

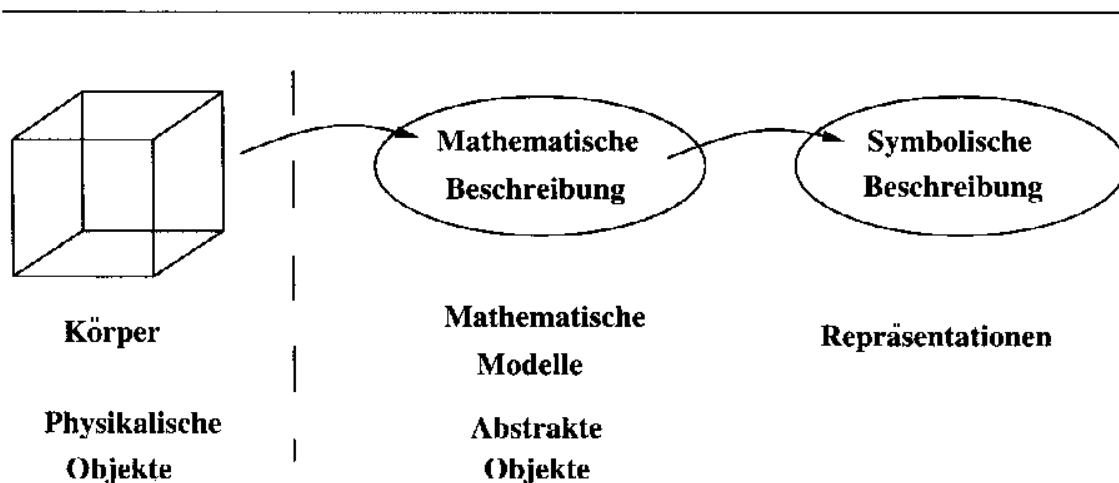
13. Modelle für 3D-Objekte und -Szenen

Modell: Abbild der Realität, welches bestimmte Aspekte der Realität repräsentiert (und andere ausblendet)

- mathematische Modelle
- symbolische Modelle
- Datenmodelle
- Experimentalmodelle

Solid Modelling (Festkörpermodellierung):
mathematische / datenstruktur-orientierte Darstellung geschlossener 3D-Körper

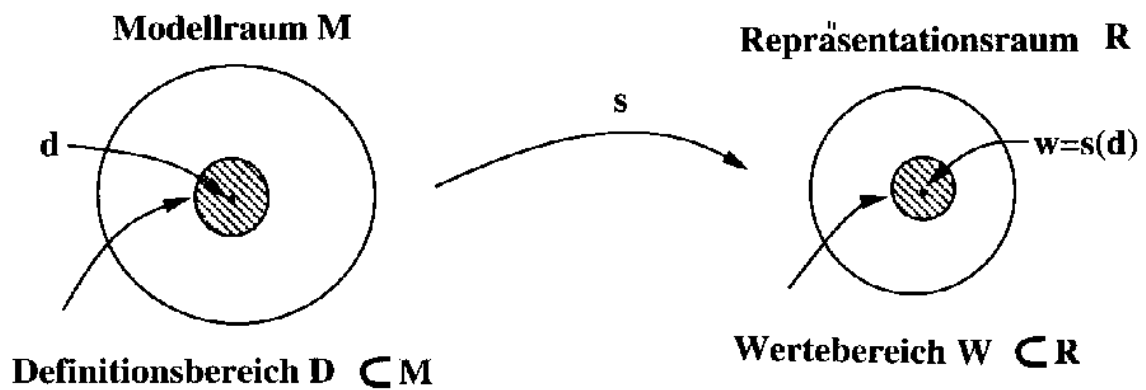
2-stufiger Prozess:



(aus Encarnaç o et al. 1997)

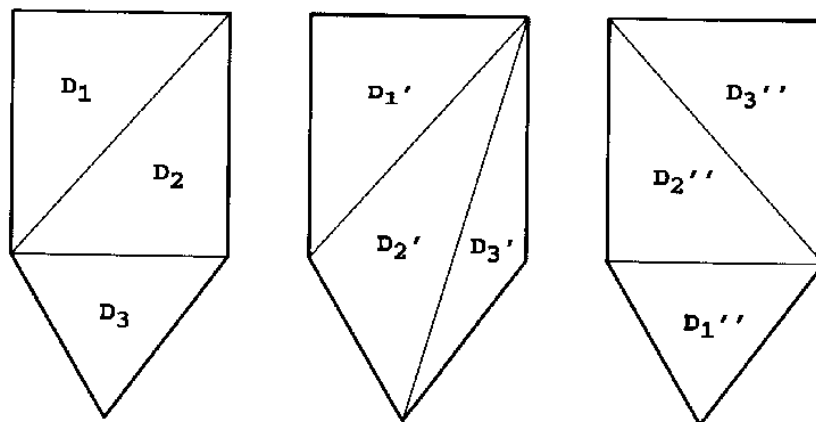
mathematischer Modellraum M
symbolischer Repräsentationsraum R

Repräsentations-Relation $s: M \rightarrow R$
("Repräsentations-Schema")



s *eindeutig*: jedes Modell aus D besitzt genau eine Darstellung in W (d.h. s ist Funktion).

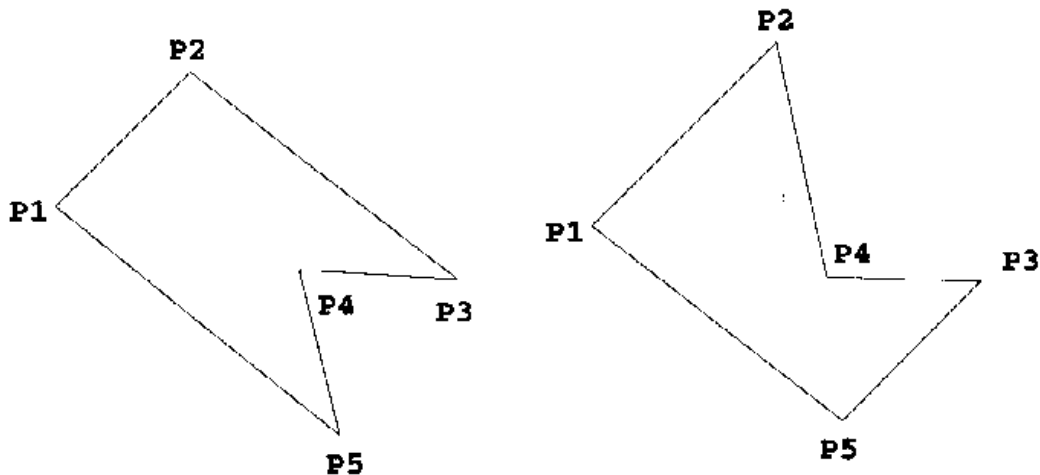
Beispiel einer nicht eindeutigen Repr.:
Darstellung von Polygonen als endliche Vereinigung von Dreiecken



s *vollständig*: die Relation ist injektiv, d.h. durch jede gültige Repräsentation wird genau ein Modell aus D dargestellt.

(wenn das nicht gilt, tritt beim Übergang zur symbolischen Darstellung Informationsverlust ein.)

Beispiel einer nicht vollständigen Repräsentation:
Darstellung eines nicht-konvexen Polygons durch die Menge seiner Eckpunkte

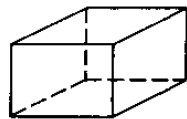
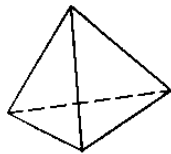


Kriterien zur Beurteilung von Geometrie-
Repräsentations-Schemata:

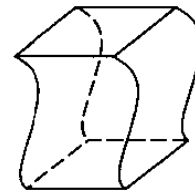
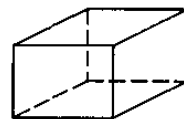
- Mächtigkeit (wie groß ist der Definitionsbereich? Wie genau können komplizierte Objekte modelliert werden?)
- Eindeutigkeit
- Vollständigkeit
- stimmt der Repräsentationsraum R mit dem Wertebereich W von s überein (oder gibt es "ungültige" symbolische Darstellungen)?
- Genauigkeit (Approximation von Objekten)
- Effizienz (Zeitaufwand für die Darstellung, Speicherplatz)
- Abgeschlossenheit (gegenüber Transformationen, Mengenoperationen)
- wie allgemein sind Operationen, die zur Manipulation von Repräsentationen verwendet werden müssen?
- formale Eleganz der Darstellung (kommt man mit wenigen Operatoren aus, gehorchen diese einfachen Gesetzen?)
- wie kompliziert sind Algorithmen zur Erzeugung und Manipulation von Objekten?

Mathematische Grundlagen:

- Geometrie (Längen, Winkel; *Kongruenzabbildungen*)
- Topologie (Umgebungen, Inzidenzbeziehungen: welches Element hängt mit welchem zusammen? Abbildungen: *Homöomorphismen*)
- Graphentheorie
- Kombinatorik
- algebraische Strukturen
- Maßtheorie



verschiedene Topologie
verschiedene Geometrie



gleiche Topologie
verschiedene Geometrie

Topologische Grundbegriffe:

Sei A eine Menge von Punkten, also eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 .

A heißt *beschränkt*, wenn A ganz in einer Kugel mit endlichem Radius enthalten ist.

A heißt *Umgebung* eines Punktes x , wenn es eine kleine Kugel mit Mittelpunkt x gibt, die ganz in A enthalten ist. (Die Kugeln bilden eine *Umgebungsbasis* der Standard-Topologie des \mathbb{R}^3 .)

$x \in A$ heißt *innerer Punkt* von A genau dann, wenn es eine Umgebung von x gibt, die ganz in A liegt (gleichwertig: wenn es eine Kugel mit Mittelpunkt x gibt, die ganz in A liegt).

x heißt *Randpunkt* von A , wenn jede Umgebung von x Punkte von A und des Komplements von A enthält. (Dabei ist auch der Fall $x \notin A$ möglich.)

Der *Rand* von A , bezeichnet als δA , ist die Menge aller Randpunkte von A .

Das *Innere* von A ist def. als $\overset{\circ}{A} = A - \delta A$ (Mengendifferenz).

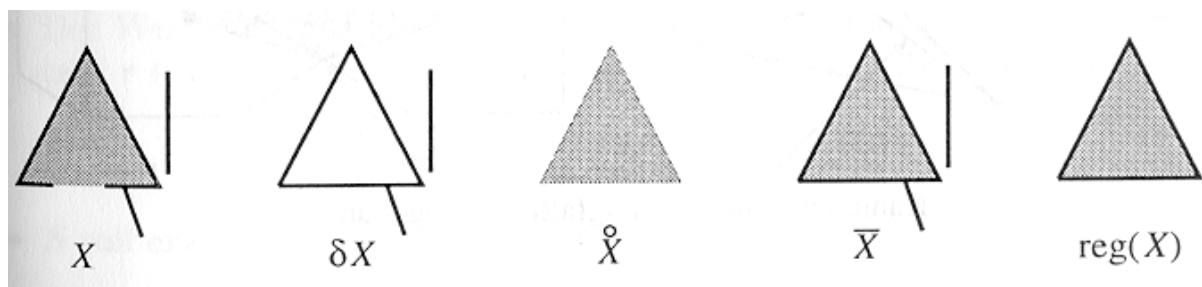
A heißt *offen*, wenn $\overset{\circ}{A} = A$.

