



Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

Tipp #1: „Erster“ Schritt = Fokussierung [ihr könnt direkt zur [Lösung überspringen](#)]

Obwohl das angegebene Liniendiagramm ein ziemlich berühmtes Beispiel im Bereich Begriffsanalyse darstellt, man soll sich davon nicht ablenken lassen, in die Tiefe dieses Diagramms einzutauchen und beispielsweise die entsprechenden Tabellen von Gegenständen und Merkmalen zu erstellen, Begriffe zu berechnen usw. – all dies wird hier nicht benötigt. Verkomplizieren ist kein richtiger Weg, ferner bei Klausuren oder einfach Aufgabenlösungen.

Ein paar Stichangaben sollten jedoch rasch und kurz aufgeschrieben werden – in diesem Fall, dass wir vor uns einen **Verband¹** haben (sogar einen vollständigen {Begriffs}Verband, aber dies gilt auch ohne Kontext, weil der endlich ist), der durch den Graphen, und zwar durchs **Hasse-Diagramm²** (d.h. unser Liniendiagramm) veranschaulicht wird.

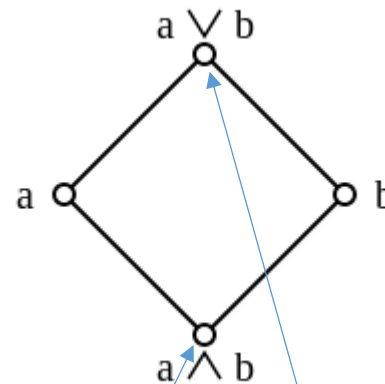
Also, wir haben insgesamt diese 2 Angaben, die eine Menge von zugrundeliegenden konkreten Eigenschaften und Struktur liefern:

Verband = analysierbar auf zweierlei Weise (algebraische Struktur, Ordnungsstruktur), 2 Verknüpfungen, deren Eigenschaften wie Absorption, Kommutativität und Assoziativität (Idempotenz wird aus diesem Dreier abgeleitet).

Hasse-Diagramm = ein (von unten nach oben) gerichteter Graph, wird für die Veranschaulichung halbgeordneter (intuitiver gesagt – partiell geordneter) Mengen genutzt. Knoten $\{a, b, \dots\}$ sind Elemente dieser Mengen, Kanten $\{(a, b), \dots\}$ repräsentieren die Striktordnung. Zum Beispiel, wenn ein Element b oberhalb von a steht, versehen mit der Kante dazwischen, dies bedeutet $a < b$ (also $a \leq b$ und $a \neq b$) und dabei gibt's kein Element c mit $a < c < b$.

Lösung:

Hilfsmittel – Navigationsschema fürs Hasse-Diagramm (d.h. Liniendiagramm, Ordnungsdiagramm):



Erläuterungen:

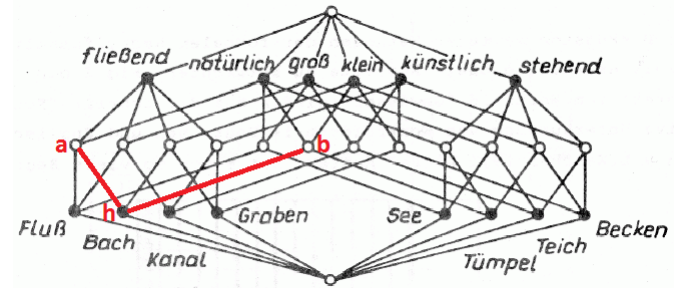
- 1) Das untere Element (sagen wir mal, Element u) ist gleich $a \wedge b$, denn $u < a$ und $u < b$ und dabei kein anderes Element c existiert, das $u < c < a$ und $u < c < b$ erfüllt – das ist einfach die Kanteninterpretation bei Hasse-Diagrammen, wie auch oben erwähnt. Das ist genau die Definition von Infimum in halbgeordneten Mengen. Daher gilt $u = \inf\{a, b\} = a \wedge b$.
- 2) Dual zum 1). **Punkt:** das obere Element (sagen wir mal, Element o) ist gleich $a \vee b$, weil $a < o$ und $b < o$ und dabei kein anderes Element c existiert, das $a < c < o$ und $b < c < o$ erfüllt. Das ist genau die Definition von Supremum in halbgeordneten Mengen. Daher gilt $o = \sup\{a, b\} = a \vee b$.
- 3) Grobe Faustregel: \wedge deutet auf die Richtung unten, \vee - oben (beim Durchlauf eines Verbandes).



