Prädikatenlogik 1. Stufe

(kurz: PL1)

Aussagenlogik zu wenig ausdrucksstark für die meisten Anwendungen

notwendig: Existenz- und Allaussagen

Beispiel:

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
Also ist Sokrates sterblich.

Prädikatenlogische Formalisierung:

$$\forall x(\text{Mensch}(x) \to \text{sterblich}(x))$$
$$\text{Mensch}(\text{Sokrates})$$
$$\text{sterblich}(\text{Sokrates})$$

Logische Zeichen: $\forall x$, $\to$

Anwendungsabhängiges Vokabular:
Mensch(.), sterblich(.), Sokrates

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe

Definition: Logische Zeichen

Wie in der Aussagenlogik:

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$

Neu:

$\forall$	Allquantor
$\exists$	Existenzquantor
v_i	Individuenvariablen, $i \in N$
$\doteq$	objektsprachliches Gleichheitssymbol (in der Lit. auch $\equiv$)
,	Komma

Definition: Signatur

Eine *Signatur* ist ein Tripel $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ mit:

- F_Σ, P_Σ sind endliche oder abzählbar unendliche Mengen
- F_Σ, P_Σ und die Menge der Sondersymbole sind paarweise disjunkt
- $\alpha_\Sigma : F_\Sigma \cup P_\Sigma \rightarrow N$.

$f \in F_\Sigma$ heißt Funktionssymbol,
$p \in P_\Sigma$ heißt Prädikatssymbol.
f ist n-stelliges Funktionssymbol, wenn $\alpha_\Sigma(f) = n$;
p ist n-stelliges Prädikatssymbol, wenn $\alpha_\Sigma(p) = n$; Ein nullstelliges Funktionssymbol heißt auch Konstantensymbol oder kurz Konstante,
ein nullstelliges Prädikatsymbol ist ein *aussagenlogisches Atom*.

Definition: Terme

$Term_\Sigma$, die Menge der *Terme über* Σ, ist induktiv definiert durch

1. $Var \subseteq Term_\Sigma$
2. Mit $f \in F_\Sigma$,
   $\alpha_\Sigma(f) = n$,
   $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$

   ist auch $f(t_1, \ldots, t_n) \in Term_\Sigma$

Ein Term heißt *Grundterm*, wenn er keine Variablen enthält.

Definition: Atomare Formeln

At_Σ, die Menge der *atomaren Formeln über* Σ:

$$\begin{aligned} At_\Sigma \quad := \quad & \{s \doteq t \mid s, t \in Term_\Sigma\} \cup \\ & \{p(t_1, \ldots, t_n) \mid p \in P_\Sigma, t_i \in Term_\Sigma\} \end{aligned}$$

Definition: Formeln

For_Σ, die Menge der *Formeln über* Σ, ist induktiv definiert durch

1. $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\} \cup At_\Sigma \subseteq For_\Sigma$
2. Mit $x \in Var$ und $A, B \in For_\Sigma$ sind ebenfalls in For_Σ:

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B), \forall x A, \exists x A$$

Gebundene und freie Variablen:

Definition

- Hat eine Formel A die Gestalt $\forall x B$ oder $\exists x B$, so heißt B der Wirkungsbereich des *Präfixes* $\forall x$ bzw. $\exists x$ von A.
- Ein Auftreten einer Variablen x in einer Formel A heißt gebunden, wenn es innerhalb des Wirkungsbereichs eines Präfixes $\forall x$ oder $\exists x$ einer Teilformel von A stattfindet.
- Ein Auftreten einer Variablen x in einer Formel A heißt frei, wenn es nicht gebunden ist und nicht unmittelbar rechts neben einem Quantor stattfindet.

$$\forall x(p_0(x, y) \rightarrow \forall z(\exists y\ p_1(y, z) \vee \forall x\ p_2(f(x), x)))$$

gebundene Vorkommen
freie Vorkommen

Definition

Es sei $A \in For_\Sigma$ und $t \in Term_\Sigma$.
$Bd(A) := \{x \mid x \in Var, x$ tritt gebunden in A auf$\}$
$Frei(A) := \{x \mid x \in Var, x$ tritt frei in A auf$\}$.
$Var(A) := Frei(A) \cup Bd(A)$
$Var(t) := \{x \mid x \in Var, x$ kommt in t vor$\}$

Definition

A heißt *geschlossen*, wenn $Frei(A) = \{\}$.
Ist $Frei(A) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so heißt

$\forall x_1 \ldots \forall x_n A$ *Allabschluss*
$\exists x_1 \ldots \exists x_n A$ *Existenzabschluss*

von A.
Abkürzend schreiben wir $Cl_\forall A$ bzw. $Cl_\exists A$.
Ist A geschlossen, dann gilt also $Cl_\forall A = Cl_\exists A = A$.