Der *Abschluss* von A (auch "abgeschlossene Hülle von A ") ist def. als $\bar{A} = A \cup \delta A$ (auch: $\text{hull}(A)$, Hülle(A)).

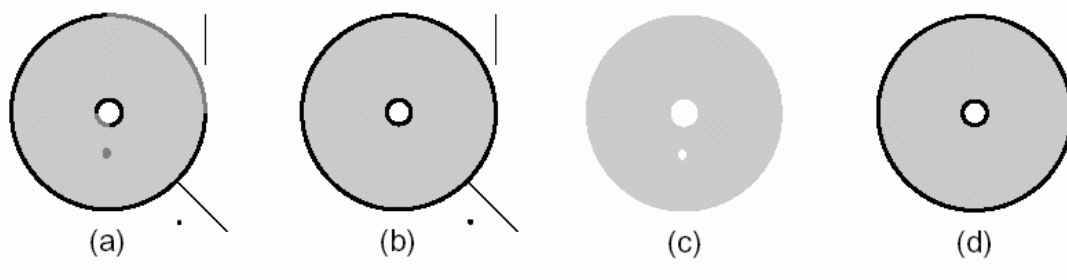
A heißt *abgeschlossen*, wenn $\bar{A} = A$.

Die *Regularisierung* von A ist die Menge $\text{reg}(A) = \text{Hülle}(\overset{\circ}{A})$.

A heißt *regulär*, wenn $\text{reg}(A) = A$.



Effekt der Regularisierung: das Objekt wird abgeschlossen, "Löcher" und "hängende Teile" niedriger Dimension werden entfernt:



(a) Ausgangsmenge A

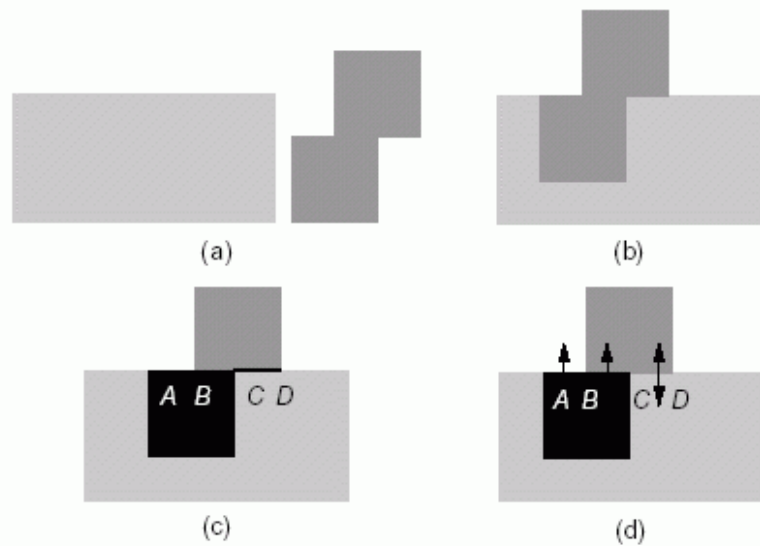
(b) Abschluss von A (ohne Regularisierung, störende Teile bleiben erhalten)

(c) Inneres von A

(d) Regularisierung von A .

Regularisierte Mengenoperationen:

Definition: $A \text{ op}^* B = \text{H\u00fclle}(\text{Inneres}(A \text{ op} B))$



M\u00f6gliche Operationen: $\cup^*, \cap^*, -^*$

Häufig gebrauchte Grundelemente für die Modellierung: *Polyeder*

Definition?

dazu folgende Grundlagen:

Graphen (V, E) (**v**ertices = Knoten oder Ecken, **e**dges = Kanten): sind nicht an Geometrie gebunden, reine Inzidenzstrukturen
(E Menge ungeordneter Paare von Knoten)

Ein *geometrischer Graph* ist ein Paar (V, E) , wobei V nichtleere, endliche Teilmenge von \mathbb{R}^3 und E eine Menge von Verbindungsstrecken von Punkten aus V ist.

Die Inzidenz von Ecken und Kanten im Sinne der Graphentheorie ist geometrisch erklärt durch " v ist Endpunkt der Kante e " (im geometrischen Sinne).

Ein *Polygon* ist ein geometrischer Graph (V, E) mit $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ und $E = \{(v_0 v_1), (v_1 v_2), \dots, (v_{n-2} v_{n-1})\}$.

Ein Polygon heißt

- *eben*, falls alle Kanten in einer Ebene liegen
- *geschlossen*, falls $v_0 = v_{n-1}$
- *einfach*, falls gilt: Der Schnitt jeweils zweier Kanten ist entweder leer oder eine Ecke, und jede Ecke gehört zu höchstens zwei Kanten (d.h.: keine Selbstüberschneidungen des Polygons)

Es gilt der grundlegende

Jordansche Kurvensatz für ebene, geschlossene Polygone:

Jedes geschlossene, einfache Polygon in der Ebene unterteilt die Ebene in zwei disjunkte *Polygonegebiete*, ein inneres und ein äußeres Polygonegebiet.

Punkte im Inneren können dadurch charakterisiert werden, dass die Anzahl der Schnittpunkte zwischen den Kanten des Polygons und einem Strahl, der von dem Innenpunkt ausgeht, ungerade ist (bereits beim Scangeraden-Algorithmus zum Füllen von Polygonen verwendet).

Ein *Polygonnetz* (auch: *mesh*) ist eine Menge M von endlich vielen geschlossenen, ebenen und einfachen Polygonen mit folgenden Eigenschaften:

- die inneren Polygonegebiete von je 2 Polygonen aus M haben keine gemeinsamen Punkte
- je 2 Polygone aus M haben entweder keinen Punkt oder eine Ecke oder eine ganze Kante gemeinsam
- jede Kante eines Polygons aus M gehört zu höchstens 2 Polygonen
- die Menge aller Kanten, die nur zu einem Polygon aus M gehören, ist entweder leer (M heißt dann "geschlossen") oder bildet selbst ein einziges, geschlossenes, einfaches Polygon.

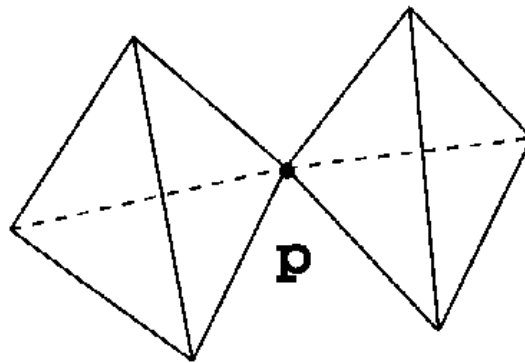
Polygonnetze spielen eine wichtige Rolle in der Modellierung (Beisp. FEM, Kontrollpunkt-Netze von Bézier- und B-Spline-Flächen, *elevation grids*)

Def. *Polyeder*:

Ein Polygonnetz M heißt Polyeder, wenn gilt:

- M ist geschlossen (d.h. jede Kante gehört zu genau 2 Polygonen)
- M ist zusammenhängend
- jede Ecke gehört zu einer endlichen, zyklisch geordneten Menge von Polygonen, in der aufeinanderfolgende Polygone jeweils eine zur Ecke gehörende Kante gemeinsam haben

Beispiel, wo die dritte Bedingung verletzt ist:



Die inneren Polygonegebiete von M heißen auch *Facetten* oder Seitenflächen des Polyeders.

Der Abschluss der Vereinigung aller Facetten heißt die *Oberfläche* (surface) des Polyeders.

Die Polyeder sind die 3D-Verallgemeinerungen der ebenen, einfachen, geschlossenen Polygone. Insbes. gilt das 3D-Analogon des Jordanschen Kurvensatzes:

Jedes Polyeder teilt den Raum in zwei disjunkte Bereiche, das Innere und das Äußere.

Das Innere kann wieder dadurch charakterisiert werden, dass die Anzahl der Schnitte eines Strahls, der von einem Innenpunkt ausgeht, mit der Oberfläche ungerade ist.

Das Innere eines Polyeders ist also vollständig durch seine Oberfläche definiert.

→ Grundlage einer wichtigen Repräsentationsform:
Boundary Representation (BRep)

Datenstrukturen für Polygonnetze

1. Polygonorientierte Datenstruktur

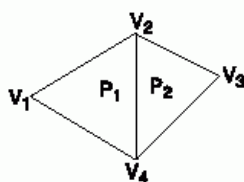
- Jedes Polygon wird durch eine Liste von Koordinaten der Knoten (Eckpunkte, Vertices) beschrieben:

$$P = ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n))$$

- Kanten werden zwischen aufeinanderfolgenden Knoten erzeugt
- Knoten werden mehrfach gespeichert
- keine explizite Kennzeichnung geteilter Ecken und Kanten
- Probleme beim Rendering (Kanten werden doppelt gezeichnet)

2. Knotenorientierte Datenstruktur

Beseitigung von Redundanz: Knoten werden nur jeweils einmal gespeichert und dann den einzelnen Facetten durch Zeiger zugeordnet. Auflistung der Knoten pro Facette gewöhnlich mit fester Orientierung (z.B. im Uhrzeigersinn) – nützlich für viele Algorithmen



$$V = (V_1, V_2, V_3, V_4) = ((x_1, y_1, z_1), \dots, (x_4, y_4, z_4))$$

$$P_1 = (1, 2, 4)$$

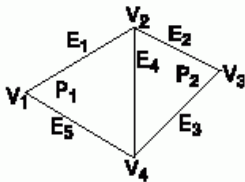
$$P_2 = (4, 2, 3)$$

- speicherplatzsparend, da Knoten nur einmal gespeichert
- einfache Transformationen
- geteilte Kanten doppelt gespeichert

3. Kantenorientierte Datenstruktur

Facetten als Zyklen von Kanten

Kanten als Listen von Knoten und 1 oder 2 angrenzenden Facetten; für jede Kante ist Orientierung durch Reihenfolge der Endpunkte festgelegt



$$V = (V_1, V_2, V_3, V_4) = ((x_1, y_1, z_1), \dots, (x_4, y_4, z_4))$$

$$E_1 = (V_1, V_2, P_1, \lambda)$$

$$E_2 = (V_2, V_3, P_2, \lambda)$$

$$E_3 = (V_3, V_4, P_2, \lambda)$$

$$E_4 = (V_4, V_2, P_1, P_2)$$

$$E_5 = (V_4, V_1, P_1, \lambda)$$

$$P_1 = (E_1, E_4, E_5)$$

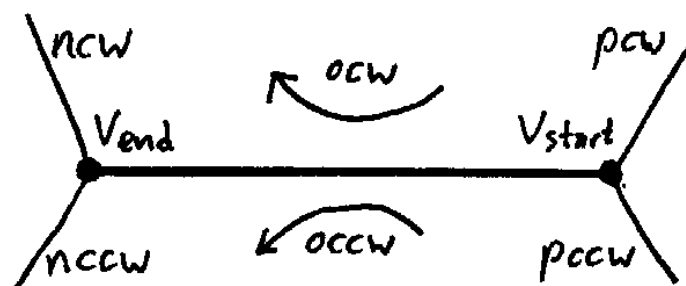
$$P_2 = (E_2, E_3, E_4)$$

Erweiterung:

es werden zusätzlich Nachbarschaftsbeziehungen unter den Kanten gespeichert

(4 Nachbarkanten: ncw = next clockwise, pcw = previous clockwise, nccw = next counterclockwise, pccw = previous counterclockwise)

für die Facetten braucht man dann nur einen Zeiger auf eine Startkante und ein Bit für die Orientierung dieser Startkante.



