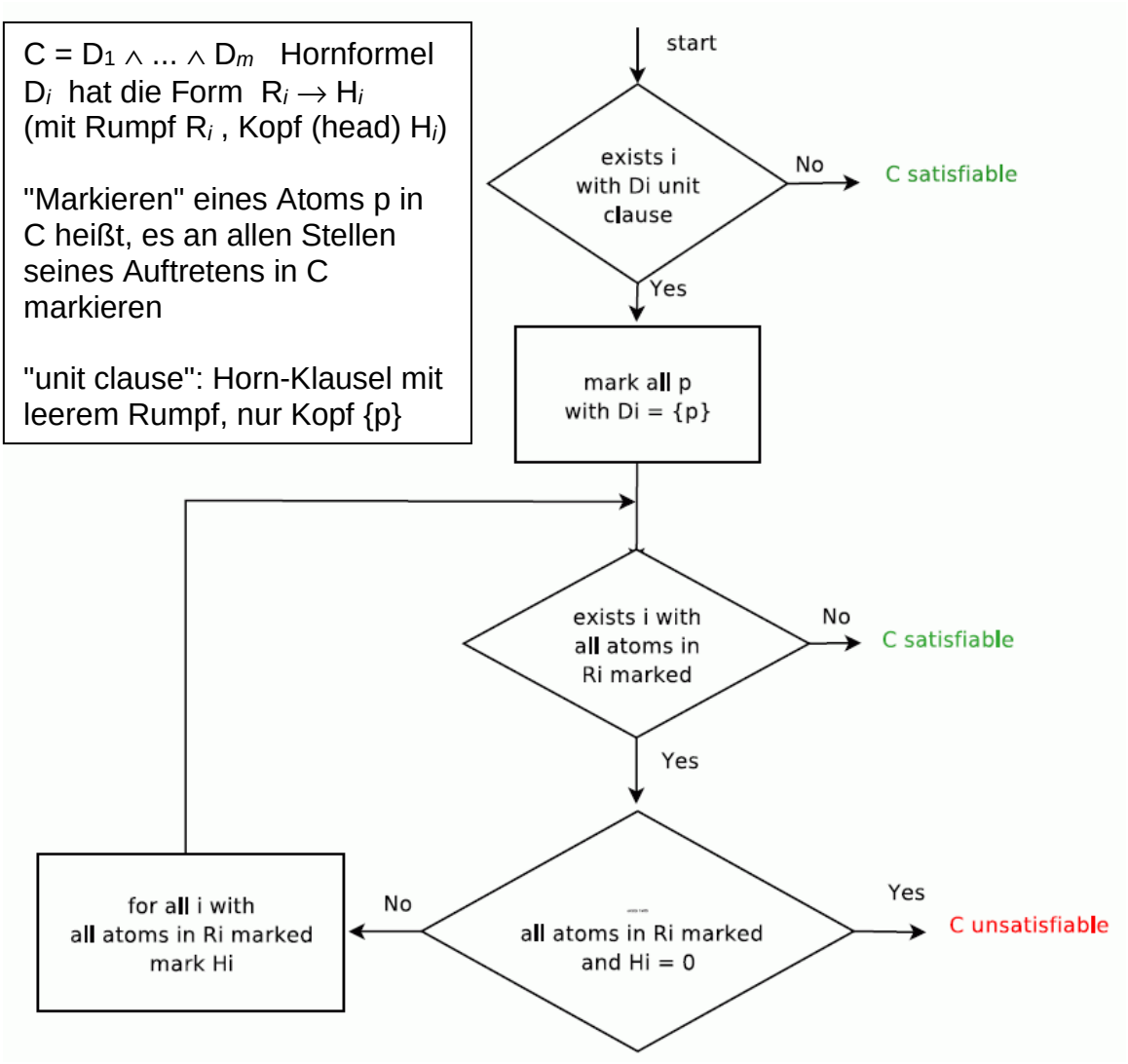
Für Horn-Formeln ist die Erfüllbarkeit in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis durch Angabe eines Entscheidungs-algorithmus:

$C = D_1 \wedge ... \wedge D_m$ Hornformel
D_i hat die Form $R_i \rightarrow H_i$
(mit Rumpf R_i , Kopf (head) H_i)

"Markieren" eines Atoms p in C heißt, es an allen Stellen seines Auftretens in C markieren

"unit clause": Horn-Klausel mit leerem Rumpf, nur Kopf {p}



Korrektheitsbeweis für diesen Algorithmus siehe Schmitt (2008), S. 49ff.

Ausschnitte entnommen aus
Beckert (2010) und Schmitt (2008)