5. Modelle für Nebenläufigkeit

Was sind nebenläufige Systeme?

Ganz allgemein: Systeme, bei denen mehrere Komponenten/Prozesse nebenläufig arbeiten und typischerweise durch Nachrichtenaustausch miteinander kommunizieren.
Das englische Wort für nebenläufig ist "concurrent".

Nebenläufigkeit versus Parallelität:

Parallelität

Zwei Ereignisse finden parallel statt, wenn sie gleichzeitig ausgeführt werden.

Nebenläufigkeit (engl. concurrency)

Zwei Ereignisse sind nebenläufig, wenn sie parallel ausgeführt werden können (jedoch nicht müssen), das heißt, wenn zwischen ihnen keine kausale Abhängigkeit besteht.

Das bedeutet: Nebenläufigkeit ist der allgemeinere Begriff.

Beispiele

- Prozesswechsel auf einem Prozessor (Nebenläufigkeit, aber keine Parallelität)
- Rechner mit mehreren Prozessoren
- Netzwerk (LAN, WAN, Internet)
- Nebenläufige/parallele Anwendungen

  Hierbei ist zu unterscheiden:
  - Parallelität zum Effizienzgewinn (Beispiel: paralleles Sortierverfahren)
  - Nebenläufigkeit durch Nutzung verteilter Ressourcen (Beispiel: Verwendung von Web Services)

(Mögliche) Charakteristika von nebenläufigen Systeme

- Nebenläufigkeit/Parallelität
- Offenheit (Erweiterbarkeit, Interaktion mit der Umgebung)
- Modularität
- Nicht-terminierendes Verhalten (unendlich lange Abläufe)
- Nicht-Determinismus
- Temporale Eigenschaften (z.B.: "irgendwann wird etwas passieren")

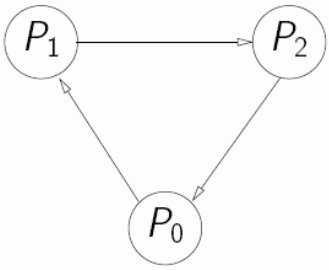
Probleme beim Umgang mit nebenläufigen Systemen

- Deadlocks (Verklemmungen)
- Einhaltung des wechselseitigen Ausschlusses (engl. mutual exclusion)
- Unendlicher bzw. sehr großer Zustandsraum
- Stark dynamisches Verhalten/wechselnde Anzahl von Prozessen
- Variable Topologie/Mobilität

Daher: Methoden zur Modellierung, Analyse und Verifikation solcher Systeme sind erforderlich.

Einführendes Beispiel: Prozesskommunikation

Wir betrachten das folgende System mit drei Prozessen P_0, P_1, P_2:



Dabei schickt P_0 Nachrichten an P_1, P_1 schickt Nachrichten an P_2 und P_2 schickt Nachrichten an P_0.

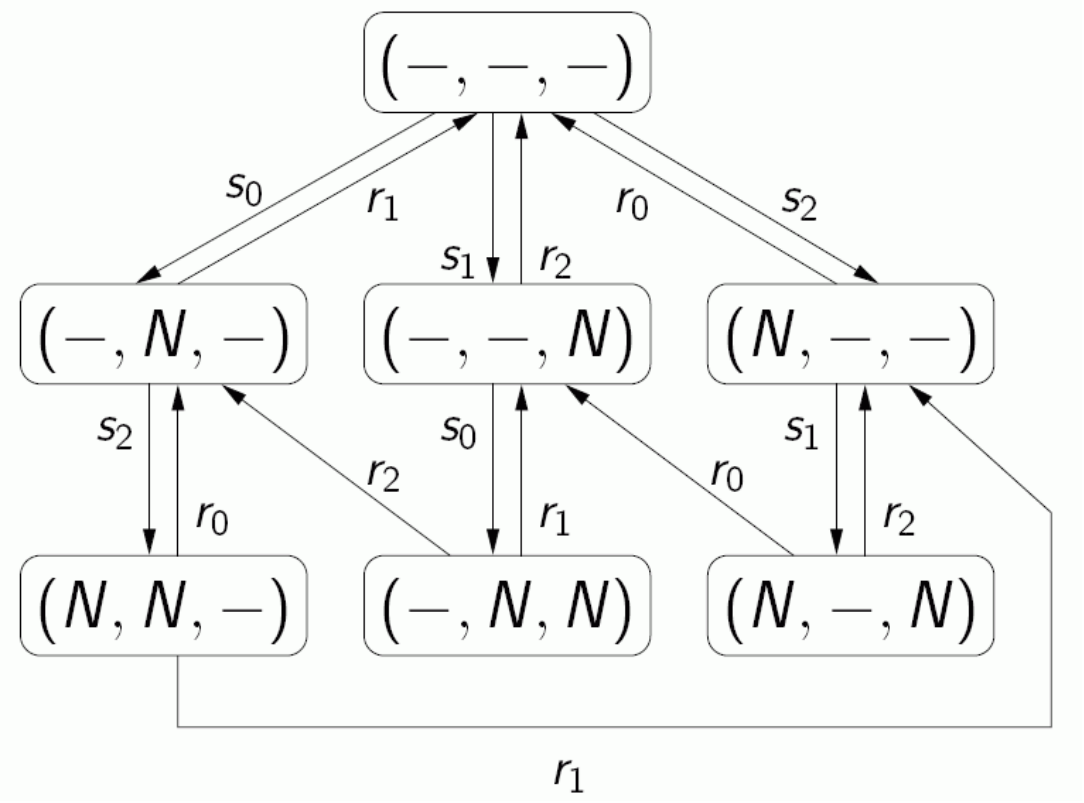
Ein Prozess P_i verhält sich wie folgt:

- Falls eine Nachricht für P_i anliegt, so empfängt P_i diese Nachricht (Aktion r_i – receive).
- Falls keine Nachricht für P_i anliegt und auch keine Nachricht am Nachbarn P_j (mit $j = (i + 1) \mod 3$) anliegt, so sendet P_i eine Nachricht an P_j (Aktion s_i – send).