a) $a \wedge b = h$

Aus dem Fragment

Fragment:



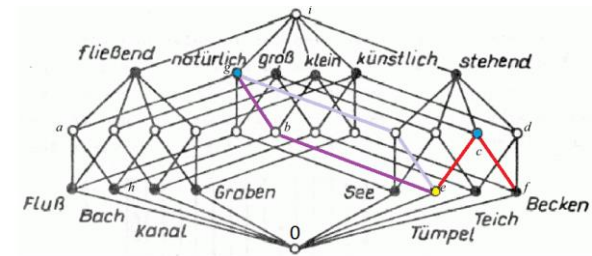
b) Analyse von $c \wedge g$:

*[also hier gibt's keine sofortige Antwort, weil c und g mit keiner Kante verbunden sind – deswegen braucht man eine Analyse durchzuführen, die aber **viel einfacher** (als hier unten) **aussehen soll** – *ich mache sie hier gezielt langwieriger, damit ihr es direkt versteht*]*

1. Solches Element existiert und ist eindeutig bestimmt – dies heißt, es gibt in unserem Netz (Diagramm) einen Knoten, der genau dieses Element darstellt. Man kann natürlich einen anderen Lösungsansatz einsetzen und beispielsweise dieses Element direkt berechnen *obwohl es einem nicht immer ohne Aufwand gelingt* – deswegen machen wir es lieber sicherer durchs Finden von diesem Element, während wir das Diagramm (genauer gesagt, uns interessierendes Fragment davon) stufenweise in eine bestimmte Richtung durchlaufen.
2. Da es sich hier um \wedge -Verknüpfung (engl. *meet*) handelt, ist dieser Knoten:
 - a. Selbst c oder g – wenn diese mit einer Kante verbunden sind (**kein Fall hier**);
 - b. **Unterhalb** von c und g – das impliziert die Verbindung direkt mit einer Kante oder indirekt mit einem Kantenzug, also nicht einfach unten ohne solche Verbindung.
Dies bestimmt unsere Richtung beim Finden und vereinfacht das Verfahren, weil wir nur diese verbundenen Elemente betrachten und nicht alle, die in unteren Schichten (relativ zu c und g) unseres Diagramms sind.
Solches Element werden wir auf jeden Fall finden, weil mindestens das unterste Element

Weil wir einen Verband haben, und dessen Definition genau diese Existenz mit sich bringt.

Fragment:





mit der Bezeichnung 0 (wir haben dies einfach so genannt) genau unterhalb von c und g liegt und ist mit denen jeweils mit einem Kantenzug verbunden.

Aber da **die \wedge -Verknüpfung** für unser Diagramm **durch Infimum definiert** wird, müssen wir das am höchsten liegende Element finden, das die gleichen Bedingungen relativ zu c und g erfüllt.

3. Da c in unserem Netz niedriger als g platziert ist, können wir direkt mit der ersten unter dem Element c liegenden Ebene anfangen.

Hier befinden sich nur die Elemente e und f aus denen, die direkt mit dem Element c verbunden sind.