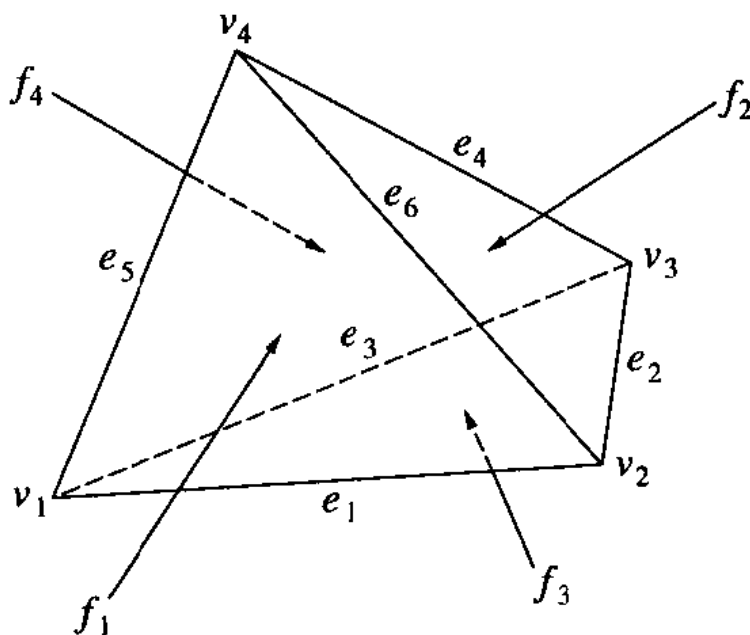
(ocw = orientation clockwise, occw = orientation counterclockwise)

→

Winged-Edge-Repräsentation

- Datenstruktur zur Speicherung von b-reps
- Kante zeigt auf:
 - angrenzende Knoten (V_1, V_2)
 - angrenzende Flächen (F_1, F_2)
 - angrenzende Kanten (E_2, E_3, E_4, E_5)
- nur Objekte ohne Löcher werden beschrieben
- effizienter Zugriff auf Nachbarschaft (Flächen, Kanten, Knoten)

Beispiel: Tetraeder



Relationen und Listen der zugehörigen Winged-Edge-Struktur:

$v:$	<table border="1"><tr><td>e_1</td><td>v_1</td><td>v_2</td></tr><tr><td>e_2</td><td>v_2</td><td>v_3</td></tr><tr><td>e_3</td><td>v_1</td><td>v_3</td></tr><tr><td>e_4</td><td>v_3</td><td>v_4</td></tr><tr><td>e_5</td><td>v_1</td><td>v_4</td></tr><tr><td>e_6</td><td>v_2</td><td>v_4</td></tr></table>	e_1	v_1	v_2	e_2	v_2	v_3	e_3	v_1	v_3	e_4	v_3	v_4	e_5	v_1	v_4	e_6	v_2	v_4
e_1	v_1	v_2																	
e_2	v_2	v_3																	
e_3	v_1	v_3																	
e_4	v_3	v_4																	
e_5	v_1	v_4																	
e_6	v_2	v_4																	

$ef:$	<table border="1"><tr><td>e_1</td><td>f_1</td><td>f_3</td></tr><tr><td>e_2</td><td>f_2</td><td>f_3</td></tr><tr><td>e_3</td><td>f_3</td><td>f_4</td></tr><tr><td>e_4</td><td>f_2</td><td>f_4</td></tr><tr><td>e_5</td><td>f_1</td><td>f_4</td></tr><tr><td>e_6</td><td>f_1</td><td>f_2</td></tr></table>	e_1	f_1	f_3	e_2	f_2	f_3	e_3	f_3	f_4	e_4	f_2	f_4	e_5	f_1	f_4	e_6	f_1	f_2
e_1	f_1	f_3																	
e_2	f_2	f_3																	
e_3	f_3	f_4																	
e_4	f_2	f_4																	
e_5	f_1	f_4																	
e_6	f_1	f_2																	

$ee':$	<table border="1"><tr><td>e_1</td><td>e_2</td><td>e_3</td><td>e_5</td><td>e_6</td></tr><tr><td>e_2</td><td>e_1</td><td>e_3</td><td>e_4</td><td>e_6</td></tr><tr><td>e_3</td><td>e_1</td><td>e_2</td><td>e_4</td><td>e_5</td></tr><tr><td>e_4</td><td>e_2</td><td>e_3</td><td>e_5</td><td>e_6</td></tr><tr><td>e_5</td><td>e_1</td><td>e_3</td><td>e_4</td><td>e_6</td></tr><tr><td>e_6</td><td>e_1</td><td>e_2</td><td>e_4</td><td>e_5</td></tr></table>	e_1	e_2	e_3	e_5	e_6	e_2	e_1	e_3	e_4	e_6	e_3	e_1	e_2	e_4	e_5	e_4	e_2	e_3	e_5	e_6	e_5	e_1	e_3	e_4	e_6	e_6	e_1	e_2	e_4	e_5
e_1	e_2	e_3	e_5	e_6																											
e_2	e_1	e_3	e_4	e_6																											
e_3	e_1	e_2	e_4	e_5																											
e_4	e_2	e_3	e_5	e_6																											
e_5	e_1	e_3	e_4	e_6																											
e_6	e_1	e_2	e_4	e_5																											

v -Liste:	<table border="1"><tr><td>v_1</td><td>e_1</td></tr><tr><td>v_2</td><td>e_2</td></tr><tr><td>v_3</td><td>e_3</td></tr><tr><td>v_4</td><td>e_4</td></tr></table>	v_1	e_1	v_2	e_2	v_3	e_3	v_4	e_4
v_1	e_1								
v_2	e_2								
v_3	e_3								
v_4	e_4								

f -Liste:	<table border="1"><tr><td>f_1</td><td>e_5</td></tr><tr><td>f_2</td><td>e_2</td></tr><tr><td>f_3</td><td>e_2</td></tr><tr><td>f_4</td><td>e_4</td></tr></table>	f_1	e_5	f_2	e_2	f_3	e_2	f_4	e_4
f_1	e_5								
f_2	e_2								
f_3	e_2								
f_4	e_4								

Allgemeiner Ansatz: der *vef*-Graph

Knoten dieses Graphen:

Mengen der Ecken, Kanten und Facetten

Kanten des Graphen: geeignete Adjazenzrelation

10 Relationen kommen in Frage, davon wird eine im jeweiligen Datenmodell eine Auswahl getroffen:

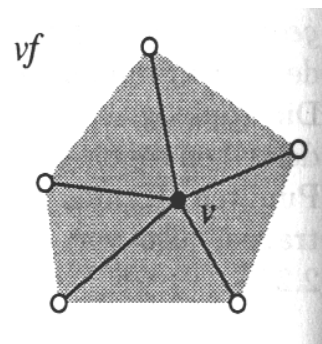
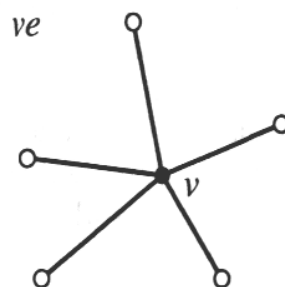
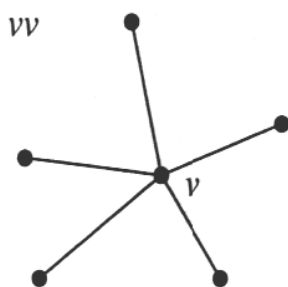
z.B. *vv*: Punkte sind benachbart (haben gemeinsame Kante)

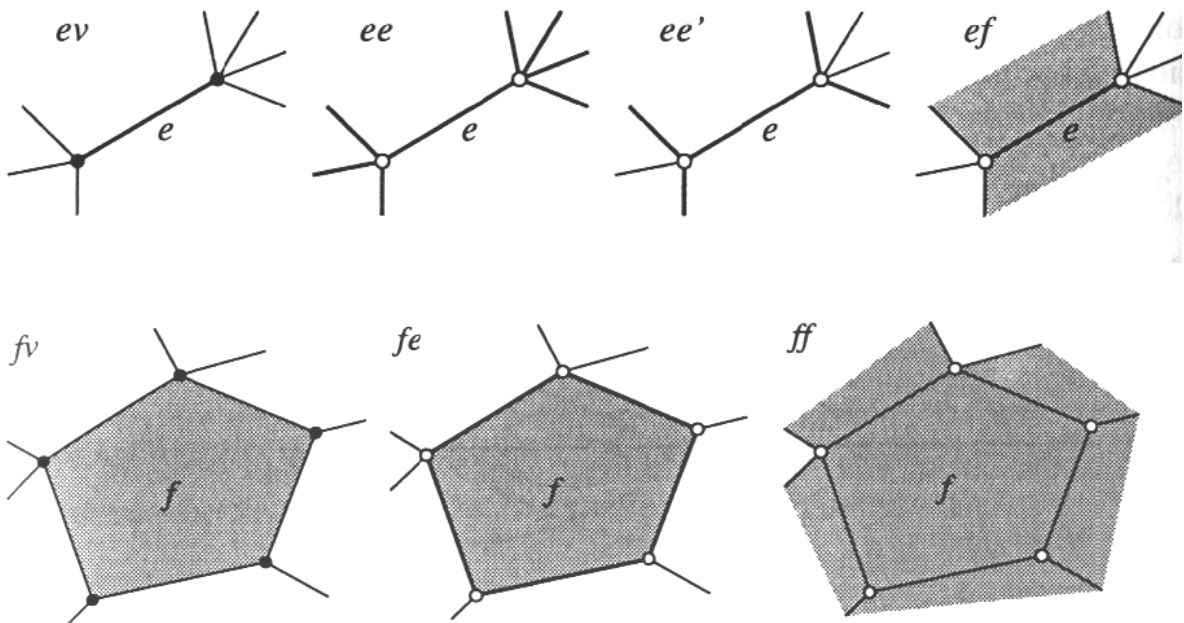
ve: Punkt begrenzt Kante

vf: Punkt ist Eckpunkt von Facette

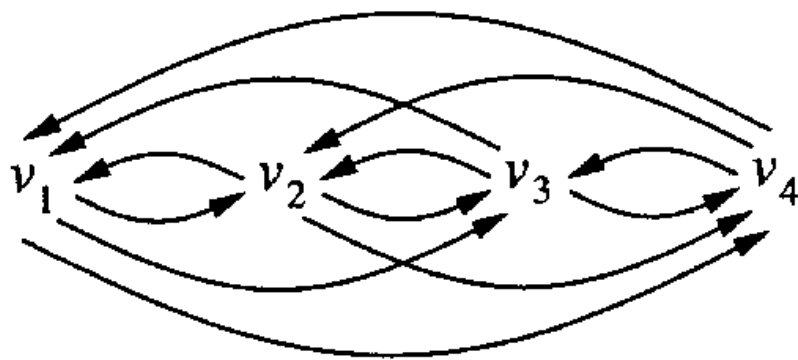
usw. bis *ff*: Flächen sind benachbart (haben gemeinsame Kante)

neben *ee* betrachtet man noch *ee'*: Kanten sind benachbart und begrenzen dieselbe Facette (Teilmenge von *ee*)