Ein wichtiges technisches Hilfsmittel sind Substitutionen.

Definition: Substitutionen

Eine *Substitution* ist eine Abbildung

$$\sigma : Var \to Term_\Sigma$$

mit $\sigma(x) = x$ für fast alle $x \in Var$.

Notation für Substitutionen:

Gilt

- $\{x \mid \sigma(x) \neq x\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$,
- und ist $\sigma(x_i) = s_i$ für $i = 1, \ldots, m$,

so geben wir σ auch an in der Schreibweise

$$\{x_1/s_1, \ldots, x_m/s_m\}.$$

σ heißt Grundsubstitution, wenn für alle x mit $\sigma(x) \neq x$ der Funktionswert $\sigma(x)$ ein Grundterm ist.
Mit *id* bezeichnen wir die identische Substitution auf *Var*, d.h. $id(x) = x$ für alle $x \in Var$.

Anwendung (Beispiele):

1. Für $\sigma = \{x/f(x,y), y/g(x)\}$ gilt
$$\sigma(f(x,y)) = f(f(x,y), g(x)).$$
2. Für $\mu = \{x/c, y/d\}$ gilt
$$\mu(\exists y p(x,y)) = \exists y p(c,y).$$
3. Für $\sigma_1 = \{x/f(x,x)\}$ gilt
$$\sigma_1(\forall y p(x,y)) = \forall y p(f(x,x), y).$$
4. Für $\mu_1 = \{x/y\}$ gilt
$$\mu_1(\forall y p(x,y)) = \forall y p(y,y).$$

Definition: kollisionsfreie Substitutionen

Eine Substitution σ heißt *kollisionsfrei* für eine Formel A, wenn für jede Variable z und jede Stelle freien Auftretens von z in A gilt:
Diese Stelle liegt nicht im Wirkungsbereich eines Präfixes $\forall x$ oder $\exists x$, wo x eine Variable in $\sigma(z)$ ist.

$$\mu_1 = \{x/y\} \text{ ist nicht kollisionsfrei für } \forall y p(x,y)$$

Definition: Komposition von Substitutionen

Sind σ, τ Substitutionen, dann definieren wir die Komposition von τ mit σ durch

$$(\tau \circ \sigma)(x) = \tau(\sigma(x)).$$

Man beachte, daß auf der rechten Seite τ als die Anwendung der Substitution τ auf den Term $\sigma(x)$ verstanden werden muß.

elementare Eigenschaften von Substitutionen:

Gilt für $t \in Term_\Sigma$ und Substitutionen σ, τ, die Gleichung $\sigma(t) = \tau(t)$,
dann $\sigma(s) = \tau(s)$ für jeden Teilterm s von t.

Beweis:
Strukturelle Induktion nach t.

- Ist $t \in Var$, dann ist t selbst sein einziger Teilterm.
- Sei $t = f(t_1, \ldots, t_n)$. Dann gilt auch

$$f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) = f(\tau(t_1), \ldots, \tau(t_n)).$$

  und es folgt $\sigma(t_i) = \tau(t_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Da jeder Teilterm s von t entweder mit t identisch oder Teilterm eines t_i ist, folgt 1. nach Induktionsvoraussetzung.

Variablenumbenennung:

Theorem

Gilt für Substitutionen σ, τ, daß $\tau \circ \sigma = id$, dann ist σ eine Variablenumbenennung.

Beweis
Es ist $\tau(\sigma(x)) = x$ für jedes $x \in Var$, woraus folgt: $\sigma(x) \in Var$.
Ferner haben wir:
Wenn $\sigma(x) = \sigma(y)$, dann $x = \tau(\sigma(x)) = \tau(\sigma(y)) = y$.

Wichtig ist der Begriff der "Unifikation" von Termen: Durch geeignete Substitutionen werden verschiedene Terme "gleich gemacht".

Definition

Es sei $T \subseteq Term_\Sigma$, $T \neq \{\}$, und σ eine Substitution über Σ.