Wenn eins von diesen beiden auch mit dem Element g durch einen Kantenzug verbunden ist (natürlich nicht mit einer Kante, weil g 2 Ebenen höher liegt), dann ist dieses Element unsere Antwort:

- Das Element f hat solche Verbindung mit g offensichtlich nicht – es fällt aus unseren Kandidaten daher weg.
- Das Element e hat aber genau solchen Kantenzug zu g (sogar zwei Kantenzüge, aber es reicht schon wenn's mindestens einen gibt). Das bringt uns die Antwort:

$$c \wedge g = e$$

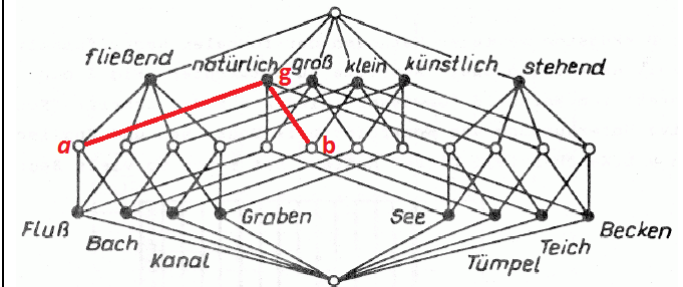
0 bezeichnet einen Begriff mit dem Umfang (d.h. Extension) \emptyset (d.h. leere Menge von Gegenständen) – **ACHTUNG**: der tiefste Begriff repräsentiert nicht in jedem Fall die leere Menge von Gegenständen, aber in diesem konkreten Beispiel - schon. Obwohl für die Lösung brauchen wir solche Einzelheiten nicht – **diese Fußnote dient ausschließlich als eine Randbemerkung.**



c) $a \vee b = g$

Aus dem Fragment

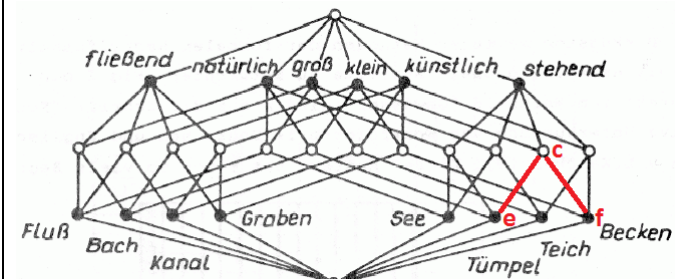
Fragment:



$$\begin{aligned}
 d) \quad & c \vee f = (e \vee f) \vee f = \\
 & = e \vee (f \vee f) = \\
 & = e \vee f = \\
 & = c
 \end{aligned}$$

Aus dem Fragment
Assoziativität
Idempotenz
Aus dem Fragment

Fragment:



Tipp #2: Lösungsansätze [ihr könnt dies überspringen, enthält nur die extra Erläuterungen]

Hier haben wir die Antwort (d.h. das Zielelement – Supremum von c und f) berechnet, durch die Nutzung von \vee -Eigenschaften in unserem Verband. Dies ist ein Beispiel eines anderen Ansatzes zur Lösung. Dies scheint hier ganz kurz, präzise und attraktiv, aber in anderen Fällen sollte man die Schritte mit mehr Vorsicht und Aufwand formulieren – zum Beispiel, man darf hier die Distributivität nicht verwenden, weil dieser Verband nicht distributiv ist, obwohl für die konkreten Elemente, die sich in einem distributiven Unterverband dieses Verbandes befinden, solche Schritte sind zugelassen, allerdings muss man diese Zulässigkeit erst beweisen.

Natürlich könnte man auch hier das Zielelement finden (wie [oben](#)), und nicht so explizit algebraisch berechnen.

