

8. Grundlagen über 2D-Vektorfelder

Übergang von skalaren Daten zu Vektordaten

- Vektoren
 - ♦ Im zweidimensionalen Raum: 2 Komponenten
- Beispiele:
 - ♦ Windrichtung und -geschwindigkeit
 - ♦ Strömung an der Oberfläche
 - ♦ Bewegungsrichtung von Personen in einem Kaufhaus

Vektorfeld: ordnet jedem Punkt des Definitionsbereichs einen Vektor zu

Möglichkeit der Reduktion auf Skalarfeld: mittels folgender Kennwerte möglich

- Skalare Werte

- ♦ Norm $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
- ♦ Divergenz $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$
- ♦ Rotation $\operatorname{rot} u = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$

(Weimar 2005)

(zu den Definitionen gleich näheres).

2D Vektorfeld:

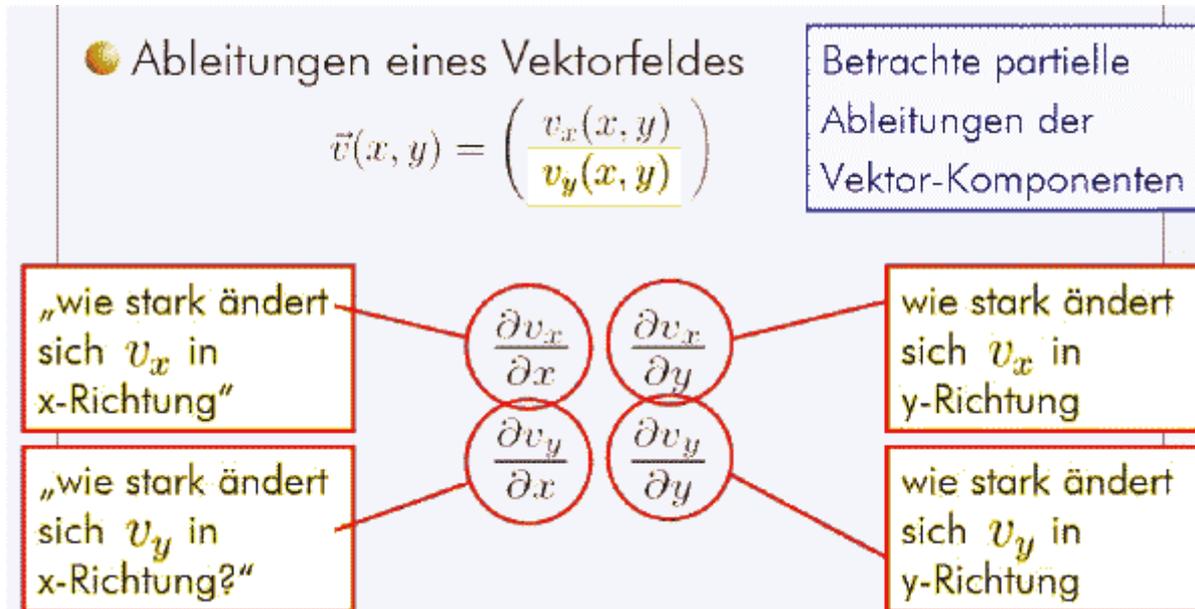
- selten analytisch gegeben:

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

- üblicherweise als diskrete Daten:

$$(x_i, y_i) \mapsto \vec{v}_i = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}_i \quad i \in [0, \dots, N]$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass das Vektorfeld differenzierbar ist, d.h. dass alle partiellen Ableitungen existieren.



Zusammenfassung in einer Matrix:

- Ableitungen eines Vektorfeldes

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix}$$

- Totales Differenzial:

$$J_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die *Jacobi-Matrix (Fundamental-Matrix)* beschreibt vollständig „wie stark sich das Vektorfeld in Punkt (x, y) ändert“

Wozu braucht man die Jacobi-Matrix?

● **Richtungsableitungen** in Richtung \vec{h} :

$$\frac{\partial \vec{v}(x, y)}{\partial \vec{h}} = J_{\vec{v}} \vec{h} \quad \text{mit} \quad |\vec{h}| = 1$$

Beispiele:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Lokale Eigenschaften eines Vektorfeldes, die über die Ableitungen definiert sind:

Als **Divergenz** bezeichnet man die Summe der Diagonalelemente der Jacobimatrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{div } \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

● Die Divergenz erlaubt Aussagen über die Stärke von **Quellen** und **Senken** im Vektorfeld, bzw. über das „Auseinanderstömen“