σ unifiziert T,
oder: σ ist Unifikator von T,
genau dann, wenn $\#\sigma(T) = 1$.

T heißt unifizierbar, wenn T einen Unifikator besitzt.

Insbesondere sagen wir für zwei Terme s, t daß s *unifizierbar* sei *mit* t, wenn

$$\sigma(t) = \sigma(s).$$

Beispiel:

$$\{f(g(a, x), g(y, b)), \quad f(z, g(v, w)), \quad f(g(x, a), g(v, b))\}$$

wird unifiziert durch

$$\{x/a, y/v, z/g(a, a), w/b\}.$$

$$\{f(g(a, a), g(v, b)), f(g(a, a), g(v, b)), f(g(a, a), g(v, b))\}$$

Eigenschaften der Unifikation:

1. Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar mittels *id*.
2. Zwei Terme der Gestalt
$$f(s_1, \ldots, s_n), g(t_1, \ldots, t_n)$$
(mit verschiedenem Kopf) sind nicht unifizierbar.
3. Zwei Terme der Gestalt
$$f(s_1, \ldots, s_n), f(t_1, \ldots, t_n)$$
(mit demselben Kopf) sind genau dann unifizierbar, wenn es eine Substitution σ gibt mit $\sigma(s_i) = \sigma(t_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.
4. Sei $x \in Var$ und t ein Term. Dann sind
$$x \text{ und } t$$
genau dann unifizierbar, wenn x nicht in t vorkommt.

Beispiel:

$$\{f(x, g(y)), \quad f(g(a), g(z))\}$$

wird unifiziert durch

$$\sigma = \{x/g(a), z/y\} \quad \text{Ergebnis } f(g(a), g(y)),$$

aber auch durch

$$\tau = \{x/g(a), y/a, z/a\} \quad \text{Ergebnis } f(g(a), g(a)).$$

σ ist allgemeiner als τ – oder τ spezieller als σ –

$$\tau = \{y/a\} \circ \sigma.$$

Dies motiviert die folgende Def.:

"Allgemeinster Unifikator" einer Termmenge

Definition

Es sei $T \subseteq Term_\Sigma$.
Ein *allgemeinster Unifikator* oder mgu (*most general unifier*) von T ist eine Substitution μ mit

1. μ unifiziert T
2. Zu jedem Unifikator σ von T gibt es eine Substitution σ' mit $\sigma = \sigma' \circ \mu$.

Eindeutigkeitssatz:

Theorem

Es sei T eine unifizierbare, nichtleere Menge von Termen. Dann ist der allgemeinste Unifikator von T bis auf Variablenumbenennung eindeutig bestimmt,
d. h.:
Sind μ, μ' allgemeinste Unifikatoren von T mit

$$\mu(T) = \{t\} \text{ und } \mu'(T) = \{t'\},$$

dann gibt es eine Umbenennung π der Variablen von t mit

$$t' = \pi(t).$$

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 117.

Durchführung der Unifikation: Algorithmus von Robinson

Definition

Zu $t \in Term_\Sigma$ und $i \in N$ sei

$t^{(i)}$ = der an Position i in t (beim Lesen von links nach rechts) beginnende Teilterm von t, wenn dort eine Variable oder ein Funktionssymbol steht
undefiniert sonst.

Definition

Für $T \subseteq Term_\Sigma$ ist die *Differenz* von T, $D(T) \subseteq Term_\Sigma$, wie folgt definiert

1. $D(T) := T$ falls $\#T \leq 1$
2. Falls $\#T \geq 2$, sei j die kleinste Zahl, so daß sich zwei Terme aus T an der Position j unterscheiden.
   Setze $D(T) := \{t^{(j)} \mid t \in T\}$.