Zu jedem Zeitpunkt kann ein beliebiger Prozess des Systems die nächste Aktion ausführen.

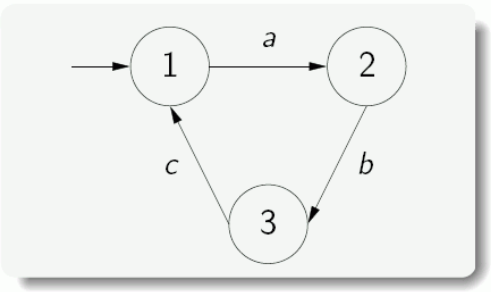
Beschreibung durch ein Transitionssystem:

- System-Zustände der Form (x, y, z) mit $x, y, z \in \{N, -\}$. Beispiel: $(N, N, -)$ bedeutet, dass an den Prozessen P_0 und P_1 jeweils eine Nachricht anliegt.
- Transitionen/Zustandsübergänge mit Aktionen r_i (Prozess i liest eine Nachricht) und s_i (Prozess i sendet eine Nachricht).



Transitionssysteme

- Transitionssysteme repräsentieren Zustände und Zustandsübergänge von Systemen.
- Echte Parallelität wird nicht direkt repräsentiert.
- Starke Ähnlichkeit zu Automaten, aber hier sind wir weniger an der akzeptierten Sprache interessiert.



Aktionen und Aktionsfolgen

Wir verwenden folgende Notation:

- Act: Menge von atomaren Aktionen, oft mit $a, b, c, \ldots$ bezeichnet. Manchmal verwenden wir auch die interne Aktion τ, die von außen her nicht beobachtbar sein soll.
- Act^*: Die Menge aller endlichen Wörter (engl. finite words) über dem Alphabet Act.
- Act^ω: Die Menge aller unendlichen Wörter (engl. infinite words) über dem Alphabet Act.
  Ein unendliches Wort $w \in Act^\omega$ kann durch eine Abbildung $w : \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} \to Act$ dargestellt werden.
- $Act^\infty = Act^* \cup Act^\omega$: Die Menge aller endlichen und unendlichen Wörter über Act.
- $Pref(L)$: Für eine Sprache $L \subseteq Act^\infty$ definieren wir die Menge aller Präfixe von L wie folgt:

$$Pref(L) = \{u \in Act^* \mid \exists w \in L, v \in Act^\infty : w = uv\}.$$

Transitionssystem (Definition)

Gegeben sei eine feste Menge von Aktionen Act. Ein Transitionssystem $T = (Z, \to)$ über Act besteht aus

- Einer Menge von Zuständen Z *und*
- einer Menge $\to \subseteq Z \times Act \times Z$ von Zustandsübergängen.

- Ein Transitionssystem heißt endlich (engl. finite), wenn sowohl die Zustandsmenge als auch die Übergangsmenge endlich sind.
- Statt $(z, \ell, z') \in \rightarrow$ schreiben wir in Zukunft $z \xrightarrow{\ell} z'$.
- Außerdem werden wir $z \xrightarrow{a_1} \ldots \xrightarrow{a_n} z'$ im folgenden mit $z \xrightarrow{a_1 \ldots a_n} z'$ abkürzen. Es gilt außerdem, dass $z \xrightarrow{\varepsilon} z$ für jeden Zustand z.
- Für einen Zustand z schreiben wir $z \xrightarrow{a}$, falls es einen Zustand z' mit $z \xrightarrow{a} z'$ gibt und $z \not\xrightarrow{a}$, wenn es einen solchen Zustand nicht gibt.

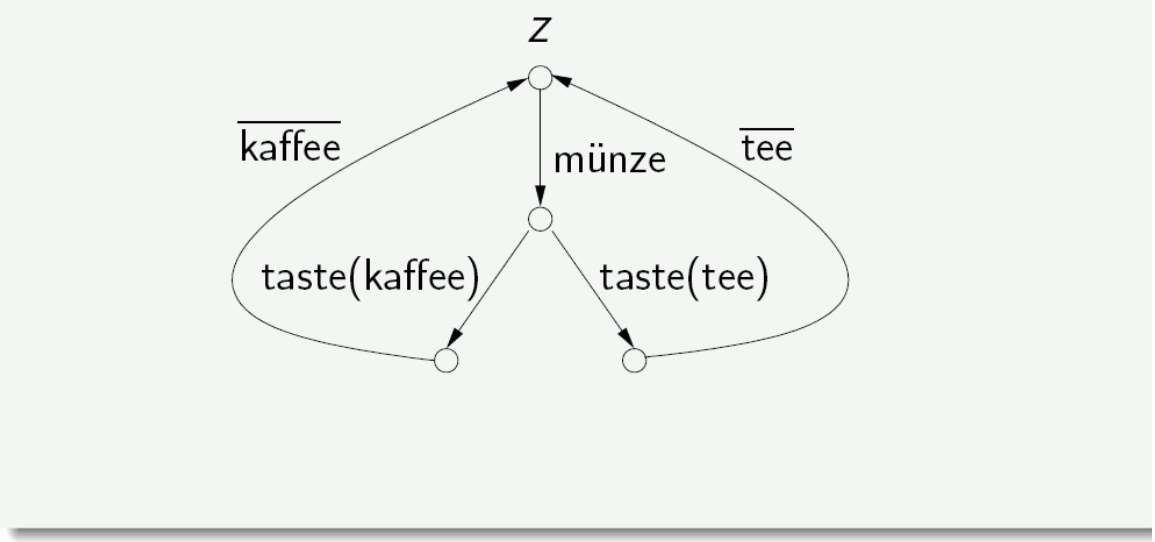
Beispiel

Ein klassisches Beispiel: die Tee- und Kaffee-Maschine.

Wir wollen eine ganz einfache Maschine modellieren, die

- nach Münzeinwurf und Tastendruck entweder Tee oder Kaffee ausgibt,
- Fehlverhalten zeigen kann *und*
- sich unter Umständen nicht-deterministisch verhält.

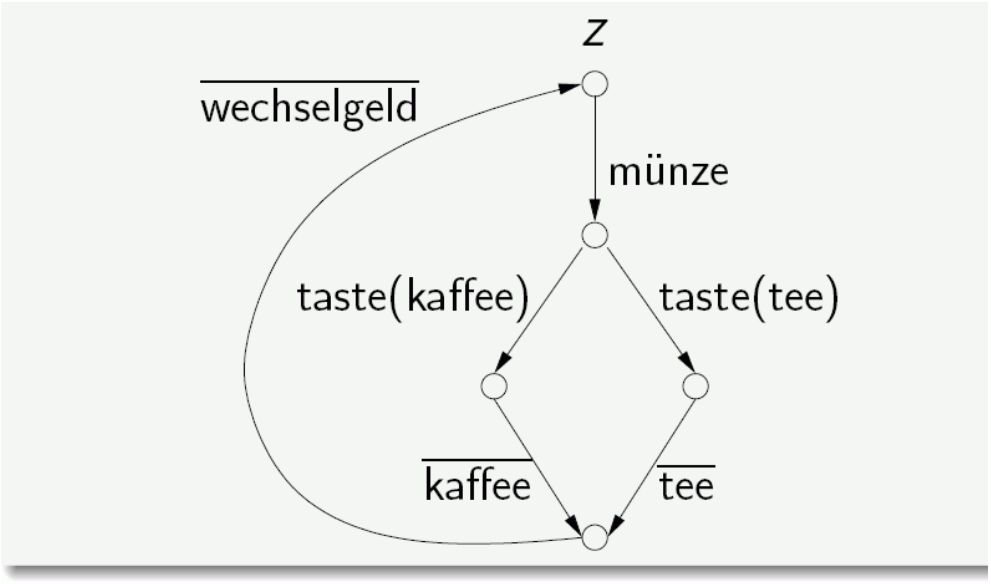
1. Version



Eine Tee-/Kaffee-Maschine.

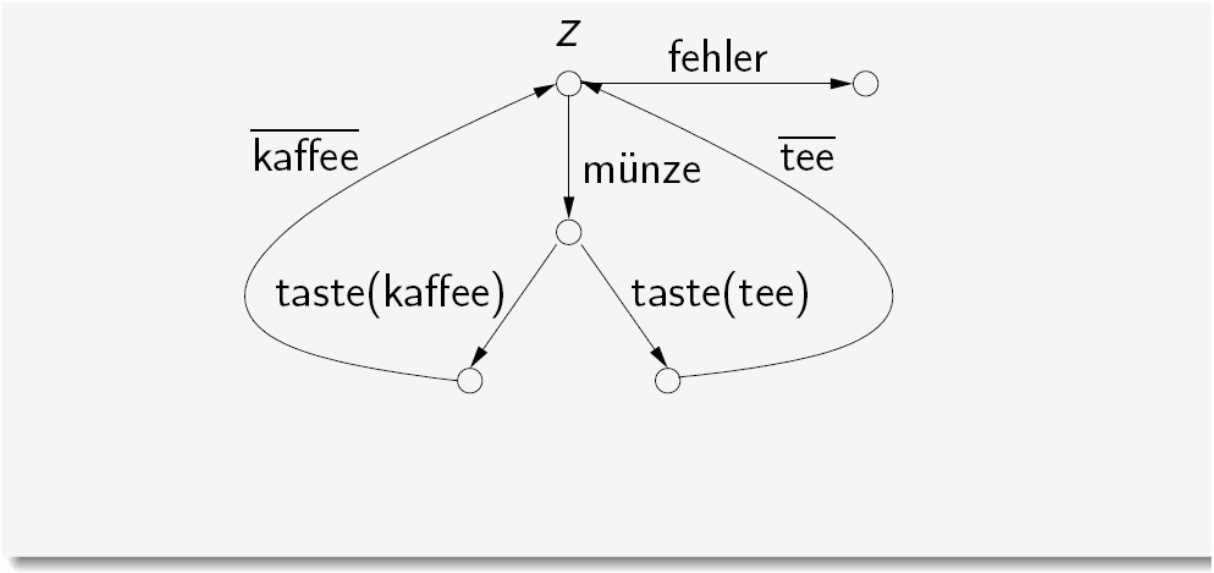
Wir unterscheiden Eingabeaktionen der Form a und Ausgabeaktionen (auch Ko-Aktionen genannt) der Form $\overline{a}$.

2. Version



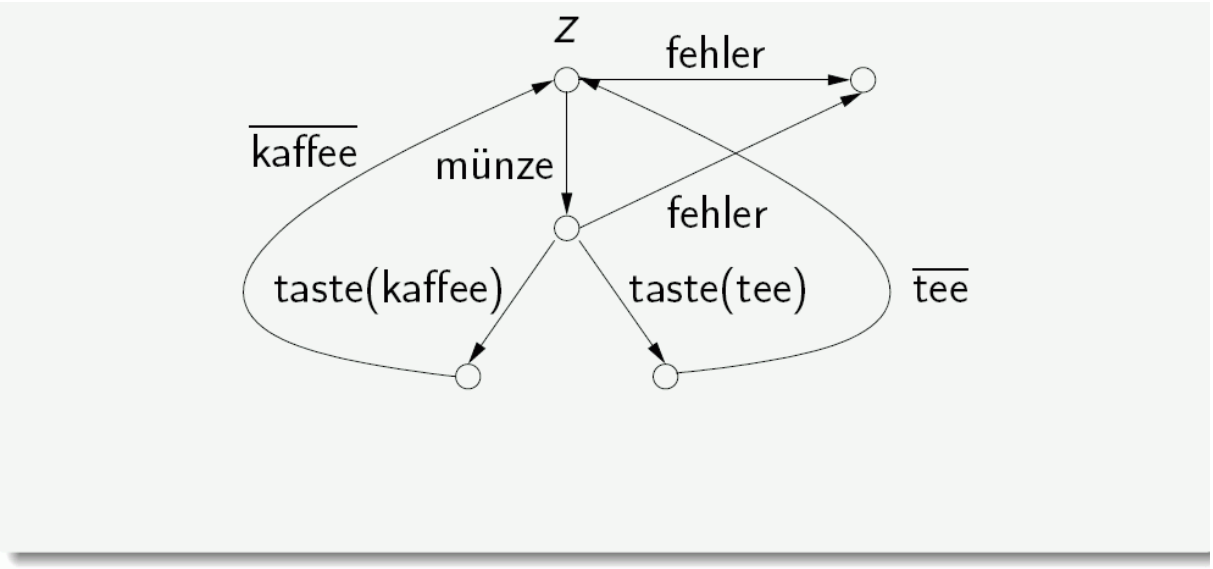
Eine Maschine, die sogar wechselt.

3. Version



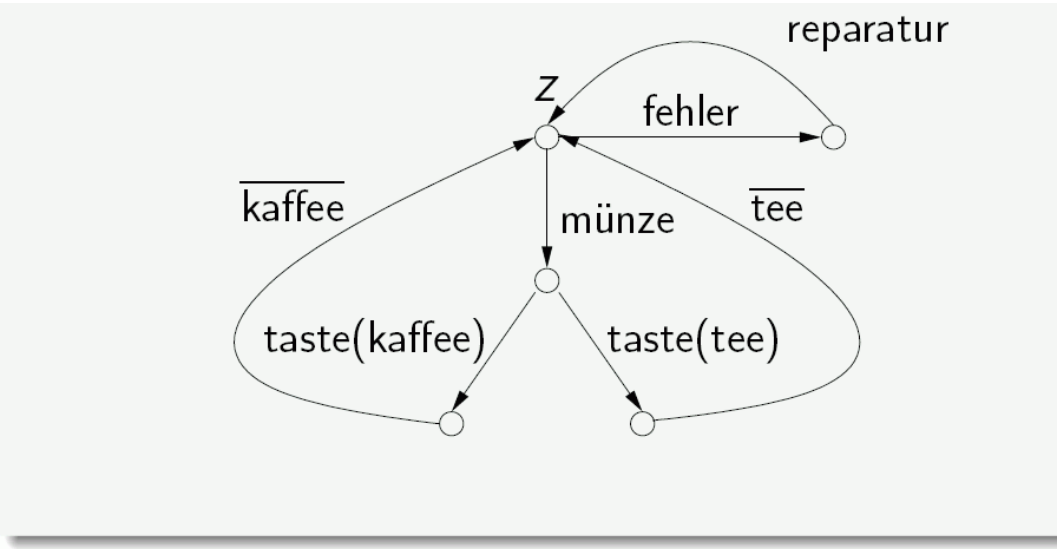
Eine Maschine mit Fehler. Das Auftreten eines Fehlers entspricht eher einer internen Aktion und könnte alternativ auch mit einem τ modelliert werden.

4. Version



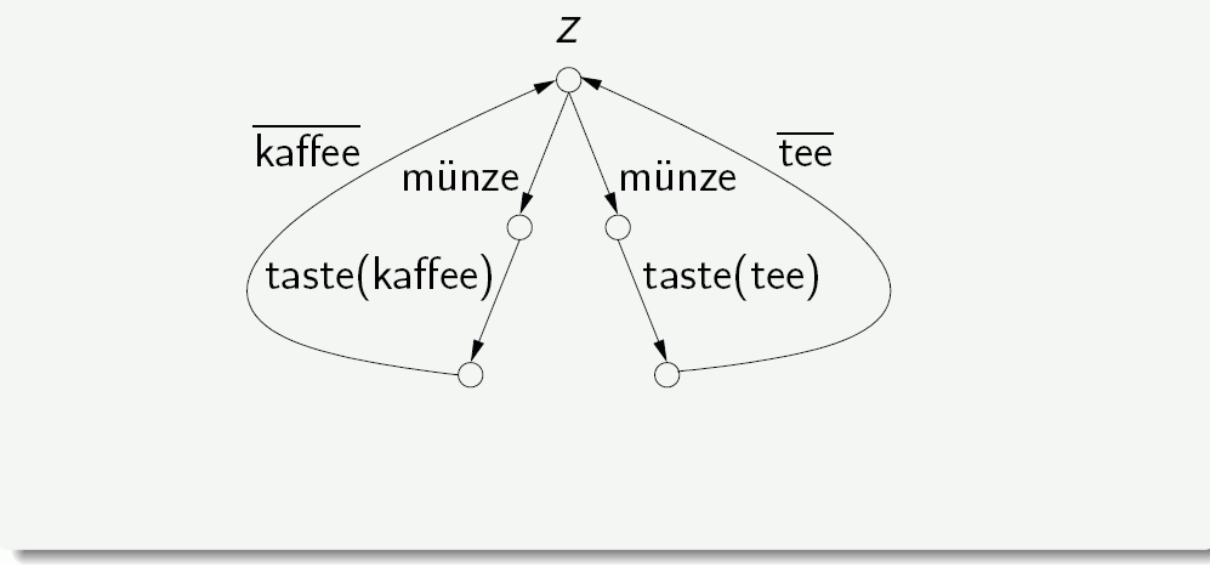
Eine (unfaire) Maschine mit Fehler, die nach Einwurf einer Münze in den Fehlerzustand übergehen kann.

5. Version



Eine Maschine mit Fehler, die wieder repariert werden kann.

6. Version



Eine Maschine mit nicht-deterministischem Verhalten, die die Getränkeauswahl für den Benutzer trifft.

Deterministische Transitionssysteme:

Deterministisches Transitionssystem (Definition)

Ein Transitionssystem $T = (Z, \rightarrow)$ heißt deterministisch, wenn für jeden Zustand $z \in Z$ gilt:

Falls $z \xrightarrow{a} z_1$ und $z \xrightarrow{a} z_2$, dann gilt $z_1 = z_2$.

Bemerkungen:

- Alle Tee-/Kaffee-Maschinen bis auf die letzte sind deterministisch.
- Im Gegensatz zu deterministischen Automaten wird hier nicht gefordert, dass bei einem deterministischem Transitionssystem von jedem Zustand aus auch jede Aktion möglich ist.

Sprachäquivalenz

Sprache eines Zustands (Definition)

Mit der Sprache eines Zustands z bezeichnen wir alle Wörter über Act, die den von z ausgehenden Pfaden entsprechen. Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, Sprachen zu definieren:

- $S(z) = \{w \in Act^* \mid \exists z' \in Z\colon z \xrightarrow{w} z'\}$
- $S^\omega(z) = \{a_1 a_2 a_3 \cdots \in Act^\omega \mid z \xrightarrow{a_1} z_1 \xrightarrow{a_2} z_2 \xrightarrow{a_3} \dots\}$
- $S^\infty(z) = S(z) \cup S^\omega(z)$

Sprachäquivalenz (Definition)

Zwei Zustände $z, z' \in Z$ heißen S-sprachäquivalent, wenn $S(z) = S(z')$ gilt. Analog ist S^ω- und S^∞-Sprachäquivalenz definiert.

Sprachäquivalenz wird auf Englisch auch als trace equivalence bezeichnet.

Die Sprachäquivalenz hat folgende Eigenschaft:

Falls z, z' S^∞-sprachäquivalent sind, dann sind sie auch S- und S^ω-sprachäquivalent.

Begründung:

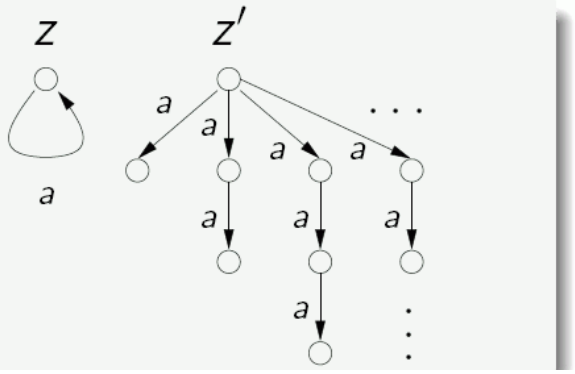
- Aus $S^\infty(z) = S^\infty(z')$ folgt
  $S(z) = S^\infty(z) \cap Act^* = S^\infty(z') \cap Act^* = S(z')$.
- Und analog:
  $S^\omega(z) = S^\infty(z) \cap Act^\omega = S^\infty(z') \cap Act^\omega = S^\omega(z')$.

Es gilt aber auch:

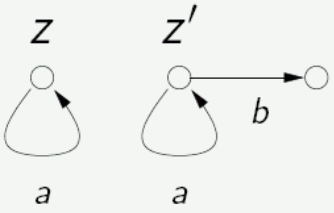
Falls z, z' S-sprachäquivalent sind, dann sind sie nicht notwendigerweise S^ω-sprachäquivalent (und umgekehrt).

Gegenbeispiele:

Zustände z, z' sind S-äquivalent, aber nicht S^ω-äquivalent. (Von z' aus gibt es nur endliche Pfade.)

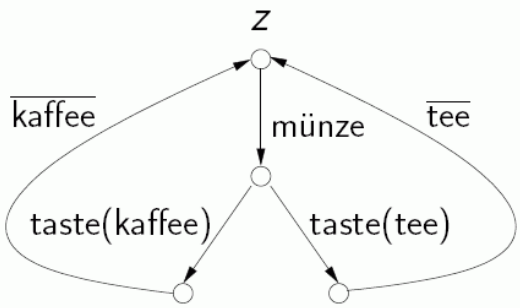


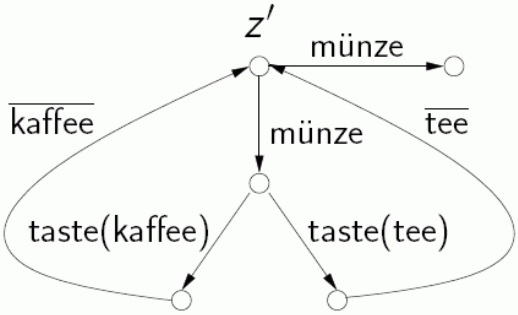
Zustände z, z' sind S^ω-äquivalent, aber nicht S-äquivalent.



Verweigerungsäquivalenz

Motivation: die Zustände z, z' der beiden folgenden Tee-/Kaffee-Maschinen sind sprachäquivalent.





Allerdings möchte man diese Zustände nicht wirklich als "gleich" ansehen. In dem einen Fall funktioniert die Maschine korrekt, in dem anderen verschluckt sie eine Münze, ohne etwas auszugeben.

Folgerung: Sprachäquivalenz ist nicht ausreichend. Wir benötigen auch noch die Möglichkeit zu sagen, dass die erreichbaren Zustände dieselben Aktionen erlauben bzw. nicht erlauben sollen.