Quelle bei \vec{x}_0

$$\text{div } \vec{v}(\vec{x}_0) > 0$$

Senke bei \vec{x}_0

$$\text{div } \vec{v}(\vec{x}_0) < 0$$

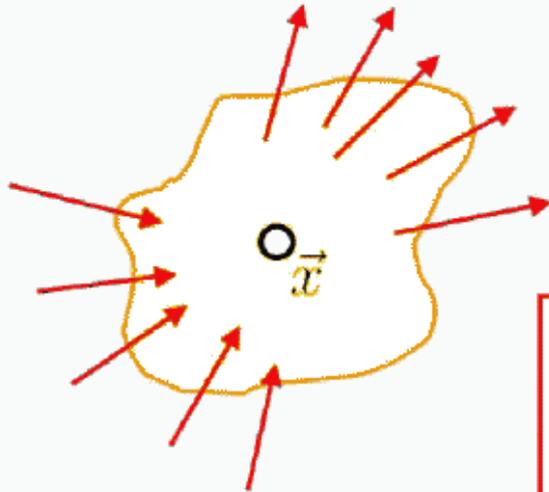
weder Quelle
noch Senke

$$\text{div } \vec{v}(\vec{x}_0) = 0$$

Die Divergenz

Anschaulich:

Betrachte ein kleines Flächenstück S in Umgebung von \vec{x}



- Wie stark ist die Strömung, die reinfließt?
- Wie stark ist die Strömung, die rausfließt?
- Lasse das Flächenstück S infinitesimal klein werden.

Die Divergenz ist das „Verhältnis zwischen Ein- und Ausströmung“

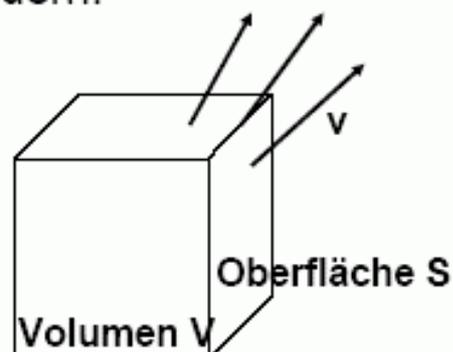
(Rezk-Salama, o.J.)

- Bezeichnung: $\text{div } \mathbf{v}$, auch: $\nabla \cdot \mathbf{v}$ (Skalarprodukt von Gradientenfeld und Vektorfeld)
- analog auch für 3D-Vektorfelder definiert

Eigenschaften der Divergenz

- Gauß-Theorem (Divergenztheorem):
Anschaulich: Ohne Entstehung oder Zerstörung von Teilchen, kann sich die Dichte in einer Region (V) nur über dessen Grenzfläche (S) ändern.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$



(Bartz 2005)

weitere lokale Eigenschaft: Rotation

Als *Rotation* bezeichnet man (in 2D) die Differenz der Elemente der Gegendiagonale der Jacobimatrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

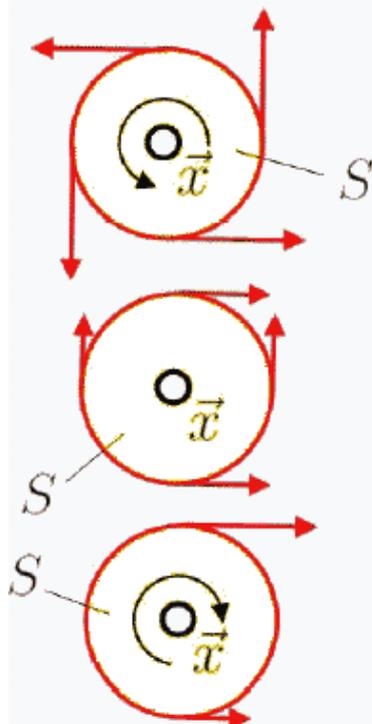
$$\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

- Die Rotation (engl. auch curl) erlaubt Aussagen über die *lokale Rotation*, d.h. die *Wirbelhaftigkeit* (Vorticity) der Strömung.

$$\begin{array}{l} \text{Keine Rotation um } \vec{x}_0 \\ \text{rot } \vec{v}(\vec{x}_0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Lokale Rotation um } \vec{x}_0 \\ \text{rot } \vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0 \end{array}$$

Anschaulich:



Betrachte eine kleine Kreisfläche S in Umgebung von \vec{x}

- Wie stark ändert sich die *Tangentialströmung* in x - und y -Richtung?
- Lasse das Flächenstück S infinitesimal klein werden.