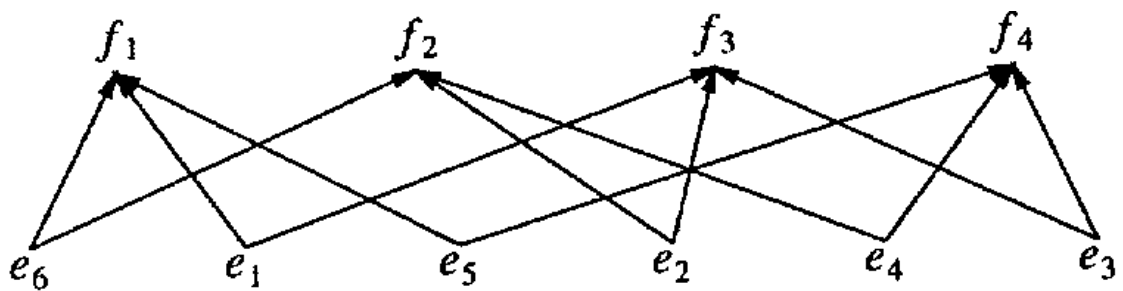




Beispiel: vef -Graph für die vv -Relation im obigen Tetraeder:



vef -Graph für die ef -Relation:



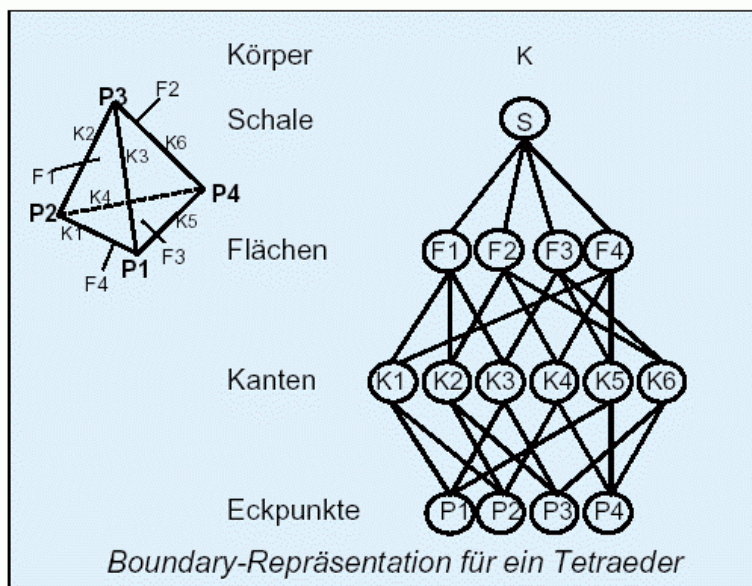
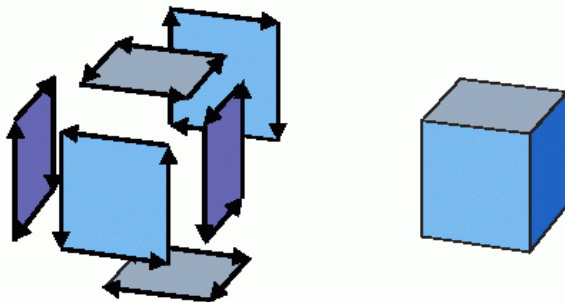
Zusammenfassung zur "boundary representation":

Darstellung eines (verallgemeinerten) Polyeders durch das System seiner Ecken, Kanten und Facetten

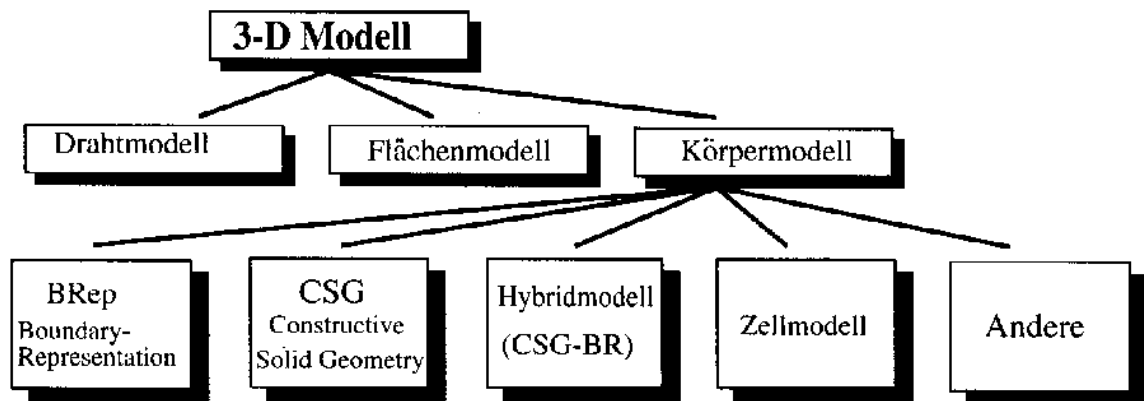
- Abspeichern durch (Teilgraphen des) *vef*-Graphen (siehe vorangegangener Abschnitt) – verschiedene Varianten möglich
- oft durch Eckenindex-Listen
- Orientierung der Facetten wichtig fürs Rendering!

Boundary-Repräsentation (B-Rep)

Die B-Rep ist die am weitesten verbreitete Repräsentation zur Darstellung von Körpermodellen. Hierbei ist die Oberfläche eines 3D-Objektes vollständig von Flächenelementen eingeschlossen, deren Kanten einen einheitlichen Umlaufsinn besitzen.



Übersicht über die wichtigsten
Repräsentationsschemata für 3D-Modelle:



Zellmodelle

- Nomzellen-Aufzählungsschema
- Zellzerlegungsschema
- Oktalbäume (Quadrees und Octrees)
- BSP-Bäume

Normzellen-Aufzählungsschema

(auch: Voxel-Modelle; SOE = spatial occupancy enumeration)

Ein Körper wird durch eine Menge von gleichgroßen dreidimensionalen Zellen dargestellt (meist Würfel der Kantenlänge h). Eine Zelle wird dabei durch die Koordinaten ihres Mittelpunktes repräsentiert.

Voxel = volume pixel ("3D-Pixel").

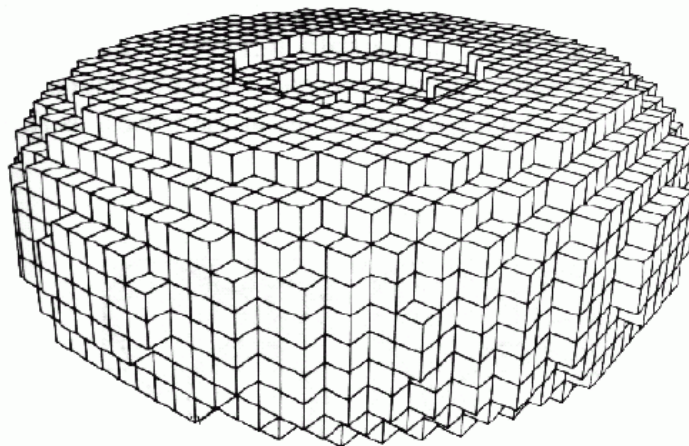
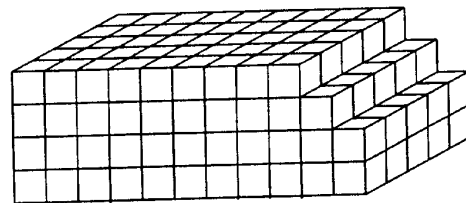
Kriterium: Liegt der Mittelpunkt einer Zelle im Körper oder nicht?

Alle Zellen, deren Mittelpunkt im Körper liegen, ergeben eine Liste von Zellen bzw. eine Bit-Matrix.

Genauigkeit: abhängig von der Kantenlänge h , den zur Verfügung stehenden Speicherplatzressourcen, der Beschaffenheit der Begrenzungsflächen des Körpers (eben oder gekrümmt).

bei sehr hohem Speicherplatzbedarf werden Methoden der Lauflängencodierung für die Bit-Matrix verwendet.

Vorteil der Voxel-Darstellung: die einzelnen Voxel können mit zusätzlichen Parametern (Temperatur, Stoffkonzentrationen usw.) versehen und entsprechend eingefärbt werden. Anwendung u.a. in der medizinischen Visualisierung.

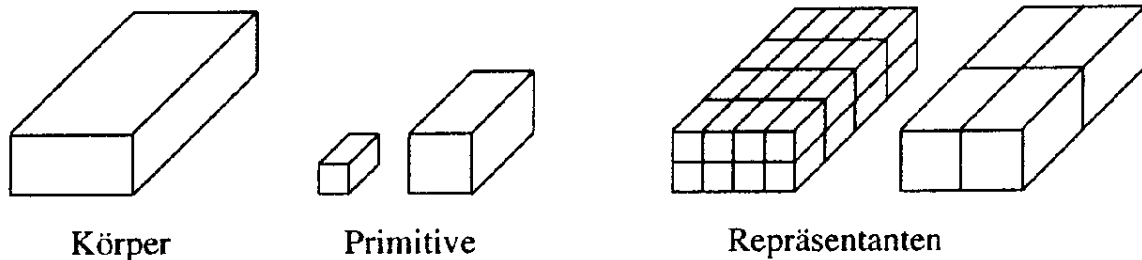


Zellzerlegungsschema:

Hier erfolgt die Modellierung eines Körpers aus (parametrisierten) Grundobjekten mittels Vereinigung ("Klebeoperationen").

Grundkörper: quaderförmig, eben berandet, aber auch gekrümmte Kanten/Flächen.

Für einen gegebenen Körper sind verschiedene Repräsentationen möglich (keine Eindeutigkeit):



Oktaalbäume (Octrees):

Anwendung eines hierarchischen und rekursiven Oktaalbaumschemas (vgl. Belegung der Farbtabelle).

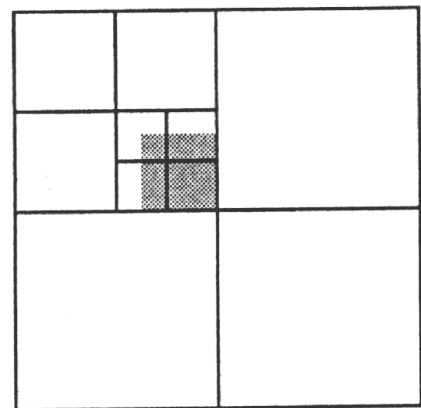
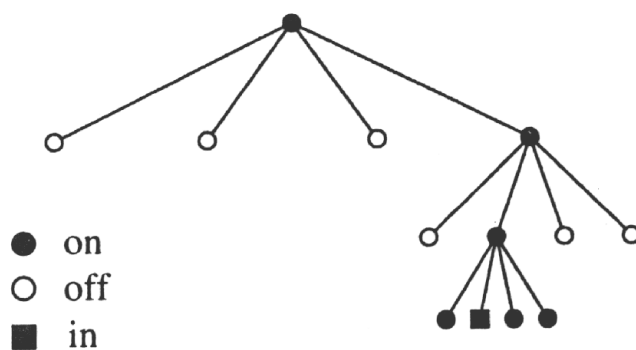
- ein den ganzen Körper umschließender Würfel wird gewählt
- rekursiv wird dieser Würfel in Teilwürfel halber Kantenlänge geteilt, bis ein Teilwürfel entweder ganz im Körper oder ganz außerhalb des Körpers liegt.

Abbruch, wenn alle Teilwürfel im oder außerhalb des Körpers liegen oder die vorgegebene kleinste Kantenlänge erreicht ist.

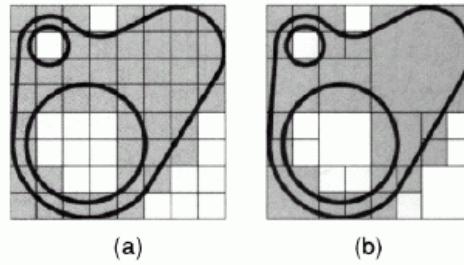
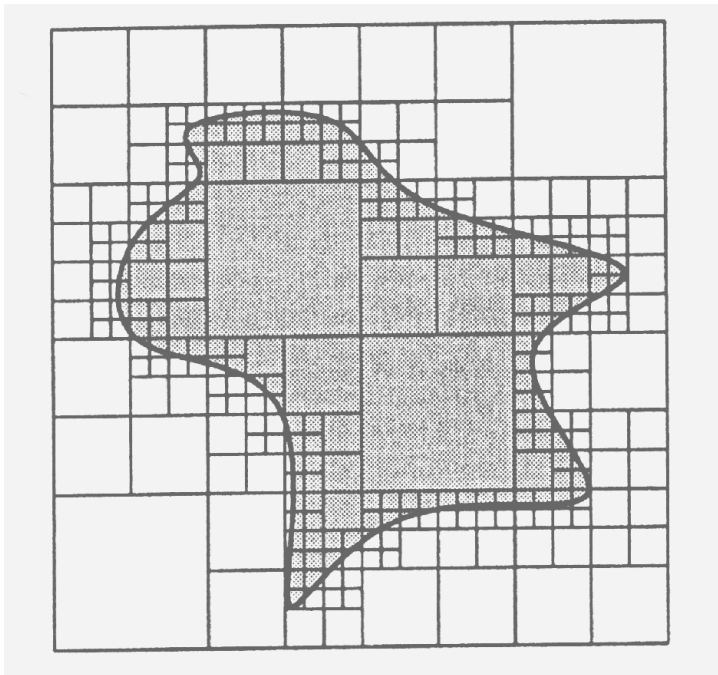
Octrees

- hierarchische Variante der räumlichen Aufzählung
- abgeleitet von Quadrees
- Grundidee: Unterteilung des Volumens (Teile-und-Herrsche-Algorithmus)
- weniger Speicherplatzbedarf als Voxelmodelle
- Baum repräsentiert Modell
 - Knoten: Zelle mit Zustand (E=Leer, F=Voll, P=teilweise voll)
 - Kanten: Teilbereiche der Zelle

Beispiel: Quadtree (= 2D-Version der Datenstruktur) der Tiefe 3 für ein einfaches Objekt

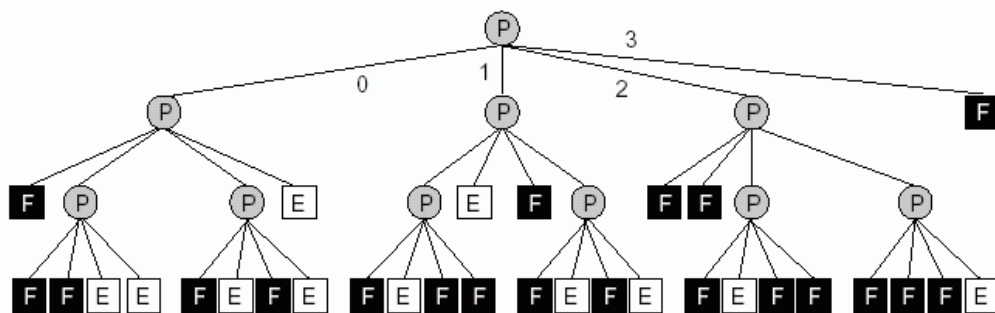


weitere Beispiele:

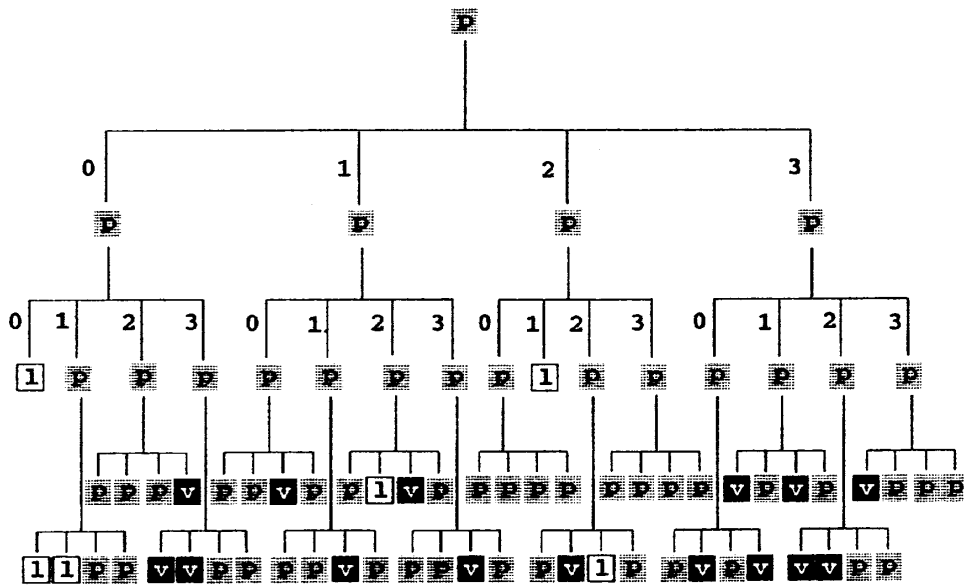
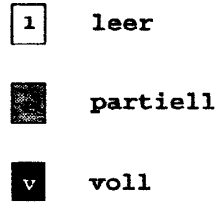
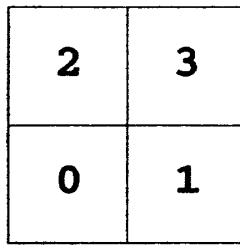


2	3
0	1

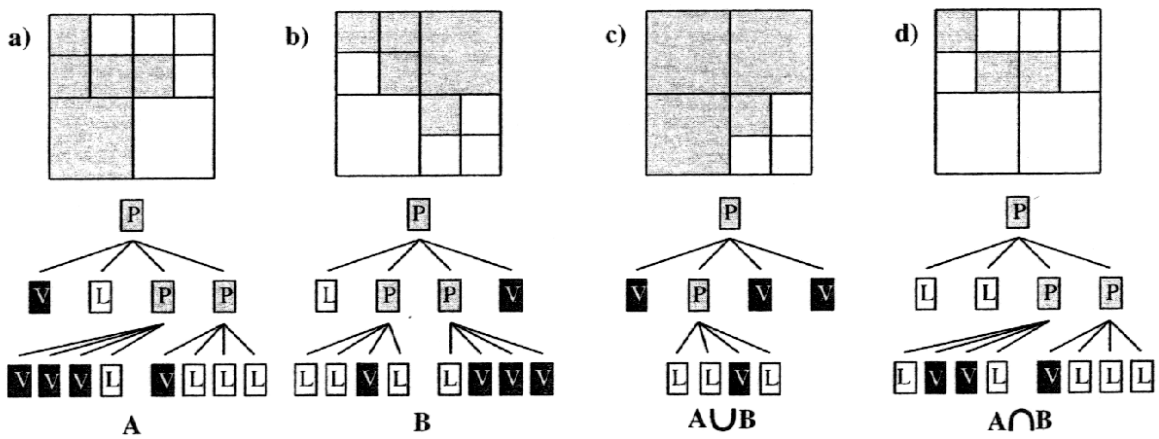
Quadrant numbering



Numerierung der Quadranten



Boolesche Operationen mit Quadrees:



Oktaalbäume sind im Speicherplatzbedarf oft eine Ordnung effizienter als Normzellen-Aufzählungsschemen. Sie liefern einen eindeutigen Repräsentanten des vorgegebenen Körpers.

- generell weniger Speicherplatz als Voxelmodelle
- boolesche Operationen durch paarweises Traversieren der Bäume und Kombinieren der Knoten
- Transformationen in Spezialfällen einfach, generell kompliziert
- Problem: Auffinden *geometrischer* Nachbarn
- generelles Problem: Aliasing

Zusammenfassung:

Zellmodelle werden oft bei Finite Elemente-Methoden benutzt.

Nachteilig ist, dass nur Körper sehr genau beschrieben werden können, deren Oberflächen parallel zu den Würfeln (Voxel) liegen.

Binary Space Partitioning - Bäume (BSP Trees):

Statt in Octrees zu zerlegen, wird eine binäre Raumaufteilung gewählt.