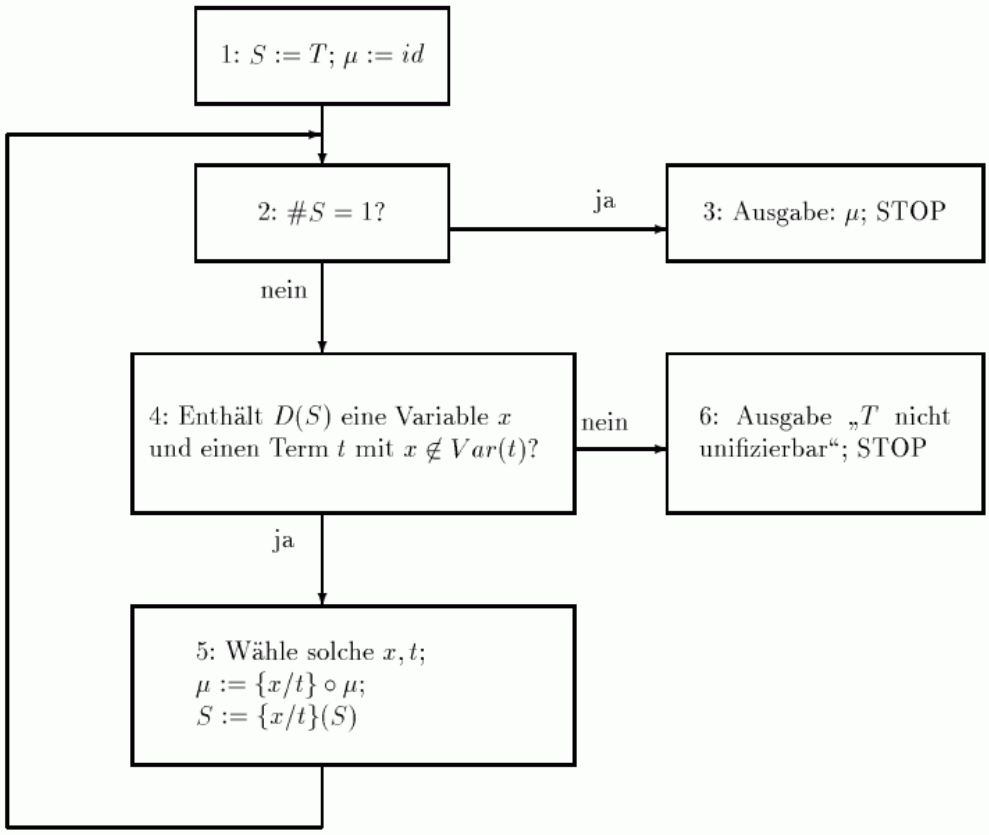
Beispiel

$T = \{f(g(a,x), g(y,b)),\ \ f(z, g(v,w)),\ \ f(g(x,a), g(v,b))\}$

$D(T) = \{g(a,x), z, g(x,a)\}$

Algorithmus von Robinson

Gegeben sei $T \subseteq Term_\Sigma$, T endlich und $\neq \emptyset$.



Unifikationssatz:

Theorem

1. *Der Algorithmus von* ROBINSON *terminiert für jedes endliche, nichtleere $T \subseteq Term_{\Sigma}$.*
2. *Wenn T unifizierbar ist, liefert er einen allgemeinsten Unifikator von T.*
3. *Wenn T nicht unifizierbar ist, liefert er die Ausgabe „T nicht unifizierbar“.*

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 118.

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe

Beispiel:

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(\ in(y, x) \wedge kl(y)\ ),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(\ ),\ q(\ ),\ d(\ ),\ kl(\ ),\ gr(\ ),\ in(\ ,\ )\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

- einer Interpretation $(\mathcal{D}, I)$
- einer Variablenbelegung β

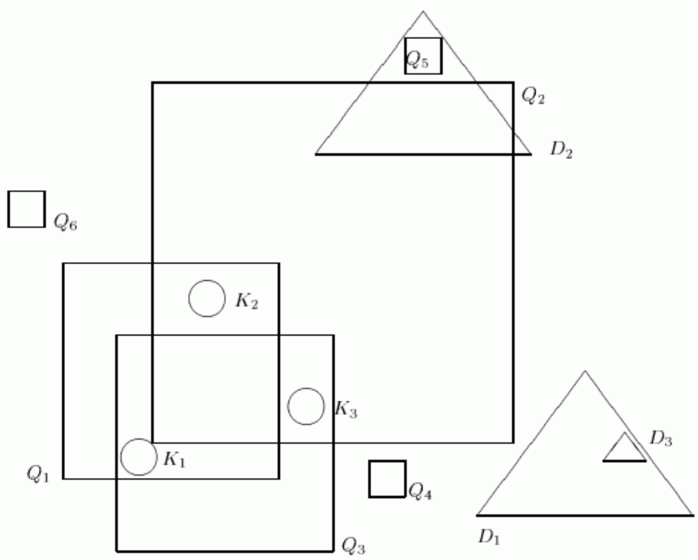
Analog zur Aussagenlogik definieren wir *Interpretationen* als Abbildungen der Signatursymbole in eine feste Menge.