Alternativ könnte man auch die Bedeutung unseres Verbandes nutzen (d.h. dass es sich hier um einen ganz konkret berechenbaren Begriffsverband handelt) und dadurch die Antwort finden - Skizze:

$$\begin{aligned}
 c \vee f &= \sup\{c, f\} = \sup\{(\text{Umfang}_c, \text{Inhalt}_c), (\text{Umfang}_f, \text{Inhalt}_f)\} = \\
 &= ((\text{Umfang}_c \cup \text{Umfang}_f)'', \text{Inhalt}_c \cap \text{Inhalt}_f) = ((\{\text{Tümpel}, \text{Becken}\})'', \{\text{stehend}, \text{klein}\}) = (\{\text{Tümpel}, \text{Becken}\}, \{\text{stehend}, \text{klein}\}) = c.
 \end{aligned}$$

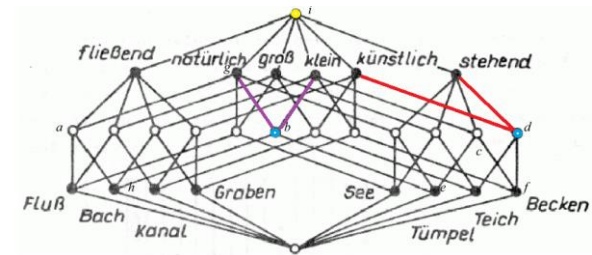
Also, mindestens diese 3 Lösungsansätze sind in jedem Fall einsatzbereit, und je nachdem einem einen davon weniger aufwändig erscheint/ist, könnte genau diesen als einen Lösungsweg verwendet werden.

e) Analyse von $b \vee d$ [gleich wie [oben](#)]:

1. Solches Element existiert und zwar eindeutig – wir sollen es einfach in unserem Netz finden.
2. **Die Richtung ist nach oben** (d.h. zur Spitze des Diagramms, zum Element i), weil es sich um die \vee -Verknüpfung handelt, die das Supremum von b und d repräsentiert.
3. Wie man auf dem Bild (Fragment) sieht, liefert die erste höher (relativ zu b und d) liegende Ebene keine gemeinsamen Elemente, die sowohl mit b als auch mit d durch eine Kante verbunden sind. Diese Tatsache zwingt und dazu, das Diagramm weiter oben zu traversieren und zwar machen wir einen weiteren Schritt – betrachten die allerhöchste Ebene, weil wir schon zur Spitze gekommen sind und keine andere Möglichkeit haben. Hier befindet sich nur ein einziges Element i , das mit allen Elementen aus dem erstniedrigeren Niveau jeweils eine Kante teilt. Das liefert auch unsere Antwort:

$$b \vee d = i$$

Fragment:



i bezeichnet einen Begriff mit dem Umfang (d.h. Extension) $\{\text{Fluß, Bach, Kanal, Graben, See, Tümpel, Teich, Becken}\}$ (d.h. alle Gegenstände) – **ACHTUNG:** im Gegensatz zum niedrigsten Element, repräsentiert der höchste Begriff in jedem Fall die Menge aller Gegenstände. Obwohl für die Lösung brauchen wir diese Einzelheiten nicht – **die Fußnote dient ausschließlich als eine Randbemerkung.**

f) Analyse von $(a \vee e) \vee f$:

[gleich wie [oben](#), aber diese wird in 2 Teilen unterteilt – erst fürs Finden von $x = a \vee e$, anschließend – für $x \vee f$]

1. Immer wieder der gleiche erste Schritt – da es sich um einen Verband handelt, existiert ein solches Element und zwar eindeutig. Dies ist schon gesichert. Gehen wir weiter.
2. Die Richtung ist für die beiden Teile „oben“.
3. Wie uns das Fragment zeigt:

- a. **Erster Teil ($x = a \vee e$):** nur das Element g ist durch eine Kante (mindestens einen Kantenzug) mit dem Element a (Element e) verbunden. Dies heißt: $x = a \vee e = g$
- b. **Zweite Hälfte ($x \vee f$):** das Element f hat Kantenzüge nur zur Elementen **klein**, **künstlich** und **stehend**. Also nicht zum Element $x = g$ auf der gleichen Ebene.

Deswegen müssen wir eine weitere Ebene betrachten, die aber die letzte ist, mit einem einzigen Element i , das sich mit jedem Element aus der unteren Nachbarebene verbindet. Daher auch die Antwort:

$$(a \vee e) \vee f = i$$

Fragment:

