

Formale Systeme

Vorlesung:

Winfried Kurth

Lehrstuhl Computergrafik und ökologische Informatik

Büsgenweg 4, Raum 90 (1. Stock)

39-9715

wk<at>informatik.uni-goettingen.de

<http://www.uni-goettingen.de/de/72781.html>

Übung:

Reinhard Hemmerling

Büsgenweg 4, Raum 89 (1. Stock)

39-3697

rhemmer<at>gwdg.de

<http://www.uni-goettingen.de/de/96654.html>

Hausaufgaben zur Übung: alle 14 Tage neues Übungsblatt, Bearbeitungszeit 10 Tage, Teamarbeit! (bis zu 4 Personen je Gruppe), es erfolgt genaue Durchsicht und Korrektur der eingesandten Lösungen

Hinweise zur Lehrveranstaltung und Material / Lit.:

http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs11_home.htm

Inhaltsübersicht:

1. Logik (einschließlich Programmieren in Prolog)
2. Relationen und Inferenz
3. Algebra und Begriffsverbände
4. Regelbasierte Systeme
5. Modelle für Nebenläufigkeit

Prüfung: Abschlussklausur (90 Min.)

1. Logik

Geschichte:

erste Ansätze bei Aristoteles, Leibniz

Gottlob Frege (Ende 19. Jh.)

um 1900 Grundlagenkrise der Mathematik, löste verstärktes Interesse an Logik aus

1920 David Hilbert: "Hilbertsches Programm" – Forderung, die Mathematik als widerspruchsfrei nachzuweisen

1930 Kurt Gödel: Unvollständigkeitssätze

1963 Paul Cohen: Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und der Kontinuumshypothese

Zielsetzung der math. Logik: Untersuchung der Grundlagen der Mathematik

Voraussetzung: es gibt ein "mathematisches Universum" – *Hintergrundmathematik* (z.B. Mengen, Relationen, Funktionen, Beweismethoden...)

in der Logik zu entwerfende formale Mathematik: *Objektmathematik* – eine Imitation der Hintergrundmathematik, so formuliert, dass eine Maschine sie verstehen und mathematisch argumentieren kann.

Anwendungen: automatisches Beweisen von Theoremen, Wissensrepräsentation, Schlussfolgern auf Grundlage einer Wissensbasis, Auffinden von Gesetzmäßigkeiten in Daten, Auffinden von Widersprüchen, Modelle von Systemen

elementarste Variante der Logik:

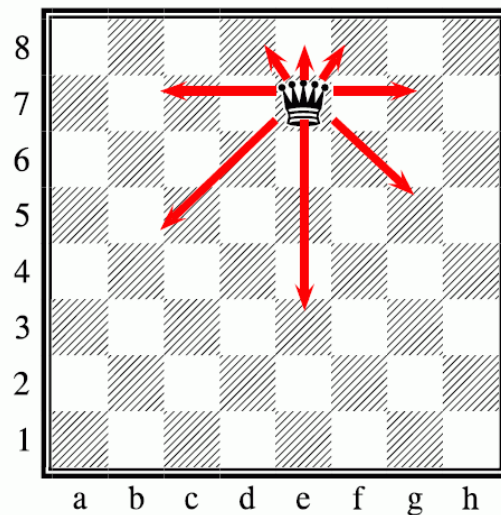
Aussagenlogik

gleich ein Anwendungsbeispiel:

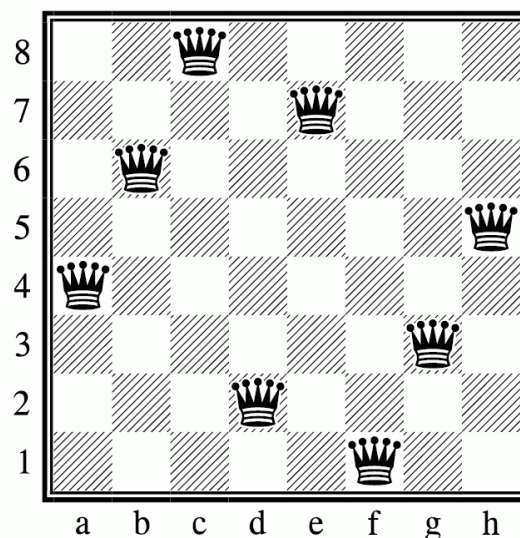
Das 8-Damen-Problem

Man plaziere 8 Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

Bewegungs- (Bedrohungs-) möglichkeiten der Dame im Schach:



Eine Lösung des 8-Damen-Problems:



aussagenlogische Codierung des Problems:

boolesche Variable $D_{i,j} = \text{wahr}$, falls eine Dame auf Feld (i, j) steht, sonst *falsch* (benutze Zahlen statt Buchstaben fürs Schachbrett)

Bedingungen für Platzierung:

Dame auf Feld $(1, 1)$ bedroht bestimmte Felder:

$$D_{1,1} \rightarrow \neg D_{1,2} \wedge \neg D_{1,3} \wedge \neg D_{1,4} \wedge \neg D_{1,5} \wedge \neg D_{1,6} \wedge \neg D_{1,7} \wedge \neg D_{1,8}$$

$$D_{1,1} \rightarrow \neg D_{2,1} \wedge \neg D_{3,1} \wedge \neg D_{4,1} \wedge \neg D_{5,1} \wedge \neg D_{6,1} \wedge \neg D_{7,1} \wedge \neg D_{8,1}$$

$$D_{1,1} \rightarrow \neg D_{2,2} \wedge \neg D_{3,3} \wedge \neg D_{4,4} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{8,8}$$

für Feld $(5, 7)$:

$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{5,8} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$

$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{1,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{8,7}$$

$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{6,8} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3}$$

$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,8} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}$$

Für jedes Feld (i, j) sei $FE_{i,j}$ die Konjunktion der Formeln, die die Einschränkungen für dieses Feld beschreiben.

Zusätzliche Bedingung: für genau 8 Felder (i, j) soll $D_{i,j}$ wahr sein. Gleichwertig: für jedes $k, k = 1, \dots, 8$, soll R_k wahr sein:

$$D_{1,k} \vee D_{2,k} \vee D_{3,k} \vee D_{4,k} \vee D_{5,k} \vee D_{6,k} \vee D_{7,k} \vee D_{8,k}$$

Lösung des Problems:

finde Belegung aller 64 Variablen $D_{i,j}$ so, dass alle Formeln $FE_{i,j}$ und R_k wahr werden (*Erfüllbarkeitsproblem*).

Vokabular der Aussagenlogik (Objektmathematik)

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- \neg Negationssymbol („nicht“)
- \wedge Konjunktionssymbol („und“)
- \vee Disjunktionssymbol („oder“)
- \rightarrow Implikationssymbol („wenn ... dann“)
- \leftrightarrow Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
- (,) die beiden Klammern

Signatur

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge Σ von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \dots\}.$$

Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Aussagenlogische Formeln:

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der *Formeln über Σ* (oder der *Aussagen über Σ*) induktiv definiert durch

1. $1, 0 \in For0_\Sigma, \Sigma \subseteq For0_\Sigma$

2. Mit A, B sind auch

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$$

Elemente von $For0_\Sigma$

Wir nennen die Sonderzeichen mit Ausnahme der Klammern auch die *logischen Operatoren*, unter ihnen $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ die *logischen Konstanten*. Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Wenn klar ist, um welches Σ es sich handelt, schreiben wir oft einfach $For\mathbf{0}$ statt $For\mathbf{0}_\Sigma$.

Beweisprinzip der *strukturellen Induktion*:

Gilt für eine Eigenschaft *Eig*

1. $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ und jedes Atom $p \in \Sigma$ haben die Eigenschaft *Eig*
2. Für beliebige $A, B \in For\mathbf{0}_\Sigma$:
 - Hat A die Eigenschaft *Eig*, dann auch $\neg A$.
 - Haben A, B die Eigenschaft *Eig*, dann auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$.

dann gilt *Eig* für alle $A \in For\mathbf{0}_\Sigma$.

Man nennt die *strukturelle Induktion* auch Induktion nach dem Aufbau der Formeln.

Variante: Definition einer Funktion auf der Menge der Formeln

Ist eine Funktion f

1. eindeutig definiert auf $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ und den Atomen.
2. sind $f(\neg A)$, $f((A \wedge B))$, $f((A \vee B))$, $f((A \rightarrow B))$, $f((A \leftrightarrow B))$ eindeutig definiert unter der Annahme, es seien $f(A)$, $f(B)$ schon definiert

dann ist f auf der gesamten Menge $For\mathbf{0}_\Sigma$ eindeutig definiert.

Teilformeln:

Eine *Teilformel* einer Formel A ist ein Teilwort von A , welches Formel ist.

Abkürzungen

1. Ganz außen stehende Klammern in einer Formel dürfen weggelassen werden.
2. Klammern dürfen weggelassen werden gemäß der Prioritätsregel: \wedge, \vee binden stärker als $\rightarrow, \leftrightarrow$. (Achtung: nach Def. 1.1 ist $\neg A \wedge B$ immer als $(\neg A \wedge B)$ und nicht als $\neg(A \wedge B)$ zu lesen, da zu \neg keine Klammern gehören.)

Wegen der Assoziativgesetze für \wedge und \vee können wir für $A \wedge (B \wedge C)$ oder $(A \wedge B) \wedge C$ kurz $A \wedge B \wedge C$ schreiben, entsprechend $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, entsprechend $A_1 \vee \dots \vee A_n$. Wir sprechen von Konjunktionen bzw. Disjunktionen.

Semantik der Aussagenlogik

Wahrheitswerte

Für alles Folgende seien zwei feste, ansonsten beliebige Objekte \mathbf{W}, \mathbf{F} ausgezeichnet, die wir die beiden *Wahrheitswerte* nennen. (Vorausgesetzt wird nur, daß beide voneinander verschieden sind.)

Interpretation

Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Eine **Interpretation** über Σ ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}.$$

Auswertung

Zu jedem I über Σ wird eine zugehörige **Auswertung** der Formeln über Σ definiert

$$val_I : For_0\Sigma \rightarrow \{W, F\}$$

mit:

$$val_I(\mathbf{1}) = W$$

$$val_I(\mathbf{0}) = F$$

$$val_I(P) = I(P) \quad \text{für jedes } P \in \Sigma$$

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} F & \text{falls } val_I(A) = W \\ W & \text{falls } val_I(A) = F \end{cases}$$

val_I auf $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ wird gemäß der folgenden Tabelle berechnet

$val_I(A), val_I(B)$	$val_I(C)$ für $C =$			
	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
W,W	W	W	W	W
W,F	F	W	F	F
F,W	F	W	W	F
F,F	F	F	W	W

Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- 1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- 2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
- 3 $\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$
- 4 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$
- 5 $(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$

Beispiel

Bei der Auswertung einer Formel werden der Übersichtlichkeit halber die Werte der Teilformeln mitnotiert.

$$\Sigma = \{P, Q, R\}$$

$$I : I(P) = \mathbf{W}, I(Q) = \mathbf{F}, I(R) = \mathbf{W}.$$

Wir berechnen $val_I((P \wedge \neg R) \rightarrow \neg(R \vee Q))$

P	Q	R	$\neg R$	$(P \wedge \neg R)$	$(R \vee Q)$	$\neg(R \vee Q)$	$(P \wedge \neg R) \rightarrow \neg(R \vee Q)$
\mathbf{W}	\mathbf{F}	\mathbf{W}	\mathbf{F}	\mathbf{F}	\mathbf{W}	\mathbf{F}	\mathbf{W}

Boolesche Funktionen

Eine *Boole'sche Funktion* ist eine Funktion von $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ nach $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$, für ein $n \in \mathbb{N}$. (\mathbb{N} ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.) Ist n die Anzahl der in einer Formel A auftretenden Atome, und legt man für diese eine *bestimmte Reihenfolge* fest – identifiziert sie also mit Argumentstellen –, so liefert die Wahrheitstafel von A eine Boole'sche Funktion $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$. Es ist bekannt (leichte *Übung*), daß sich umgekehrt auch *jede* Boole'sche Funktion als Wahrheitstafel einer Formel in dieser Weise erhalten läßt.