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.
Eine *Interpretation* $\mathcal{D}$ von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
   - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
   - für $n \geq 1$: jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \rightarrow D$
   - jedem 0-stelligen Prädikatsymbol P einen Wahrheitswert $I(P) \in \{W, F\}$
   - für $n \geq 1$: jedem n-stelligen Prädikatsymbol p eine n-stellige Relation $I(p) \subseteq D^n$ zuordnet.

Beispiel einer Interpretation ("Tarskis Welt"):



$P_\Sigma = \{k(\,),\ q(\,),\ d(\,),\ kl(\,),\ gr(\,),\ in(\,,\,)\}$ $D_{Bsp} = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\} \cup \{K_1, K_2, K_3, D_1, D_2, D_3\}$
$I_{Bsp}(q) = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\}$

$I_{Bsp}(k) = \{K_1, K_2, K_3\}$, $I_{Bsp}(d) = \{D_1, D_2, D_3\}$

$I_{Bsp}(in)\{(K_1, Q_1), (K_1, Q_3), (K_2, Q_1), (K_2, Q_2), (K_3, Q_2), (K_3, Q_3), (D_3, D_1), (Q_5, D_2)\}$

"Variablenbelegung":

Definition

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ.
Eine *Variablenbelegung* (oder kurz *Belegung* über D) ist eine Funktion

$$\beta : Var \to D.$$

Zu β, $x \in Var$ und $d \in D$ definieren wir die *Modifikation* von β an der Stelle x zu d:

$$\beta_x^d(y) = \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

Auswertung von Termen:

Definition

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ und β eine Variablenbelegung über D.
Wir definieren eine Funktion $val_{D,I,\beta}$, mit

$$val_{D,I,\beta}(t) \in D \text{ für } t \in Term_\Sigma$$
$$val_{D,I,\beta}(A) \in \{W, F\} \text{ für } A \in For_\Sigma$$

$val_{D,I,\beta}$ auf $Term_\Sigma$:
$val_{D,I,\beta}(x) = \beta(x)$ für $x \in Var$
$val_{D,I,\beta}(f(t_1, \ldots, t_n)) = (I(f))(val_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, val_{D,I,\beta}(t_n))$

Auswertung von Formeln:

Definition

$val_{D,I,\beta}(\mathbf{1}) = W$
$val_{D,I,\beta}(\mathbf{0}) = F$

$$val_{D,I,\beta}(s \doteq t) := \begin{cases} W \text{ falls } val_{D,I,\beta}(s) = val_{D,I,\beta}(t) \\ F \text{ sonst} \end{cases}$$

$val_{D,I,\beta}(P) := I(P)$ für 0-stellige Prädikate P

$val_{D,I,\beta}(p(t_1, \ldots, t_n)) :=$

$$\begin{cases} W & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, val_{D,I,\beta}(t_n)) \in I(p) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$val_{D,I,\beta}(X)$ für $X \in \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\}$ wie in der Aussagenlogik.
Ferner:
$val_{D,I,\beta}(\forall x A) :=$

$$\begin{cases} W \text{ falls für alle } d \in D : val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F \text{ sonst} \end{cases}$$

$val_{D,I,\beta}(\exists x A) :=$

$$\begin{cases} W \text{ falls ein } d \in D \text{ existiert mit } val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F \text{ sonst} \end{cases}$$

Das Koinzidenzlemma

Theorem

$\mathcal{D}$ sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. *Gilt für den Term t* $\beta(x) = \gamma(x)$ *für alle* $x \in Var(t)$*, dann* $val_{\mathcal{D},\beta}(t) = val_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. *Gilt für die Formel A* $\beta(x) = \gamma(x)$ *für alle* $x \in Frei(A)$*, dann* $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = val_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
3. *Ist* $A \in For_\Sigma$ *geschlossen, dann gilt* $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = val_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

Beweis: Durch strukturelle Induktion unter Ausnutzung der Definition von *val*.

Substitutionslemma für Terme

Theorem

Σ sei eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ, β eine Belegung, σ eine Substitution und $t \in Term_\Sigma$.

Dann gilt

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t)) = val_{\mathcal{D},\beta'}(t).$$

wobei

$$\beta'(x) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in Var$.