Verweigerungsäquivalenz (Definition)

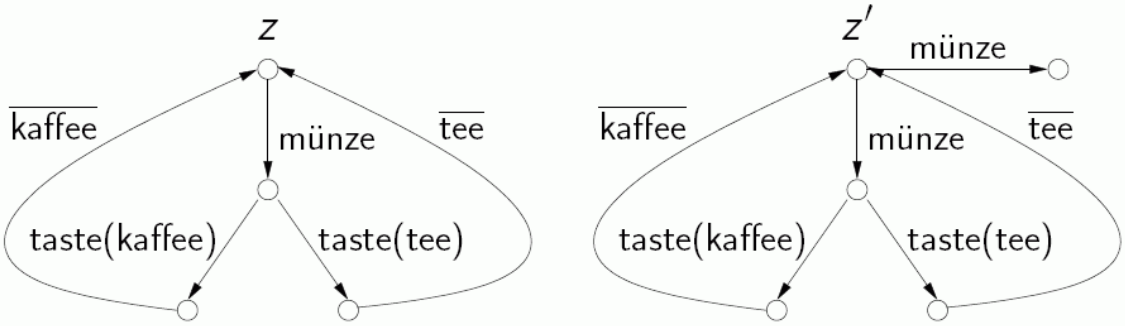
Sei $T = (Z, \rightarrow)$ ein Transitionssystem. Die Menge der Verweigerungspaare eines Zustands $z \in Z$ ist definiert als:

$$\mathcal{F}(z) = \{(w, A) \in Act^* \times \mathcal{P}(Act) \mid \exists z' \in Z : z \xrightarrow{w} z' \text{ und } z' \not\xrightarrow{a} \text{ für alle } a \in A\}$$

Zwei Zustände $z, z' \in Z$ heißen verweigerungsäquivalent, wenn $\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z')$ gilt.

Verweigerungsäquivalenz wird auf Englisch als failures equivalence bezeichnet.

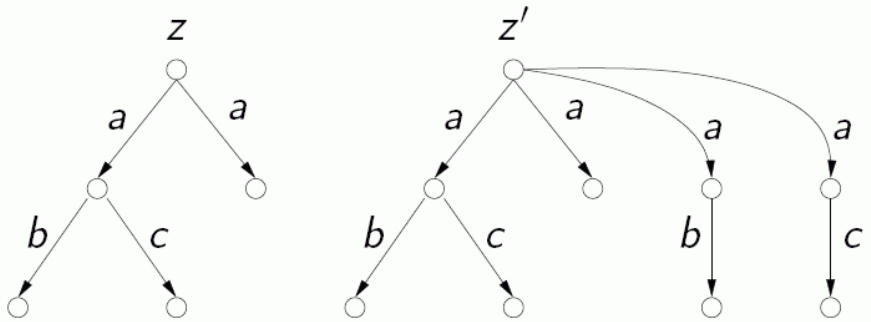
Motivation: die Zustände z, z' der beiden folgenden Tee-/Kaffee-Maschinen sind sprachäquivalent.



In diesem Beispiel enthält $\mathcal{F}(z')$ das Paar $(\text{münze}, \{\text{taste(kaffee)}, \text{taste(tee)}\})$, wobei dieses Paar in $\mathcal{F}(z)$ nicht vorkommt.

$\Rightarrow$ z und z' sind nicht verweigerungsäquivalent.

Ein weiteres Beispiel für Verweigerungsäquivalenz:



Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(z) &= \{(\varepsilon, A) \mid A \subseteq \{b, c\}\} \cup \{(a, A) \mid A \subseteq \{a, b, c\}\} \cup \\ &\quad \{(ab, A) \mid A \subseteq \{a, b, c\}\} \cup \{(ac, A) \mid A \subseteq \{a, b, c\}\} \\ &= \mathcal{F}(z')\end{aligned}$$

und z, z' sind damit verweigerungsäquivalent.

Bisimularität

Es gibt noch eine weitere wichtige Äquivalenz, die etwas feiner als Verweigerungsäquivalenz und im allgemeinen auch leichter zu mechanisieren ist: die Bisimularität oder Bisimulationsäquivalenz.

Dabei verlangt man anschaulich, dass die beiden Zustände z, z' in der Lage sind, sich gegenseitig zu simulieren.

Bisimulation (Definition)

Sei $T = (Z, \rightarrow)$ ein Transitionssystem. Eine Relation $R \subseteq Z \times Z$ auf den Zuständen heißt Bisimulation, wenn für jedes Paar $(z_1, z_2) \in R$ und für jede Aktion $a \in Act$ gilt:

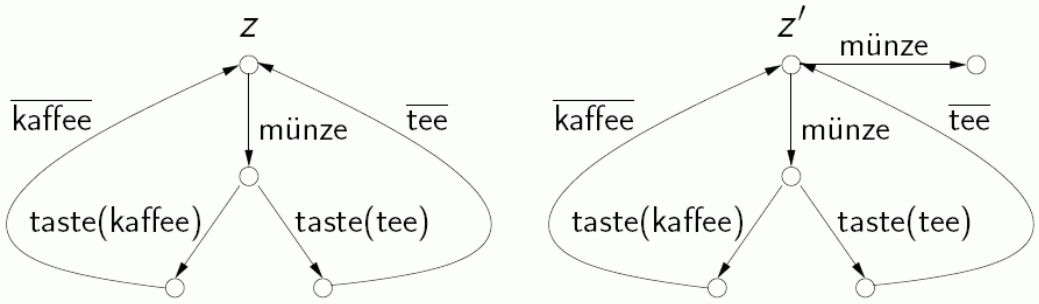
- für jedes z_1' mit $z_1 \xrightarrow{a} z_1'$ gibt es ein z_2' mit $z_2 \xrightarrow{a} z_2'$ und $(z_1', z_2') \in R$.
- für jedes z_2' mit $z_2 \xrightarrow{a} z_2'$ gibt es ein z_1' mit $z_1 \xrightarrow{a} z_1'$ und $(z_1', z_2') \in R$.

Bisimularität (Definition)

Zwei Zustände z_1, z_2 heißen bisimular, wenn es eine Bisimulation R gibt mit $(z_1, z_2) \in R$. In diesem Fall schreiben wir $z_1 \sim z_2$.
Die Relation $\sim$ heißt dann Bisimularität oder Bisimulationsäquivalenz.

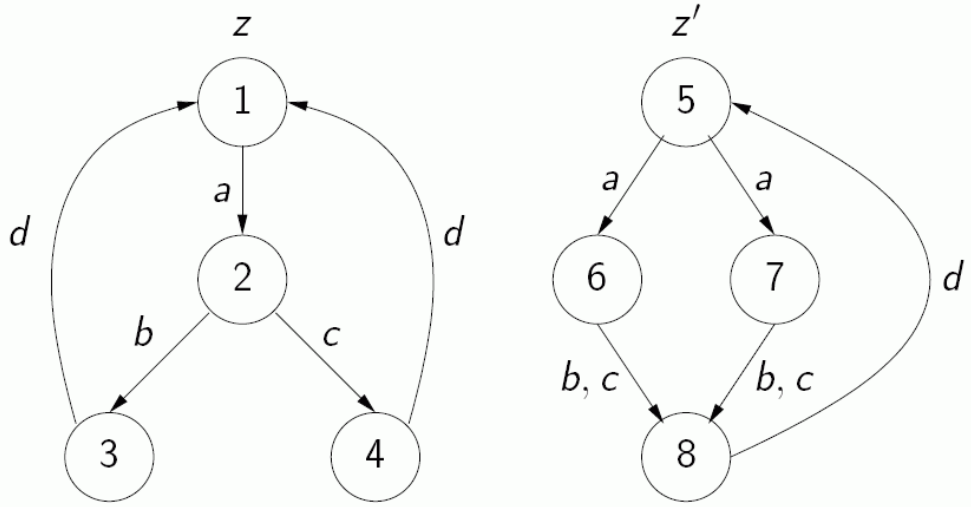
Bisimularität wird auf Englisch auch als bisimilarity oder bisimulation equivalence bezeichnet.

Beispiele:



Die beiden Zustände z, z' sind nicht bisimular.

Beispiele:



Die beiden Zustände $z = 1, z' = 5$ sind bisimular.
Bisimulationsrelation:

$$R = \{(1,5), (2,6), (2,7), (3,8), (4,8)\}$$

Vergleich der verschiedenen Verhaltensäquivalenzen

Wie stehen die verschiedenen Verhaltensäquivalenzen von Zuständen in Transitionssystemen untereinander in Beziehung?

Verweigerungsäquivalenz impliziert S-Sprachäquivalenz (Satz)

Seien z, z' zwei verweigerungsäquivalente Zustände, d.h., es gilt $\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z')$. Dann sind z, z' auch S-sprachäquivalent, d.h., es gilt $S(z) = S(z')$.

Bemerkung: zwei verweigerungsäquivalente Zustände sind jedoch nicht notwendigerweise S^ω-sprachäquivalent.

Bisimularität impliziert Verweigerungsäquivalenz und S^ω-Sprachäquivalenz (Satz)

Seien z, z' zwei bisimulare Zustände, d.h., es gilt $z \sim z'$. Dann sind z und z' auch verweigerungsäquivalent und S^ω-sprachäquivalent.

"Simulations"-Relation als Quasiordnung:

Den Begriff der Simulation erhält man aus der Definition der Bisimulation, wobei nur die erste Bedingung verwendet wird.

Simulation (Definition)

Sei $T = (Z, \rightarrow)$ ein Transitionssystem. Eine Relation $R \subseteq Z \times Z$ auf den Zuständen heißt Simulation, wenn für jedes Paar $(z_1, z_2) \in R$ und für jede Aktion $a \in Act$ gilt:

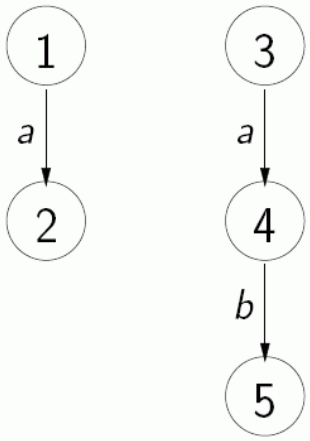
- für jedes z_1' mit $z_1 \xrightarrow{a} z_1'$ gibt es ein z_2' mit $z_2 \xrightarrow{a} z_2'$ und $(z_1', z_2') \in R$.

Wir sagen, dass ein Zustand z_2 einen Zustand z_1 simuliert (in Zeichen: $z_1 \prec z_2$), wenn es eine Simulation R gibt mit $(z_1, z_2) \in R$.

Bemerkung: Aus $z_1 \prec z_2$ folgt immer $S(z_1) \subseteq S(z_2)$ und $S^\omega(z_1) \subseteq S^\omega(z_2)$.

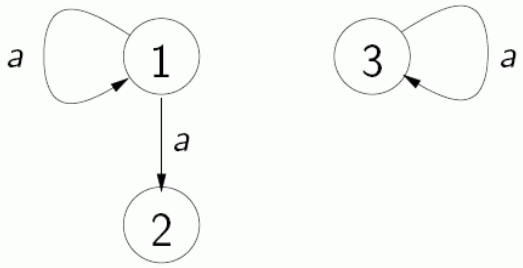
Bemerkungen zur Simulation:

- Es gelte $z_1 \prec z_2$, d.h. z_2 simuliert z_1. Dann gilt nicht notwendigerweise $\mathcal{F}(z_1) \subseteq \mathcal{F}(z_2)$ (oder umgekehrt).



  Da $R = \{(1,3),(2,4)\}$ eine Simulation ist, gilt $1 \prec 3$.
  Es gilt jedoch weder $\mathcal{F}(1) \subseteq \mathcal{F}(3)$ (wegen $(a,\{b\}) \notin \mathcal{F}(3)$), noch $\mathcal{F}(3) \subseteq \mathcal{F}(1)$ (wegen $(ab,\emptyset) \notin \mathcal{F}(1)$).

- Aus $z_1 \prec z_2$ und $z_2 \prec z_1$ folgt nicht notwendigerweise $z_1 \sim z_2$. Das heißt, aus wechselseitiger Simulation folgt nicht immer Bisimularität.



Es gilt $1 \prec 3$, da $\{(1,3),(2,3)\}$ eine Simulation ist, und $3 \prec 1$, da $\{(3,1)\}$ eine Simulation ist. Jedoch: $1 \not\sim 3$.

Anschauliche Begründung: diese beiden Zustände können im Bisimulationsspiel nur dann als nicht bisimular erkannt werden, wenn Spieler I den Spielstein "wechselt". Das ist bei wechselseitiger Simulation nicht möglich.

Sicherheits- und Lebendigkeitseigenschaften

- Jede Eigenschaft von (endlichen oder unendlichen) Abläufen eines Systems kann
  - in eine Sicherheits- *und*
  - in eine Lebendigkeitseigenschaft

  zerlegt werden.

  (engl. safety and liveness properties)

- Sicherheitseigenschaft (in etwa): es passiert nie etwas Schlimmes (z.B. keine Verklemmung)
- Lebendigkeitseigenschaft (in etwa): es passiert irgendwann einmal etwas Gutes (z.B. Terminierung)

Hier: eine Eigenschaft P ist eine Sprache bzw. eine Teilmenge von Act^∞ ($P \subseteq Act^\infty$)

Sicherheitseigenschaft (Definition)

Eine Sprache $P \subseteq Act^\infty$ heißt Sicherheitseigenschaft, wenn folgendes gilt:

1. $P \neq \emptyset$
2. Ein beliebiges Wort $w \in Act^\infty$ ist in P genau dann enthalten, wenn alle (endlichen) Präfixe $v \in Pref(\{w\})$ in P enthalten sind.

Bemerkungen zu Sicherheitseigenschaften:

- Jede Sicherheitseigenschaft ist unter Präfixbildung abgeschlossen. Das heißt, falls ein Wort w die Sicherheitseigenschaft erfüllt, so erfüllen auch alle Präfixe von w die Sicherheitseigenschaft.
- Bei einem unendlichen Wort kann man bereits bei Betrachtung seiner Präfixe entscheiden, ob es in der Sicherheitseigenschaft enthalten ist.

Beispiele:

- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält kein } c\}$
  ist eine Sicherheitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält endlich viele } c\text{'s}\}$
  ist *keine* Sicherheitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält mindestens ein } c\}$
  ist *keine* Sicherheitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält unendlich viele } c\text{'s}\}$
  ist *keine* Sicherheitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält kein Teilwort } abc\}$
  ist eine Sicherheitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid \text{auf jedes } a \text{ in } w \text{ folgt irgendwann ein } b\}$
  ist *keine* Sicherheitseigenschaft.

Lebendigkeitseigenschaft (Definition)

Eine Sprache $P \subseteq Act^\infty$ heißt Lebendigkeitseigenschaft, wenn folgendes gilt:

1. für jedes $u \in Act^*$ gibt es ein $v \in Act^\infty$, so dass $uv \in P$.

Das heißt, jedes beliebige endliche Wort (nicht notwendigerweise aus P) muss zu einem Wort verlängerbar sein, das die Lebendigkeitseigenschaft P erfüllt.

Beispiele:

- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält kein } c\}$
  ist *keine* Lebendigkeitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält endlich viele } c\text{'s}\}$
  ist eine Lebendigkeitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält mindestens ein } c\}$
  ist eine Lebendigkeitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält unendlich viele } c\text{'s}\}$
  ist eine Lebendigkeitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid w \text{ enthält kein Teilwort } abc\}$
  ist *keine* Lebendigkeitseigenschaft.
- $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid$ auf jedes a in w folgt irgendwann ein $b\}$
  ist eine Lebendigkeitseigenschaft.

Weitere Bemerkungen:

- Es gibt Eigenschaften, die weder Sicherheits- noch Lebendigkeitseigenschaften sind:
  - die leere Menge $\emptyset$
  - $\{w \in \{a,b,c\}^\infty \mid$
    w enthält kein a und mindestens ein $b\}$
- Ebenso gibt es (genau eine) Eigenschaft, die sowohl Sicherheits- als auch Lebendigkeitseigenschaften ist:
  - die Menge aller endlichen und unendlichen Wörter Act^∞

Gleichzeitig Sicherheits- und Lebendigkeitseigenschaft

Ist P zugleich Sicherheits- und Lebendigkeitseigenschaft, dann gilt $P = Act^\infty$.

Der zentrale Satz über Sicherheits- und Lebendigkeitseigenschaften lautet wie folgt:

Satz

Sei $P \subseteq Act^\infty$ eine beliebige Sprache mit $P \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Sicherheitseigenschaft S und eine Lebendigkeitseigenschaft L mit $S \cap L = P$.

Beispiel: wir zerlegen

$$P = \{w \in \{a, b, c\}^\infty \mid w \text{ enthält kein } a \text{ und mindestens ein } b\}$$

in eine Sicherheits- und eine Lebendigkeitseigenschaft.

- $S = \{w \in \{a, b, c\}^\infty \mid w \text{ enthält kein } a\}$
- $L = P \cup \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ enthält ein } a\}$
  $= \{w \in \{a, b, c\}^\infty \mid w \text{ enthält kein } a \text{ und mindestens ein } b\}$
  $\cup \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ enthält ein } a\}$

Bemerkung: die Zerlegung in Sicherheits- und Lebendigkeitseigenschaften ist nicht eindeutig. In diesem Fall hätte auch folgende Lebendigkeitseigenschaft alle Bedingungen erfüllt

$$L' = \{w \in \{a, b, c\}^\infty \mid w \text{ enthält mindestens ein } b\}$$

Ausschnitte entnommen aus König (2010)
(genaue Quellenangaben siehe http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs10_lit.htm)