Modell, Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit

- Ein **Modell** einer Formel $A \in For_0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = \mathbf{W}$.
- Zu einer Formelmengemenge $M \subseteq For_0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I , welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- $A \in For_0_\Sigma$ heißt **allgemeingültig**
gdw
 $val_I(A) = \mathbf{W}$ für jede Interpretation I über Σ .
- $A \in For_0_\Sigma$ heißt **erfüllbar**
gdw
es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = \mathbf{W}$.

Es gilt

A erfüllbar $\Leftrightarrow \neg A$ nicht allgemeingültig,

A allgemeingültig $\Leftrightarrow \neg A$ nicht erfüllbar.

Man nennt die allgemeingültigen Formeln auch *Tautologien*. (Erst in der Prädikatenlogik werden beide Begriffe differieren.)

Beispiele allgemeingültiger Formeln

$A \rightarrow A$	Selbstimplikation
$\neg A \vee A$	Tertium non datur
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	Abschwächung
$\mathbf{0} \rightarrow A$	Ex falso quodlibet
$A \wedge A \leftrightarrow A$	Idempotenz
$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	Absorption
$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität
$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Kontraposition
$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow$ $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Verteilen
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	De Morgan
$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	De Morgan

Semantischer Folgerungsbegriff:

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For_0_\Sigma$, $A, B \in For_0_\Sigma$.

■ $M \models A$ lies: **aus M folgt A**

gdw

Jedes Modell von M ist auch Modell von A .

■ $A, B \in For_0_\Sigma$ heißen **logisch äquivalent**

gdw

$A \models_\Sigma B$ und $B \models_\Sigma A$

Einfache Sätze:

- A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar
- $A \models B$ gdw $\models A \rightarrow B$
- $M \cup \{A\} \models B$ gdw $M \models A \rightarrow B$
- A, B sind logisch äquivalent gdw $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig

zum letztgenannten Satz:

Zwei Formeln A, B sind logisch äquivalent genau dann, wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Beweis A, B logisch äquivalent

$\Leftrightarrow \text{val}_I(A) = \text{val}_I(B)$ für alle Interpretationen I (über Σ)
(d. h. A und B haben dieselben Modelle)

$\Leftrightarrow \models_{\Sigma} A \leftrightarrow B$

$\Leftrightarrow A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig.

Satz:

Logische Äquivalenz ist bezüglich der aussagenlogischen Operatoren eine Kongruenzrelation auf $For0_{\Sigma}$. Insbesondere gilt für beliebige $A \in For0_{\Sigma}$

A allgemeingültig $\Leftrightarrow A$ logisch äquivalent zu $\mathbf{1}$

A unerfüllbar $\Leftrightarrow A$ logisch äquivalent zu $\mathbf{0}$.

Def. "Interpolante":

Seien A, B aussagenlogische Formeln, so daß $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist. Eine Formel C heißt eine *Interpolante* von $A \rightarrow B$, falls

1. $A \rightarrow C$ und $C \rightarrow B$ Tautologien sind und
2. in C nur solche aussagenlogischen Atome $P \in \Sigma$ vorkommen, die sowohl in A als auch in B vorkommen.
An eventuelle Vorkommen von $\mathbf{1}$ und $\mathbf{0}$ in C werden keinerlei Einschränkungen gemacht.

Satz (*Craigsches Interpolationslemma*):

Es seien A und B zwei aussagenlogische Formeln und $A \rightarrow B$ sei eine Tautologie. Dann existiert zu A und B eine Interpolante.

(Beweis siehe Schmitt 2008.)

Disjunktive und konjunktive Normalform

Definitionen:

- Ein **Literal** ist ein Atom oder ein negiertes Atom
- Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.
- Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

Sätze:

- 1 Zu jeder aussagenlogischen Formel A gibt es eine logisch äquivalente in disjunktiver Normalform und ebenso eine logisch äquivalente in konjunktiver Normalform.
- 2 Die Algorithmen zur Herstellung beider Normalformen ergeben sich unmittelbar aus elementaren Tautologien.
- 3 Ist die Wahrheitstafel einer Formel gegeben, so lassen sich disjunktive und konjunktive Normalform aus dieser „direkt“ ablesen.
- 4 Disjunktive und konjunktive Normalform einer Formel sind nicht eindeutig.

Beispiel zur exponentiellen Länge einer KNF:

Um zu prüfen, ob

$$A_n = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge \dots \wedge (\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,2})$$

eine Tautologie ist, wird die Unerfüllbarkeit von

$$\neg A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \dots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

geprüft. Die konjunktive Normalform von $\neg A_n$ ist:

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)} \mid f : 1, \dots, n \rightarrow 1, 2\}.$$

Für $n = 3$ ist das:

$$\begin{aligned} & (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\ & (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \wedge \\ & (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\ & (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \end{aligned}$$

In $\neg A_n$ treten $2 * n$ Literale auf, in der KNF $n * 2^n$.

Jedoch: mit Einführung von Hilfsatomen in die Formel lässt sich immer eine äquivalente "kurze KNF" (kknf) konstruieren.

Zu jeder aussagenlogischen Formel A mit n Literalvorkommen gibt es eine konjunktive Normalform A_{kknf} , so dass

- *A ist erfüllbar gdw A_{kknf} erfüllbar ist,*
- *A_{kknf} enthält höchstens $c * n$ Literalvorkommen für eine von n unabhängige Konstante c ,*

A_{kknf} kann effektiv aus A in linearer Zeit konstruiert werden. (siehe Schmitt 2008, S. 30ff.)

Shannonsche Normalform

eine graphbasierte Normalform, die auf Shannon 1938, Church 1956 und Bryant 1986 zurückgeht

Shannon-Formeln:

Shannon Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator sh
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen P_1, \dots, P_n, \dots

Der Wahrheitswerteverlauf von sh wird gegeben durch

$$sh(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} P_2 & \text{falls } P_1 = 0 \\ P_3 & \text{falls } P_1 = 1 \end{cases}$$

oder in Tabellenform:

P_1	1	1	1	1	0	0	0	0
P_2	1	1	0	0	1	1	0	0
P_3	1	0	1	0	1	0	1	0
$sh(P_1, P_2, P_3)$	1	0	1	0	1	1	0	0

Eigenschaften des sh -Operators:

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
- $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
- $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$
- $sh(P_1, P_2, P_2) \leftrightarrow P_2$
- $sh(sh(P_1, P_2, P_3), P_4, P_5) \leftrightarrow sh(P_1, sh(P_2, P_4, P_5), sh(P_3, P_4, P_5))$
- $A \leftrightarrow sh(P, A_{P=0}, A_{P=1})$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

- ① Die Konstanten 0, 1 sind normierte *sh*-Formeln.
- ② $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
 - A und B normierte *sh*-Formeln sind und
 - für jede in A oder B vorkommende Aussagenvariable P_j gilt $j > i$.

Theorem

*Zu jeder aussagenlogischen Formel A gibt es eine äquivalente normierte *sh*-Formel B .*

Beweis: Induktion nach der Anzahl n der in A vorkommenden Aussagevariablen.

Für $n = 0$ kann A logisch äquivalent auf eine der Konstanten 0 oder 1 reduziert werden. Konstanten sind normierte *sh*-Formeln.

Im Induktionsschritt wählen wir die in A vorkommende Aussagevariable P_i mit dem kleinsten Index. Mit A_0 bezeichnen wir die Formel, die aus A entsteht, indem jedes Vorkommen von P_i durch 0 ersetzt wird. Entsprechend wird A_1 gebildet. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es normierte *sh*-Formeln B_0, B_1 , die logisch äquivalent (siehe Def. 2.16) sind zu A_0, A_1 . Offensichtlich ist A äquivalent zu $sh(P_i, B_0, B_1)$, und $sh(P_i, B_0, B_1)$ ist eine normierte *sh*-Formel.

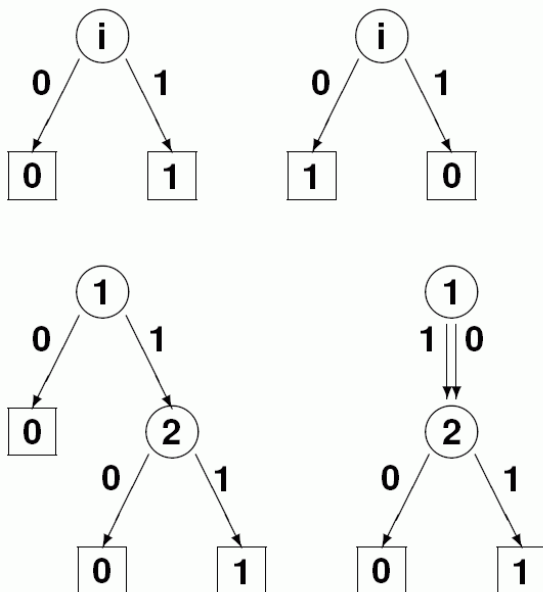
Definition "Shannon-Graph":

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

- Jedem nichtterminalen Knoten v ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet.
- Von jedem nichtterminalen Knoten v gehen zwei Kanten aus. Eine davon ist mit 0, die andere mit 1 gekennzeichnet.
- Jedem terminalen Knoten v ist eine der Zahlen 0 oder 1 zugeordnet, bezeichnet mit $wert(v)$.
- Ist der nichtterminale Knoten w ein unmittelbarer Nachfolger von v , dann gilt $index(v) < index(w)$.
- Es gibt genau einen Wurzelknoten.

beachte: jeder Shannon-Graph ist azyklisch.

Beispiele für Shannon-Graphen:



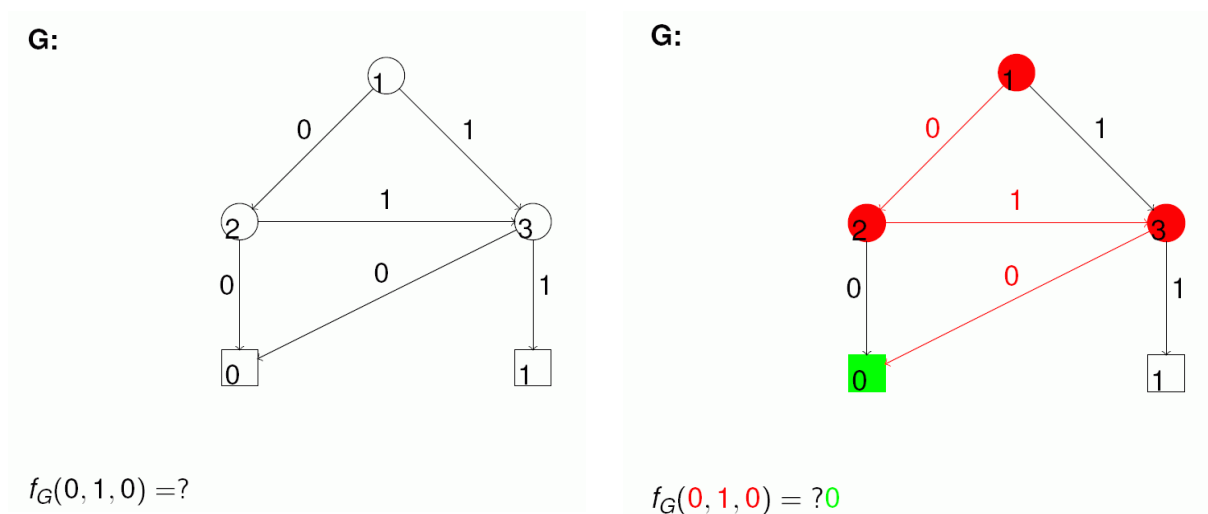
Es gibt eine offensichtliche Entsprechung zwischen Shannon-Graphen und normierten Shannon-Formeln:

n -te Variable entspricht den Knoten mit Index n .

Shannon-Graphen und boolesche Funktionen:

- Jedem *sh*-Graphen G kann man eine m -stellige Boolesche Funktion f_G zuordnen, wobei m die Anzahl der in G vorkommenden verschiedenen Indizes i_1, \dots, i_m ist.
- Wir fassen f_G als eine Funktion mit den Eingabevariablen P_{i_1}, \dots, P_{i_m} auf und bestimmen den Funktionswert $f_G(P_{i_1}, \dots, P_{i_m})$, indem wir an der Wurzel von G beginnend einen Pfad durch G wählen. Am Knoten v folgen wir der Kante 0, wenn die Eingabevariable $P_{index(v)}$ den Wert 0 hat, sonst der Kante 1.
- Der Wert des terminalen Knotens ist dann der gesuchte Funktionswert.

Beispiel:



Umgekehrt gilt auch:

Zu jeder Boole'schen Funktion $f : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$ und jeder aufsteigenden Folge $i_1 < \dots < i_m$ von Indizes gibt es einen *sh*-Graphen G mit

$$f_G = f.$$

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 37f.

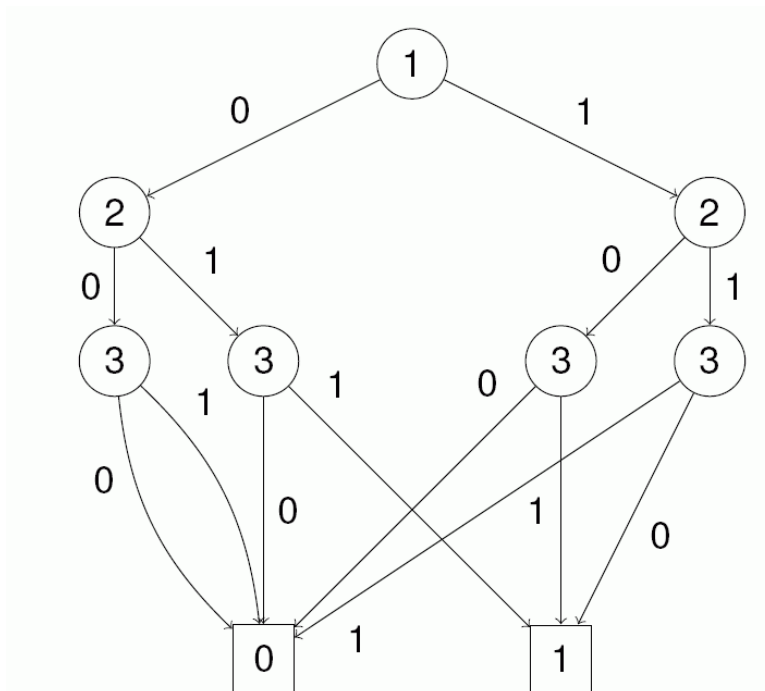
Reduzierte Shannon-Graphen

Ein *sh*-Graph heißt *reduziert*, wenn

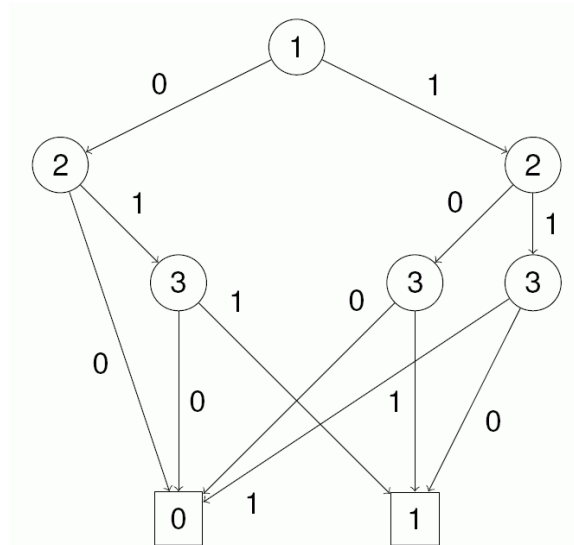
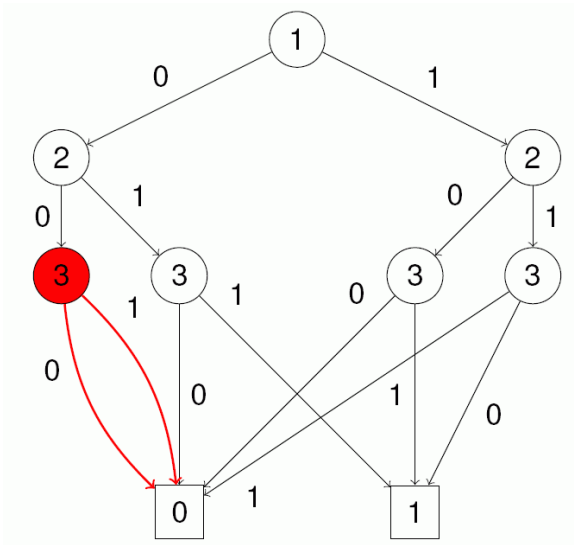
- 1 es keine zwei Knoten v und w ($v \neq w$) gibt, so daß der in v verwurzelte Teilgraph G_v mit dem in w verwurzelten Teilgraph G_w isomorph ist.
- 2 es keinen Knoten v gibt, so dass die beiden von v ausgehenden Kanten zum selben Nachfolgerknoten führen.