Beweis: strukturelle Induktion nach dem Term *t*.
(Schmitt, S. 130)

Substitutionslemma für Formeln

Theorem

Σ sei eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ, β eine Belegung, $A \in For_\Sigma$ und σ eine für A kollisionsfreie Substitution.

Dann gilt:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = val_{\mathcal{D},\beta'}(A),$$

wobei

$$\beta'(x) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in Var$.

Beweis: strukturelle Induktion nach A (s. Schmitt, S. 131).

Modellbegriff und semantisches Folgern in der Prädikatenlogik:

wir beschränken uns hier auf die Definitionen für Formelmengen ohne freie Variablen.

Der Fall freier Variablen wird zurückgeführt auf den *universellen Abschluss* der Formeln (alle freien Variablen werden durch Allquantoren gebunden).

Definition

- Eine Interpretation $\mathcal{D}$ über Σ nennen wir ein **Modell** einer Formel A ohne freie Variablen über Σ, wenn $val_{\mathcal{D}}(A) = W$.
- $\mathcal{D}$ heißt **Modell** einer Formelmenge M ohne freie Variablen, wenn für jede Formel $B \in M$ gilt $val_{\mathcal{D}}(B) = W$.

logisches (semantisches) Folgern:

Definition

Es sei $M \subseteq For_\Sigma, A \in For_\Sigma$, beide ohne freie Variablen.

$$M \models_\Sigma A \quad :\Leftrightarrow$$

Jedes Modell von M ist auch Modell von A.

Lies: **Aus** M **folgt** A (über Σ).

Kurznotationen:

$\models$ statt $\models_\Sigma$, $\models A$ für $\emptyset \models A$, $B \models A$ für $\{B\} \models A$.

Es gilt:

$M \models A$ gdw $M \cup \{\neg A\}$ hat kein Modell

Die Begriffe Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit:

Definition

$A \in For_\Sigma$ heißt

- **allgemeingültig** gdw $\models A$
- **erfüllbar** gdw $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A allgemeingültig*
   2. *Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A.*
   3. *$val_\mathcal{D}(A) = W$ für alle $\mathcal{D}$.*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A erfüllbar*
   2. *Es gibt $\mathcal{D}$ mit $val_\mathcal{D}(A) = W$*

Beispiele für allgemeingültige prädikatenlogische Formeln:

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
7. $\forall\vec{y}(A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
   falls $x \notin Frei(A)$ und $\vec{y}$ alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.
8. $\forall\vec{y}(QxA \wedge B \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
   falls $x \notin Frei(B)$ und $\vec{y}$ alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.
9. $\forall\vec{y}(A \vee QxB \leftrightarrow Qx(A \vee B))$,
   falls $x \notin Frei(A)$ und $\vec{y}$ alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.
10. $\forall\vec{y}(QxA \vee B \leftrightarrow Qx(A \vee B))$,
    falls $x \notin Frei(B)$ und $\vec{y}$ alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.

(11) $((\forall xA)\rightarrow B) \leftrightarrow (\exists x(A\rightarrow B))$ *und dual*
(folgt aus 1 und 2)

Tautologien in der Prädikatenlogik

Def.:

(Tautologie) $A \in For_\Sigma$ heißt *Tautologie*, wenn es eine endliche aussagenlogische Signatur $\Sigma' = \{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$, ein $A' \in For_{\Sigma'}$ und Formeln $A_0, \ldots, A_{n-1} \in For_\Sigma$ gibt, so daß

- A' ist (aussagenlogisch) allgemeingültig über Σ'
- A entsteht aus A', indem man dort P_i durch A_i ersetzt (für $i = 0, \ldots, n-1$).

Beispiel:

$$(((((p(x) \land \neg q(y,c,x)) \to p(c)) \land (\neg(p(x) \land \neg q(y,c,x)) \to p(c))) \to p(c)))$$

ist eine Tautologie, denn

$$(((P_0 \to P_1) \land (\neg P_0 \to P_1)) \to P_1)$$

ist aussagenlogisch allgemeingültig, und hieraus entsteht durch Ersetzen von
P_0 durch $(p(x) \land \neg q(y,c,x))$
P_1 durch $p(c)$
die Ausgangsformel.

Es gilt:
Jede Tautologie ist allgemeingültig.

(Beweis: Schmitt (2008), S. 135.)