Dabei werden die Baumknoten nicht in acht Oktanten, sondern in zwei Hälften aufgeteilt. Das kann sukzessive in x,y,z-Richtung erfolgen. Eine Ebene mit beliebiger Richtung, Orientierung und Lage wird zur Trennung in Teilbäume benutzt.

Jeder Knoten besitzt dann eine Flächengleichung und zwei Zeiger auf die beiden Halbräume H1 und H2. Der Normalenvektor der Ebene zeigt dabei meist auf das „Äußere“ des H2-Halbraumes.

Wird der Knoten nicht mehr unterteilt, entsteht ein Blatt, das einen Teil repräsentiert, der entweder ganz innen oder ganz außen zum Objekt liegt.

BSP-Trees

Octrees:

- Unterteilung je Level in *allen* drei Dimensionen
- Schnittebenen immer senkrecht zueinander

BSP-Trees:

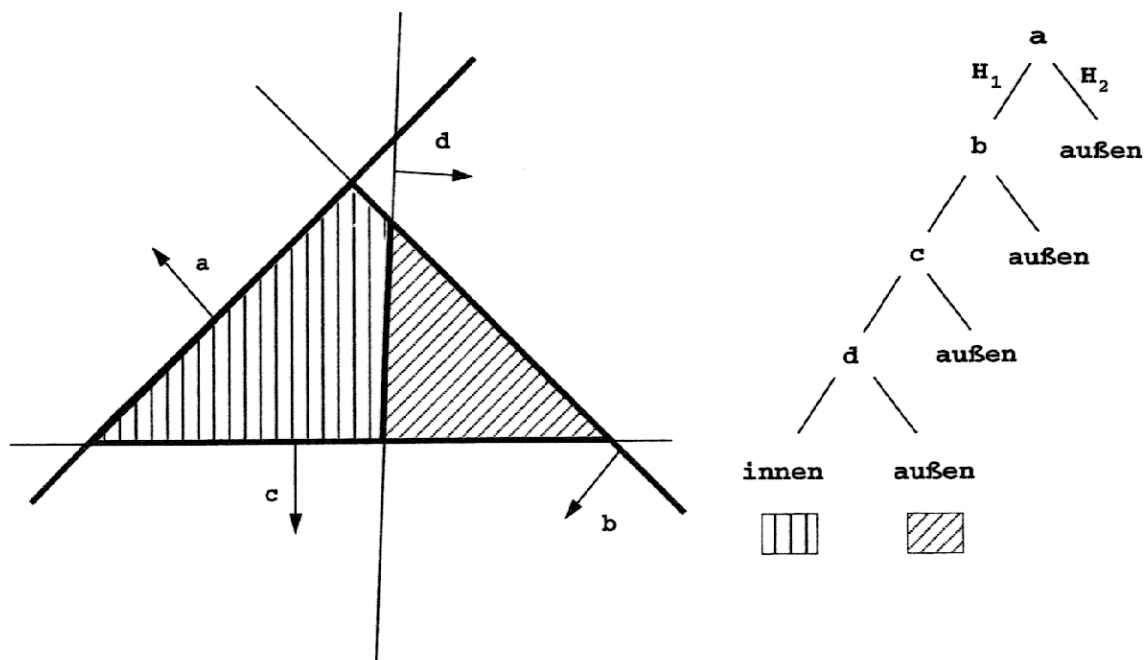
- Unterteilung in genau zwei Halbräume durch arbiträre Ebenen
- → Binärbaum
- Verwendung auch für Visible Surface Determination

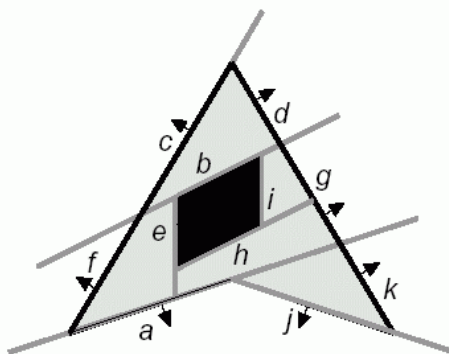
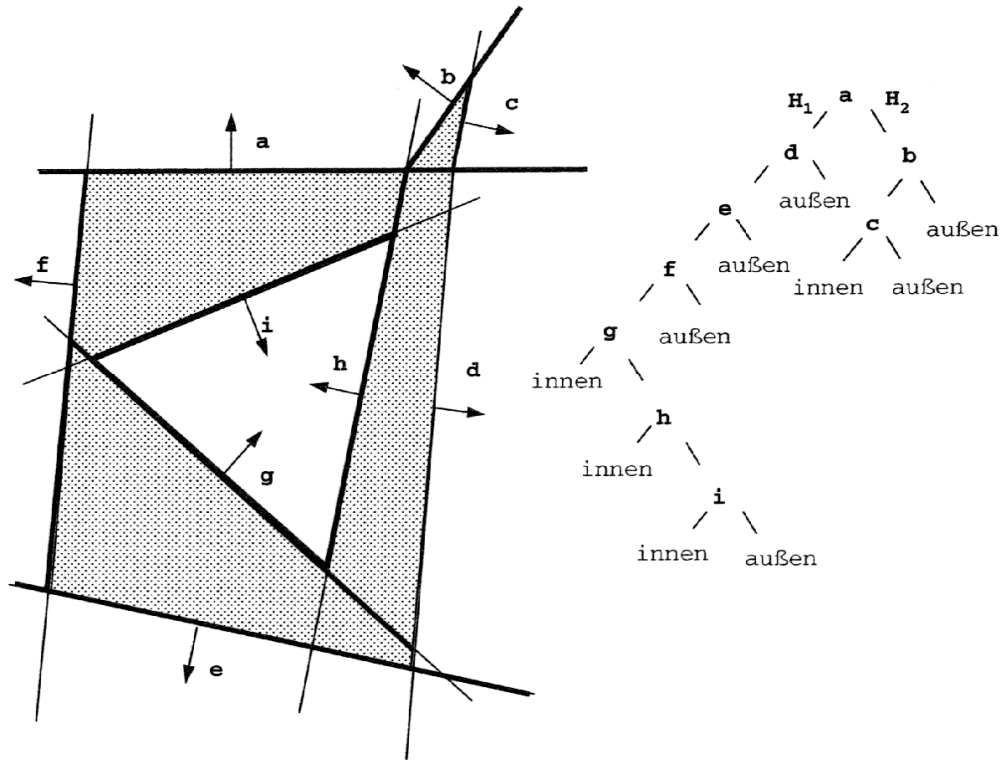
Innere Knoten repräsentieren eine Ebene (die zur Unterteilung benutzt wurde), Kindknoten entsprechen den Halbräumen auf je einer Seite der Ebene:

- links: hinter bzw. innerhalb der Ebene
- rechts: vor bzw. außerhalb der Ebene

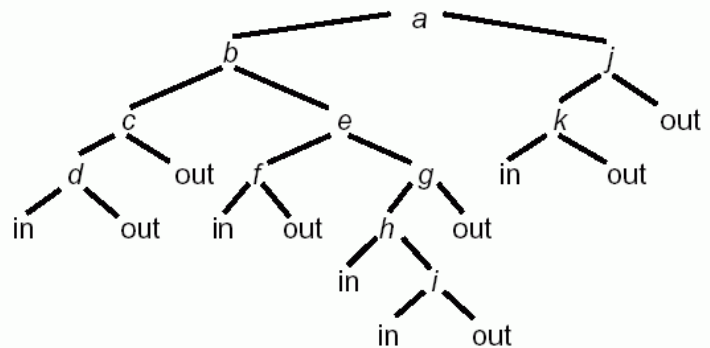
wenn die Normalen als nach außen zeigend angenommen werden.

Halbräume werden weiter unterteilt, wenn sie nicht homogen besetzt sind (dann ist der entsprechende Kindknoten Wurzel eines neuen Teilbaumes).





(a)



(b)

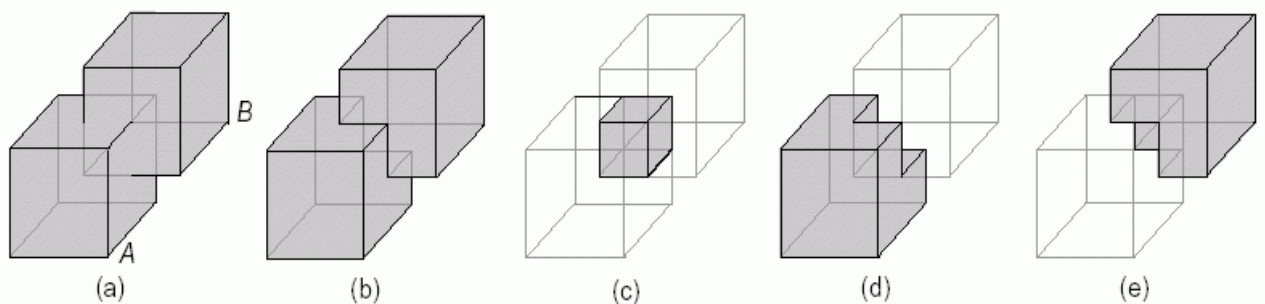
- zugrundeliegendes Unterteilungskonzept ist dimensionsunabhängig
→ Möglichkeit, eine geschlossene boolesche Algebra auf BSP-Bäumen zu definieren, was Operationen vereinfacht
- Polygone können zerteilt werden bei der Konstruktion des Baumes
→ möglicherweise weniger kompakte Repräsentation

CSG (Constructive Solid Geometry) - Modelle

- Modellierung entspricht der Vorgehensweise beim Konstruieren von Körpern
- Körper werden durch **regularisierte Mengenoperationen** aus vorgegebenen Grundkörpern gebildet

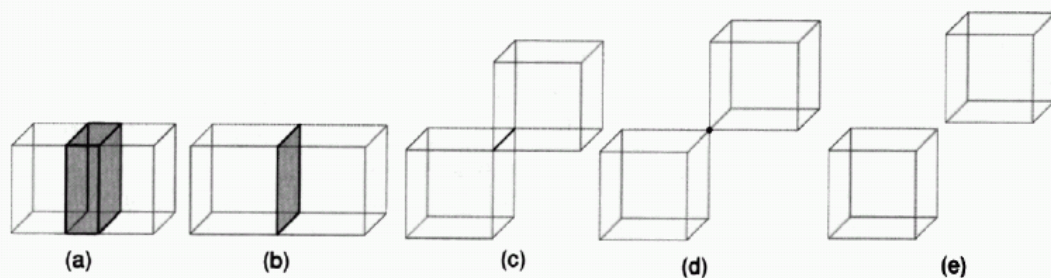
Definition für regularisierte Mengenoperationen (siehe oben):

$A \text{ op}^* B = \text{abgeschlossene Hülle (Inneres (A op B))}$



(b): $A \cup B$, (c): $A \cap B$, (d): $A - B$, (e): $B - A$

Problem: Bei konventionellen Mengenoperationen können Punkte, Strecken, Flächen oder Volumina entstehen.