Ein reduzierter Shannongraph heißt auch *ordered binary decision diagram* (OBDD).

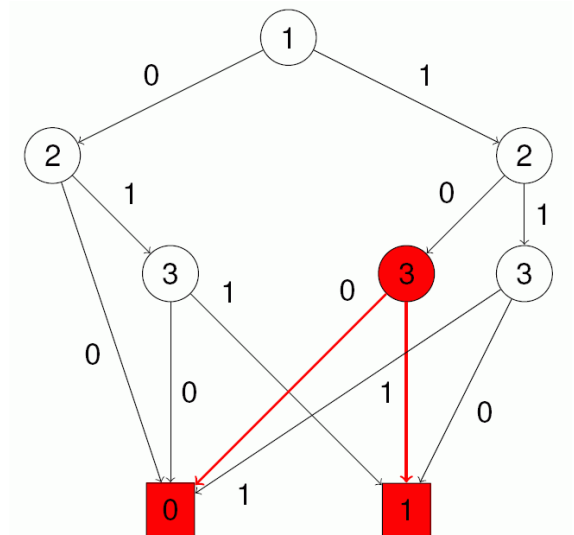
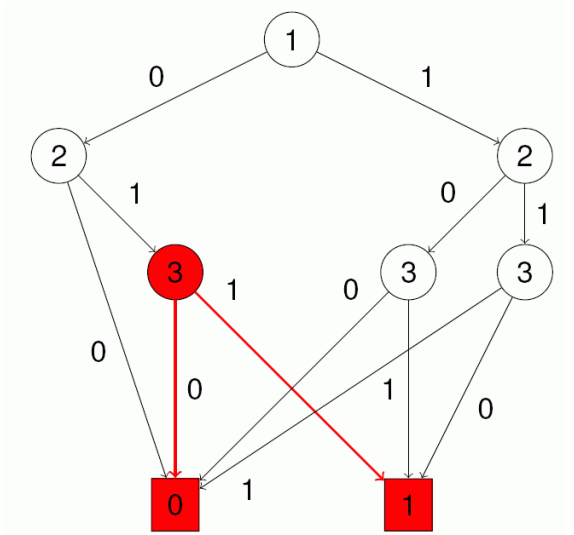
Beispiel für eine Reduktion eines Shannon-Graphen:



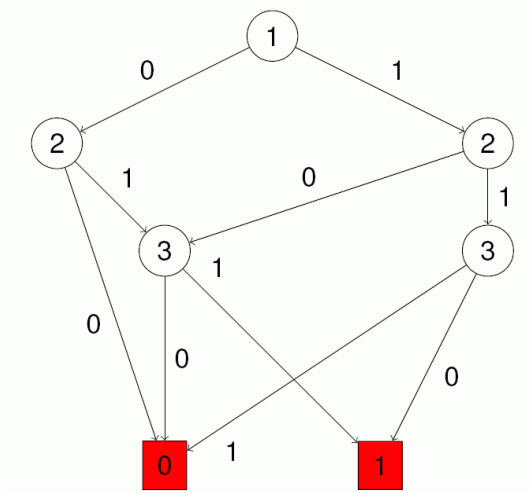
zuerst: Entfernen doppelter Kanten (mitsamt dem Knoten, von dem diese ausgehen)



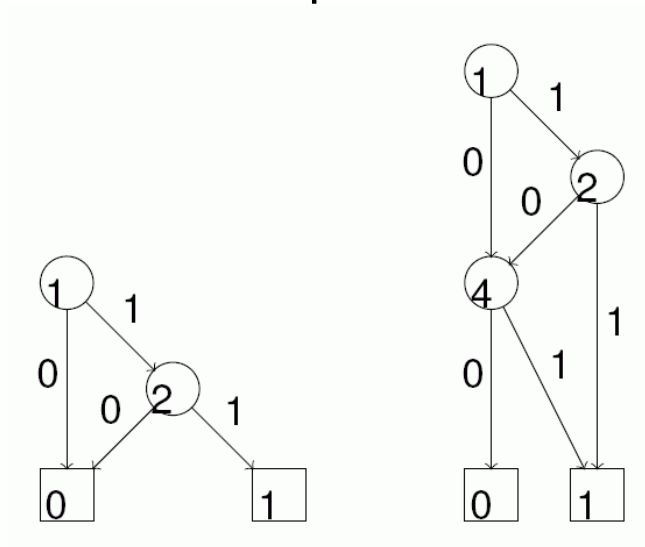
Auffinden isomorpher Teilgraphen:



einer davon darf entfernt werden (einlaufende Kante neu verknüpfen):



Weitere Beispiele



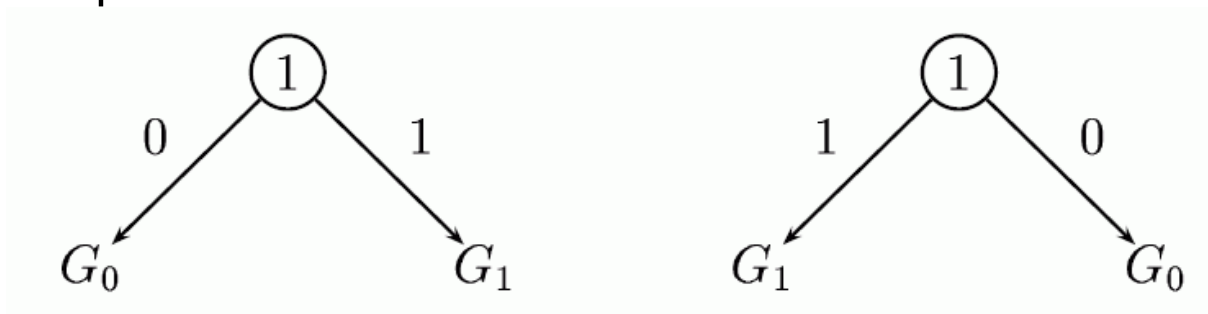
Isomorphie von Shannon-Graphen

Seien zwei *sh*-Graphen H, G gegeben. Ihre Knotenmengen seien V_1, V_2 .

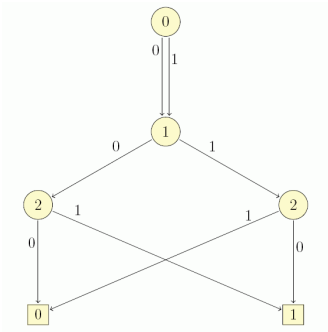
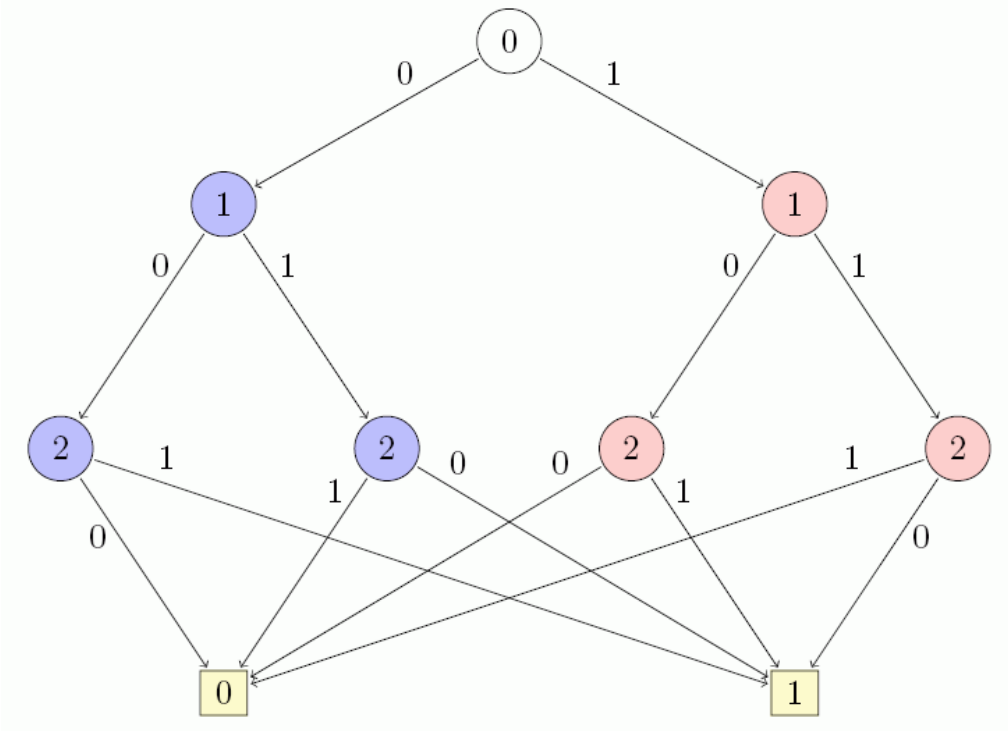
H, G heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung π von V_1 nach V_2 gibt mit:

- 1 $index(k) = index(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$
- 2 $wert(k) = wert(\pi(k))$ für jeden Terminalknoten $k \in V_1$
- 3 Für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$, dessen 0-Kante/1-Kante zu dem Knoten k_0/k_1 führt, gilt: die 0-Kante von $\pi(k)$ führt zu $\pi(k_0)$, die 1-Kante zu $\pi(k_1)$.

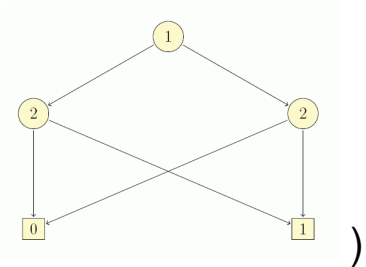
einfachstes Beispiel zweier isomorpher Shannon-Graphen:



komplexeres Beispiel: die beiden Teilgraphen unterhalb des Wurzelknotens sind isomorph:



(somit Reduktion möglich auf und dann auf



Ein Kriterium für Reduziertheit:

Sei G ein Shannongraph, so daß für jedes Paar von Knoten v, w gilt

*wenn die 1-Nachfolger von v und w gleich sind und
die 0-Nachfolger von v und w gleich sind
dann $v = w$*

Dann erfüllt G die Bedingung (1) aus der Definition reduzierter Shannongraphen, d.h. für jedes Paar x, y von Knoten gilt

*wenn G_x isomorph zu G_y ist
dann $x = y$*

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 41.

Eindeutigkeitssatz für reduzierte Shannon-Graphen:

Sind G, H reduzierte sh-Graphen zu $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$, dann gilt

$$f_G = f_H \Leftrightarrow G \cong H.$$

(Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten sh-Graphen H mit $f = f_H$).

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 41ff.

Wie die "einfache" KNN kann auch der Shannon-Graph in ungünstigen Fällen "groß" werden:

[BDD für Multiplikationen]

- X enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \dots, x_{k-1}, y_0, \dots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \dots x_{k-1}$ und $y = y_0 \dots y_{k-1}$ bezeichnen k -stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolesche Funktion, die das i -te Bit des Produktes von x mit y beschreibt.

Theorem

Für jede Ordnung $<$ der Variablen in X gibt es einen Index $0 \leq i < 2k$, so dass der BDD $B_{Mult_i, <}$ mindestens $2^{k/8}$ Knoten besitzt.

Das SAT-Problem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in \text{For}_0$

Frage: Ist F erfüllbar?

Gibt es eine Interpretation I mit $\text{val}_I(F) = \mathbf{1}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Gäbe es einen (deterministischen) polynomialen Entscheidungsalgorithmus für die Erfüllbarkeit, dann wäre $NP = P$, d. h. jedes nichtdeterministisch-polynomiale Entscheidungsproblem auch deterministisch-polynomial.

vereinfachte Varianten des Problems:

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)
- k -KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.

Horn-Formeln

Def.:

Eine *Horn-Formel* ist eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform, in der jede Disjunktion höchstens ein positives Literal enthält. Eine solche Disjunktion heißt eine *Horn-Klausel*.

Alternative Schreibweise:

$\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$
$\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$
A	A

Dabei heißt $B_1 \wedge \dots \wedge B_m$ der *Rumpf* und A der *Kopf* der Horn-Klausel $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$.

Beispiel einer Horn-Formel:

$$\begin{aligned} & \neg P \\ \wedge & (Q \vee \neg R \vee \neg S) \\ \wedge & (\neg Q \vee \neg S) \\ \wedge & R \wedge S \wedge (\neg Q \vee P) \end{aligned}$$

Alternative Schreibweise

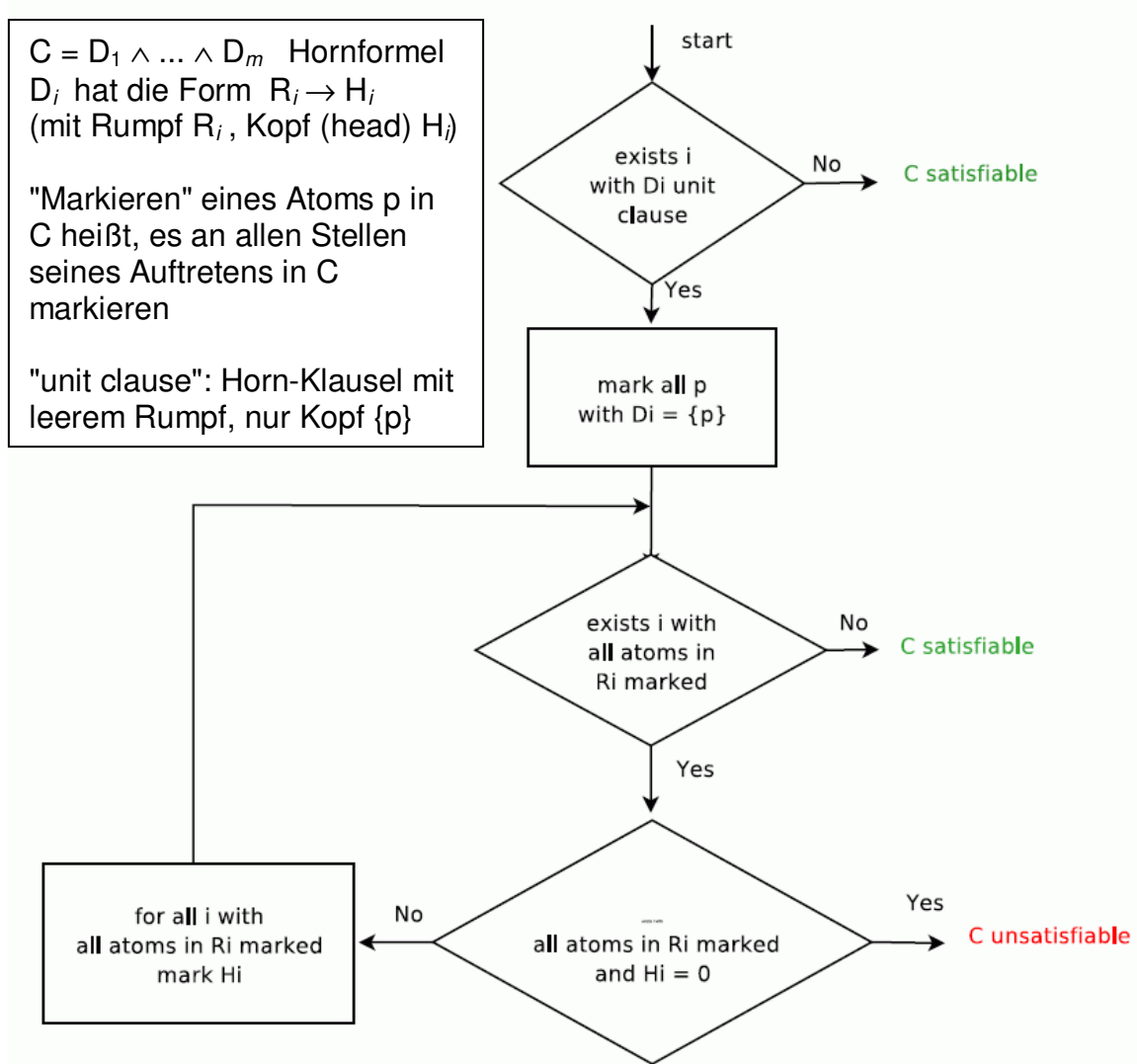
$$\begin{aligned} & (P \rightarrow \mathbf{0}) \\ \wedge & (R \wedge S \rightarrow Q) \\ \wedge & (Q \wedge S \rightarrow \mathbf{0}) \\ \wedge & R \wedge S \wedge (Q \rightarrow P) \end{aligned}$$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln:

Satz:

Für Horn-Formeln ist die Erfüllbarkeit in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis durch Angabe eines Entscheidungsalgorithmus:



Korrektheitsbeweis für diesen Algorithmus siehe Schmitt (2008), S. 49ff.

Ausschnitte entnommen aus Beckert (2010) und Schmitt (2008)