Die Umkehrung gilt nicht, wenn man "Tautologie" so def. wie hier (beachte aber, dass die Terminologie in der Lit. nicht einheitlich ist).

Normalformen

relativ triviale Normierungen sind folgende:

Definition

Eine Formel $A \in For$ heißt

1. eine **Negationsnormalform**, wenn jedes Negationszeichen in A vor einer atomaren Teilformel steht. (Insbesondere kommt keine Teilformel der Form $\neg\neg B$ in A vor
2. *bereinigt*, wenn
   - $Frei(A) \cap Bd(A) = \emptyset$
   - die hinter Quantoren stehenden Variablen paarweise verschieden sind.

Theorem

Zu jeder Formel A gibt es eine logisch äquivalente

1. *Formel B in Negationsnormalform.*
2. *bereinigte Formel B.*

Pränex-Normalform

Definition

$A \in For$ heißt eine *Pränexe Normalform*, wenn A die Gestalt hat

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $x_i \in Var$ und B quantorenfrei. Man nennt B die *Matrix* von A.

Theorem

Zu jeder Formel A gibt es eine äquivalente in Pränex-Normalform. Sie läßt sich aus A algorithmisch ableiten.

Beweis: zuerst wird A bereinigt, dann wendet man von innen nach außen geeignete Äquivalenzen auf Teilformeln an, um Quantoren "nach links zu schieben".

Beispiel:

Aus

$$\forall y\ (\forall x(\forall y\ p(x,y)) \to \exists x\ r(x,y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y(\forall x(\forall z\ p(x,z)) \to \exists u\ r(u,y))$$
$$\forall y(\exists x(\forall z\ p(x,z) \to \exists u\ r(u,y)))$$
$$\forall y(\ \exists x(\ \exists z(\ p(x,z) \to \exists u\ r(u,y))))$$
$$\forall y\ \exists x\ \exists z\ \exists u(\ p(x,z) \to r(u,y))$$

Bemerkung:

Beim geschilderten Verfahren bleibt die Eigenschaft „bereinigt“ erhalten. Man beachte, daß die Pränex-Normalform einer Formel A i. a. nicht eindeutig bestimmt ist. Abhängig von der Reihenfolge der angewandten Äquivalenzen kann man z. B. aus

$$\forall x p(x) \to \forall y q(y)$$

sowohl $\exists x \forall y (p(x) \to q(y))$

als auch $\forall y \exists x (p(x) \to q(y))$

erhalten.

Eine Formel in Pränex-Normalform läßt sich noch weiter normieren. Für quantorenfreie Formeln können wir in unmittelbarer Übertragung der Definition aus der Aussagenlogik sagen, wann eine solche in *disjunktiver* bzw. *konjunktiver* Normalform ist. Mit Hilfe der Tautologien läßt sich eine Formel in Pränex-Normalform dann in eine äquivalente überführen, deren Matrix in DNF oder KNF ist.

Weitere Formelvereinfachung:

Existenzquantoren durch neue Funktionszeichen ersetzen (Formel dann nicht mehr äquivalent, hat aber gleiche Modelle) $\Rightarrow$ *Skolem-Normalform*

Skolem-Normalform

Definition

Eine Formel ist in *Skolem-Normalform*, wenn sie

- geschlossen ist
- die Gestalt $\forall x_1 \ldots \forall x_n B$ hat mit quantorenfreiem B
- die Matrix B in KNF ist.

Theorem

Zu jedem $A \in For_\Sigma$ gibt es eine endliche Erweiterung Σ_{sk} von Σ und eine Formel $A_{sk} \in For_{\Sigma_{sk}}$ mit

- *A_{sk} ist in Skolem-Normalform*
- *A_{sk} hat ein Modell genau dann, wenn A ein Modell hat.*

A_{sk} läßt sich aus A algorithmisch erhalten.

Beispiel:

Gegeben:

$$\forall x(\exists y(p(y)) \land \exists z(q(x,z)))$$

Pränex Normalform:

$$\forall x \exists y \exists z(p(y) \land q(x,z))$$

Skolem Normalform:

$$\forall x(p(f_1(x)) \land q(x, f_2(x)))$$

Eine Art Normalform wird auch durch sogenannte Herbrand-Interpretationen ermöglicht. Dazu die Def.:

Grundinstanzen

Sei $A := \forall x_1 \ldots \forall x_n B$
mit quantoremfreiem B eine geschlossenen Formel.
Eine **Grundinstanz** von A ist eine Formel

$$\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}(B)$$

mit Grundtermen $t_1, \ldots, t_n$.
Ist M eine Menge geschlossener, universell quantifizierter Formeln, so sei

$$\text{Grundinstanzen}(M)$$

die Menge aller Grundinstanzen aller Formeln in M.