Abhilfe: *Regularisierte Boolesche Operationen* \rightarrow Ergebnisse sind immer Volumina

Die Darstellung erfolgt als Binärbaum:

Primitive = Blätter

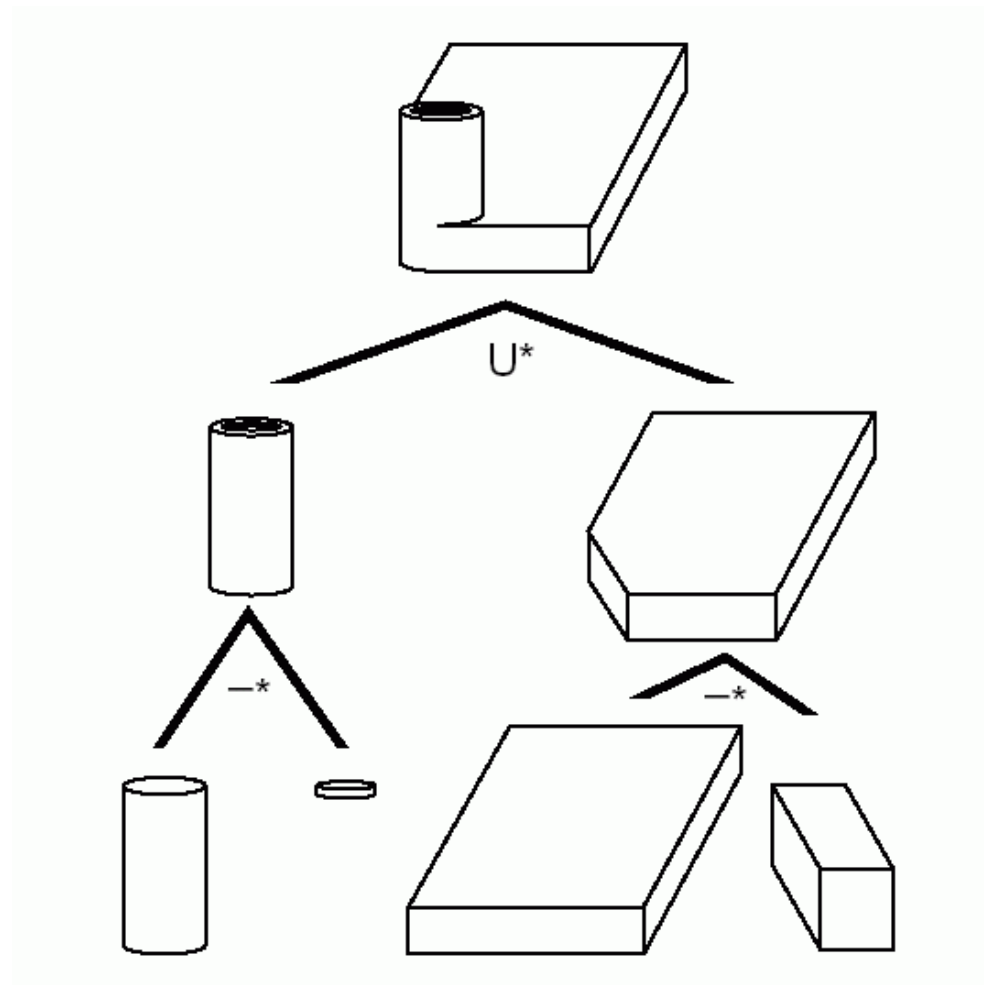
Operatoren = Knoten

Für die geeigneten Grundkörper gilt als Eignungskriterium:

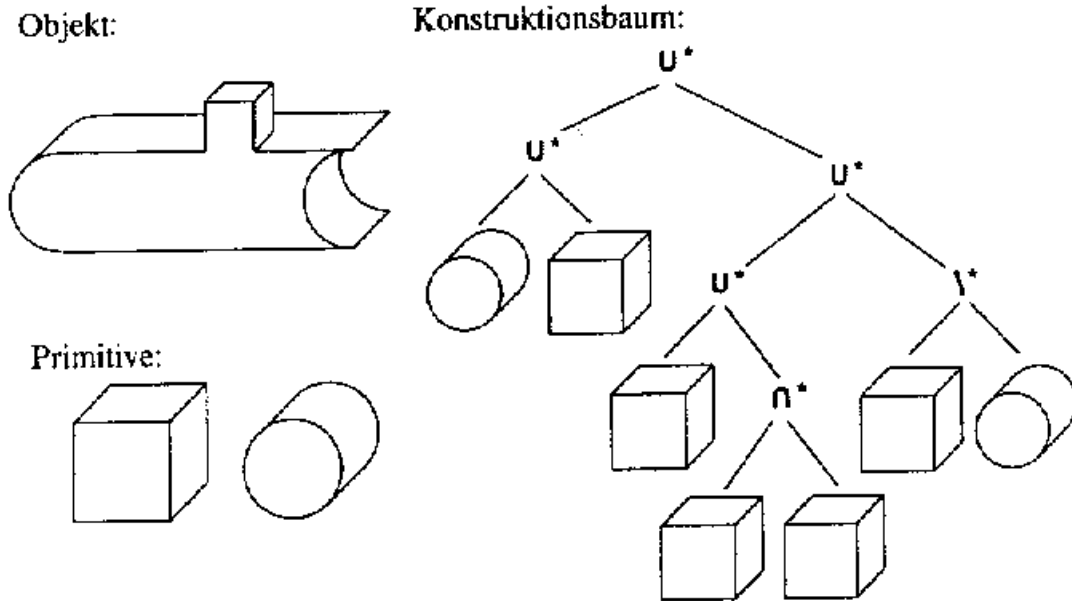
Mengenberechnungen müssen schnell und effizient erfolgen können (Würfel, Zylinder, Halbraummodelle, Boundary-Modelle)

Bei CSG-Bäumen können verschiedene Bäume den gleichen Körper repräsentieren!

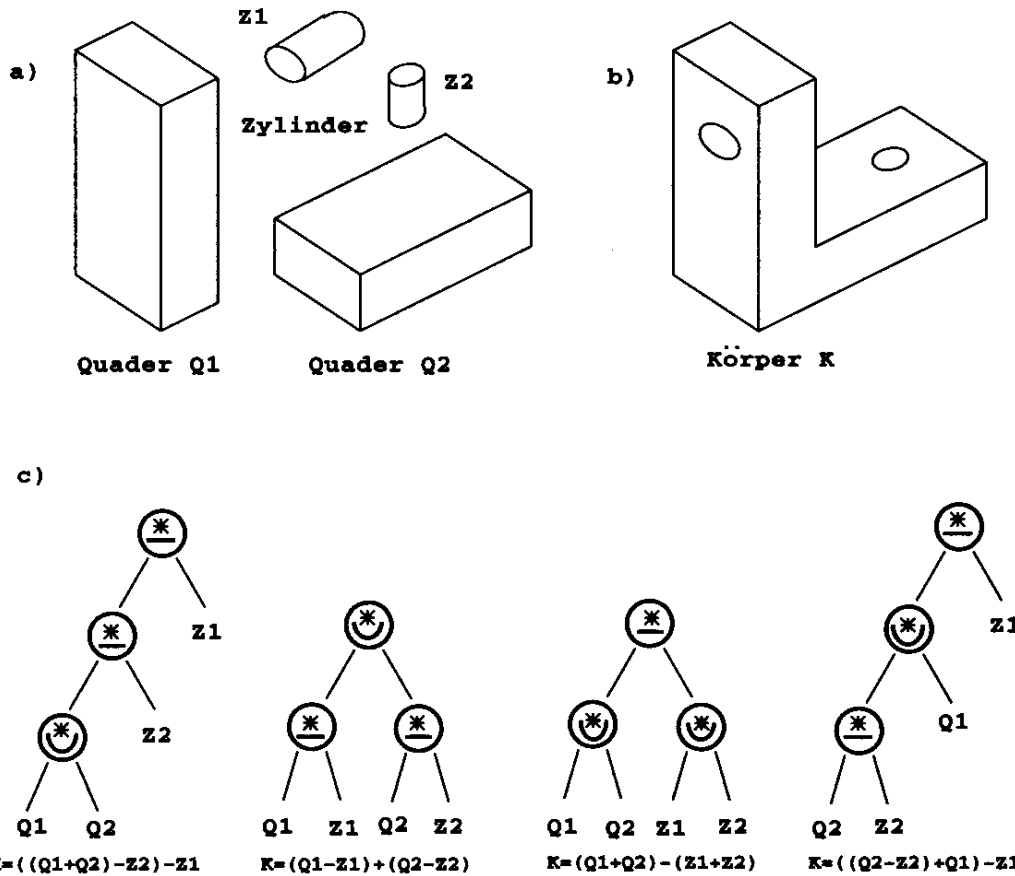
Beisp.: Bildung eines Werkstückes aus Quadern und Zylindern



weiteres Beispiel:



Nicht-Eindeutigkeit der CSG-Darstellung:



In einem CSG-Baum wird die Geometrie von Kanten und Flächen nicht im Baum abgespeichert!

Sie muss erst aus dem Baum ermittelt werden.

Klassifikation einer Menge M bezogen auf ein CSG-Objekt Q :

$M: M \text{ in } Q$	oder	$M \text{ auf } Q$	oder	$M \text{ aus } Q$
Menge von		Menge von		Menge von
Punkten,		Punkten,		Punkten,
die in Q		die auf		die außerhalb von Q
liegen		dem Rand von Q		liegen
		liegen		

Das muss auf der Ebene der Primitive berechnet werden, da nur sie die Geometriewerte enthalten. Dazu wird der Baum rekursiv bis zu den Primitiven durchlaufen, dann dort die Berechnung für ein Primitiv durchgeführt. Das Teilergebnis wird mit Hilfe der Operatoren (Knoten im Baum) wieder sukzessive zusammengesetzt, bis das Ergebnis für das Gesamtobjekt vorliegt.

Genau diese aufwändige Operation begrenzt die Einsatzgebiete.

Bei direkten Displayalgorithmen wird daher oft keine vollständige Konvertierung eines CSG-Baumes in eine Boundary-Repräsentation durchgeführt.

Bewertung CSG

- Beschreibung ist nicht eindeutig (mehrere mögliche Bäume für ein Objekt)
- gute Editierbarkeit, weite Verbreitung
- Darstellung über Strahlverfahren (Raytracing) gut möglich
- Konstruktion der endgültigen Oberfläche aufwendig

Hybridmodelle:

Grundidee: Jedes Modell ist nur für bestimmte Einsatzzwecke gut, für andere wiederum nicht.

Konstruktion: CSG-Darstellung gut wegen Boolescher Operationen.

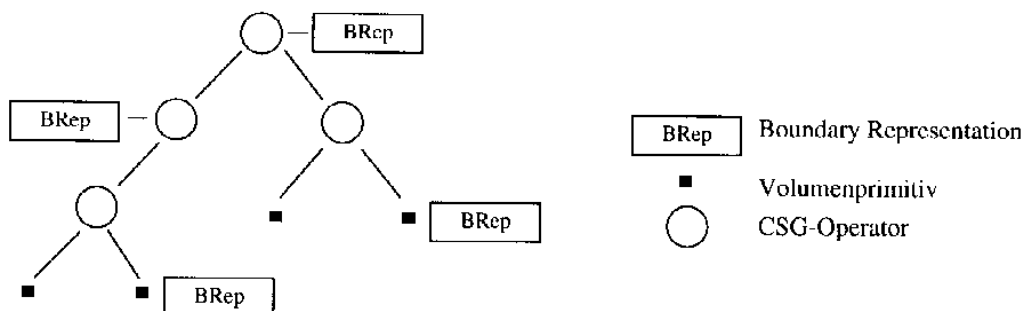
schnelle Visualisierung: Boundary-Repräsentationen (BRep) besser, da keine Neuauswertungen des CSG-Baumes nach affinen Transformationen nötig sind.

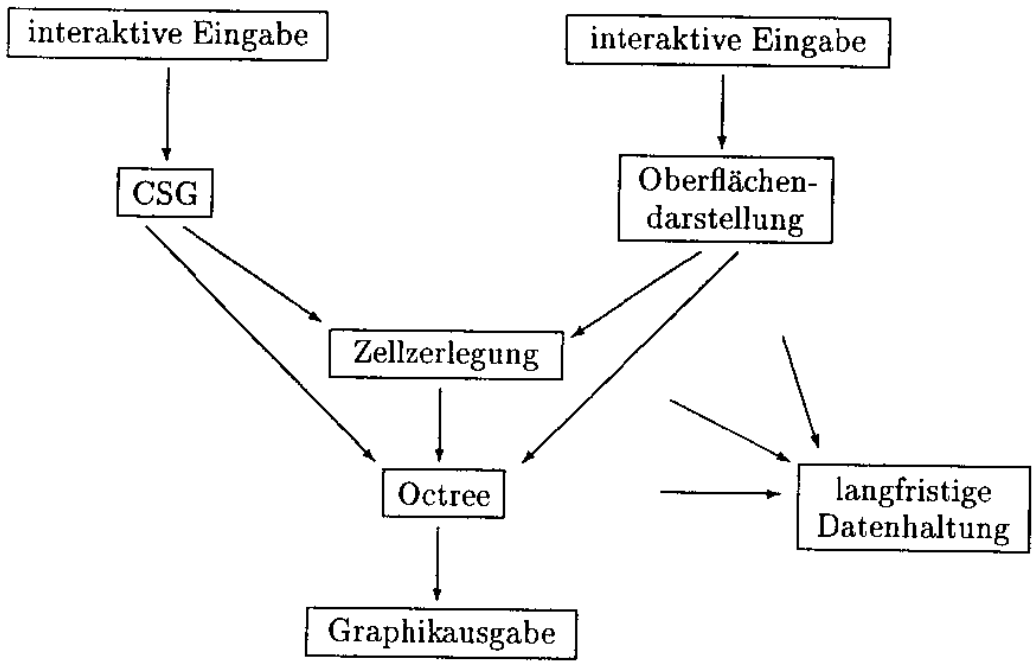
Konvertierungsalgorithmen:

von	nach	----- >	
	CSG	BOUNDARY	ZELLMODELLE
CSG	X	gelöst	einfach/approximativ
BOUNDARY	nicht gelöst	X	einfach/approximativ
ZELL	nicht gelöst	nicht gelöst	X

Beachte: Rückkonvertierungen bei approximativen Konvertierungen sind nicht sinnvoll!

Oft ist es schwierig, dabei die Konsistenz zwischen den verschiedenen Repräsentationen zu erhalten
– oft nur für bestimmte Objekte und nicht in allen Phasen gewährleistet !



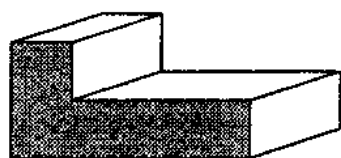
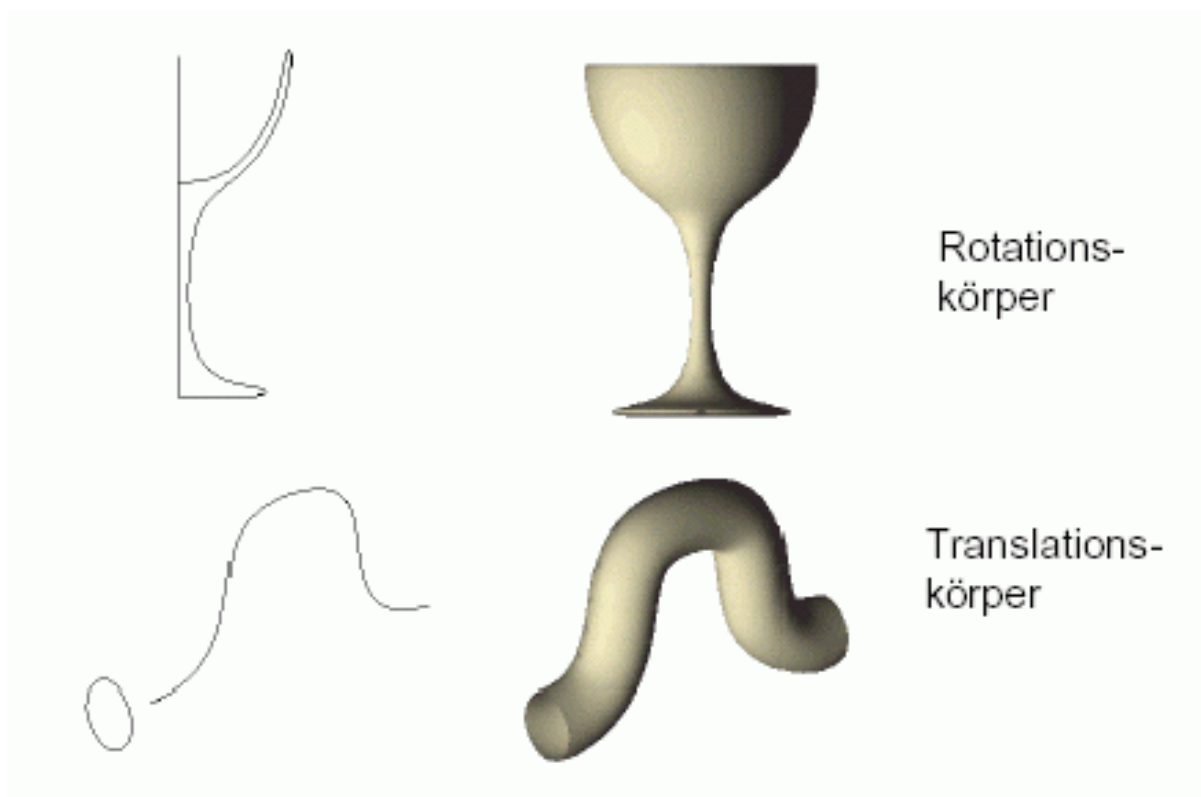


weitere Modellierungs-Ansätze:

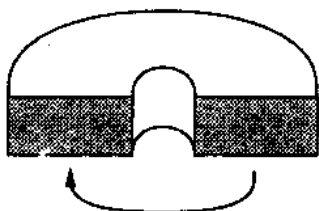
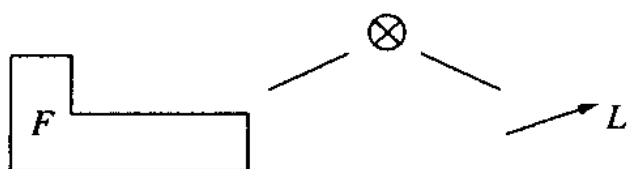
Sweep-Körper (Extrusion)

Es werden Körper durch eine Fläche (Grundfläche) und eine Transformationsvorschrift (Erzeugende) beschrieben.

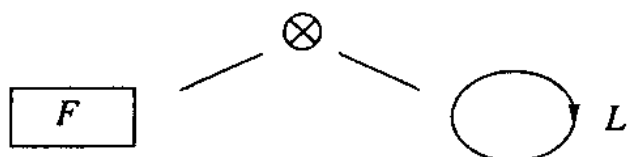
Aus einem Kreis als Grundfläche und einer erzeugenden senkrechten Linie im Mittelpunkt des Kreises entsteht durch Translation in Richtung der Linie ein Zylinder.



\cong

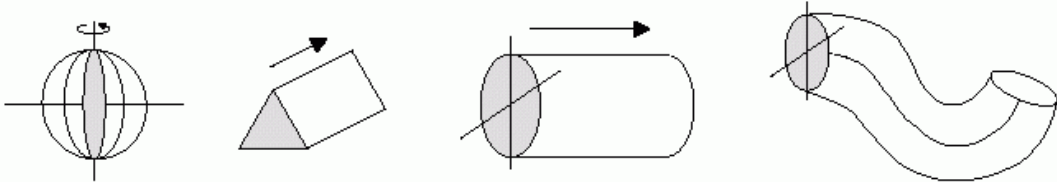


\cong



Sweep-Körper

Objekt wird durch eine Fläche (Grundfläche) und eine Transformationsvorschrift beschrieben (=generalisierter Zylinder).

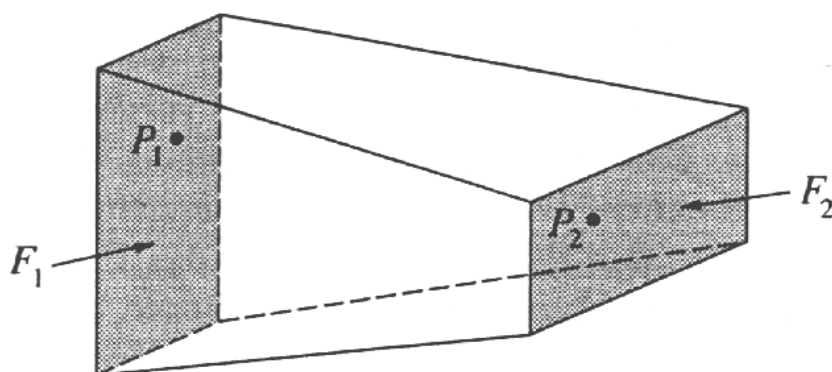


problematisch:

- Selbstüberschneidungen der Kurve (Was ist dann das Volumen?)
- Kurve liegt in Flächenebene (Leeres Volumen?)

Kombination mit Skalierungsoperationen (entlang der Sweep-Kurve) und mit Rotationen möglich.

Flächeninterpolation



lineare Interpolation zwischen zwei Flächenstücken.