Herbrand-Strukturen:

Definition

Die Signatur Σ enthalte mindestens eine Konstante.
Eine Interpretation (D, I) von Σ heißt *Herbrand-Interpretation* oder *Herbrand-Struktur*, wenn

1. $D = Term^0_\Sigma$ = Menge der Grundterme.
2. $I(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$
   für alle Funktionssymbole $f \in \Sigma$
   und beliebige Grundterme $t_1, \ldots, t_n$.

In einer Herbrand-Struktur wird jeder Grundterm t als er selbst interpretiert,

$$I(t) = t$$

Spielraum für *verschiedene* Herbrand-Strukturen gibt es nur bei der Interpretation der Prädikatsymbole.

Satz von Herbrand:

Theorem

Σ enthalte mindestens eine Konstante, und es sei M eine Menge geschlossener, universell quantifizierter Formeln. Ferner enthalte keine Formel in M das Gleichheitssymbol $\doteq$. Dann sind äquivalente Aussagen

1. *M hat ein Modell*
2. *M hat ein Herbrand-Modell*
3. *Grundinstanzen(M) hat ein Modell*
4. *Grundinstanzen(M) hat ein Herbrand-Modell.*

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 151.

2. Form des Satzes von Herbrand:

Sei ϕ eine quantorenfreie Formel ohne Gleichheit mit einer freien Variablen x . Dann gilt

$\exists x \phi$ ist allgemeingültig

gdw

es gibt eine natürliche Zahl n
und Grundterme $t_1, \ldots, t_n$, sodaß
$\phi(t_1) \vee \ldots \vee \phi(t_n)$
allgemeingültig ist.

Bew. s. Schmitt (2008), S. 152.

Entscheidbarkeitsaussagen

Satz von Church:
Die Prädikatenlogik 1. Stufe ist unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der für jede beliebige prädikatenlogische Formel *F* in endlich vielen Schritten entscheidet, ob *F* erfüllbar ist oder nicht.

Positive Aussagen ("Semi-Entscheidbarkeit"):

Satz:
(a) Ist *F* eine unerfüllbare prädikatenlogische Formel, so kann man dies in endlich vielen Schritten nachweisen.
Man hat aber keine Schranke für die Zahl der Schritte und weiß somit nie, ob *F* erfüllbar ist.

(b) Durch Negation ergibt sich aus (a): Man kann in endlich vielen Schritten nachweisen, dass *F* allgemeingültig ist.

Endlichkeitsaussagen

Satz ("Kompaktheit" der PL1):

Für beliebige $M \subseteq For_\Sigma$, $A \in For_\Sigma$ gilt:

$$M \models A \Leftrightarrow E \models A \text{ für eine endliche Teilmenge } E \text{ von } M.$$

Korollar

(Endlichkeitssatz) Eine Menge $M \subseteq For_\Sigma$ hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von M ein Modell hat.

Nichtcharakterisierbarkeit der Endlichkeit:

Es sei Σ eine Signatur der PL1. Dann gibt es keine Formelmenge $M \subseteq For_\Sigma$, so daß für jede Interpretation (D, I) über Σ gilt:

$$(D, I) \text{ ist Modell von } M \Leftrightarrow D \text{ ist endlich.}$$

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 195f.

Prädikatenlogik 2. Stufe (PL2):

es gibt auch Variablen (über die man quantifizieren kann) für Funktionen und Prädikate.

Satz:

Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:

- Aus $M \models A$ braucht i. a. nicht zu folgen:
  $E \models A$ für eine endliche Teilmenge E von M
- Es kann sein, daß jede endliche Teilmenge einer Formelmenge M ein Modell hat, diese selbst aber nicht.

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 274.

Satz:

Für die PL2 kann es keinen korrekten und vollständigen Kalkül geben.

Beweis: s. Schmitt (2008), S. 274.

Ausschnitte entnommen aus
Beckert (2010), Kreuzer & Kühling (2006) und Schmitt (2008)
(genaue Quellenangaben siehe http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/fs10_lit.htm)