Die *Rotation* ist ein Maß für die lokale „Verwirbelung“ einer Strömung

Beispiele spezieller 2D-Vektorfelder:

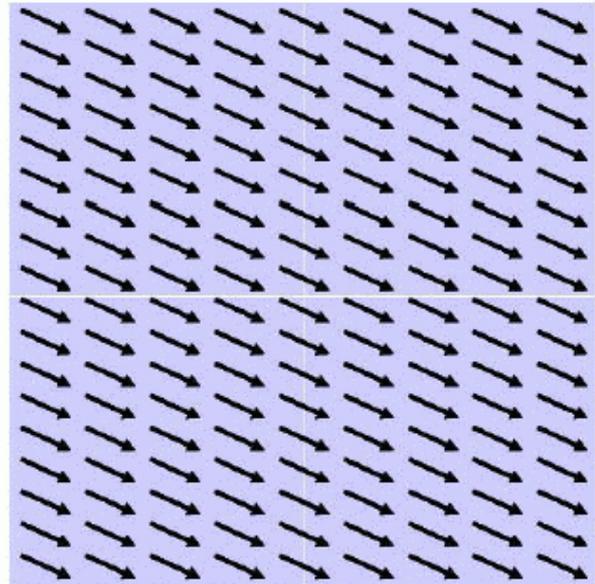
Konstantes Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y) = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y) = 0$$



Gleichförmige, laminare Strömung,

kein Auseinanderströmen (keine Divergenz),

keine Verwirbelung (keine Rotation)

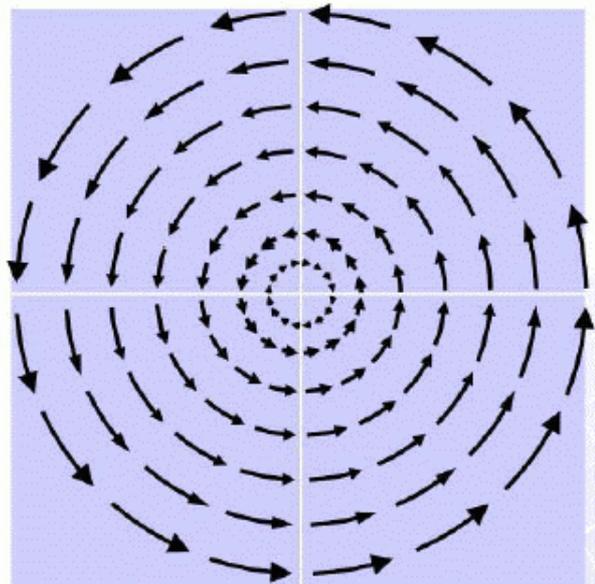
Zirkulares Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y) = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y) = 2$$



Kein „Auseinanderströmen“ (keine Divergenz),

Lokale Rotation in jedem Punkt

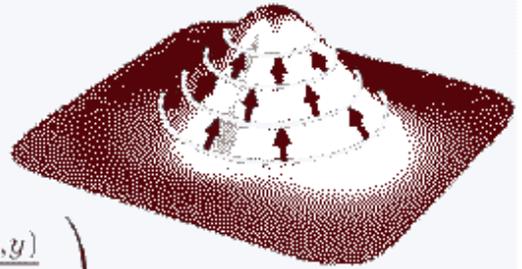
Gradient eines Potentialfelds:

$$\vec{v}(x, y) = \text{grad } f(x, y)$$

$$J_{\vec{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \vec{v}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\text{rot } \vec{v}(x, y) = 0$$



Gradientenfelder sind *konservativ*, d.h. generell *rotationsfrei* (Zirkulationen sind nicht möglich)

weitere wichtige lokale Objekte in 2D-Vektorfeldern sind "kritische Punkte".

● Kritische Punkte (Fixpunkte):

Punkte im Vektorfeld, an denen die Strömung gleich null ist, d.h.

$$\vec{v}(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

● Die Taylorentwicklung liefert

$$\vec{v}(\vec{x}_0 + \vec{h}) \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + J_{\vec{v}}(\vec{x}_0) \vec{h}$$

und somit

$$\vec{v}(\vec{x}_0 + \vec{h}) \approx J_{\vec{v}}(\vec{x}_0) \vec{h}$$

Die Eigenschaften der Strömung in unmittelbarer Umgebung des kritischen Punkt wird allein durch $J_{\vec{v}}(\vec{x}_0)$ bestimmt.

Zur näheren Charakterisierung eines kritischen Punkts sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von J_v wichtig.

Dazu Exkurs (Wiederholung):

Eigenwerte einer Matrix

Als Eigenwert einer $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} bezeichnet man Skalarwerte λ , die die Gleichung

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

erfüllen.

Diese Gleichung ist für bestimmte Paare von Eigenwerten λ und Eigenvektoren \vec{x} erfüllt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{x} &= \lambda \mathbf{Id} \vec{x} \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{Id})\vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

charakteristisches Polynom

lösbar für $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{Id}) = 0$

Dabei wird $x \neq 0$ vorausgesetzt!

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(3 - \lambda) + 2 = 0 \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Zwei Lösungen: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = y$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x = y$$

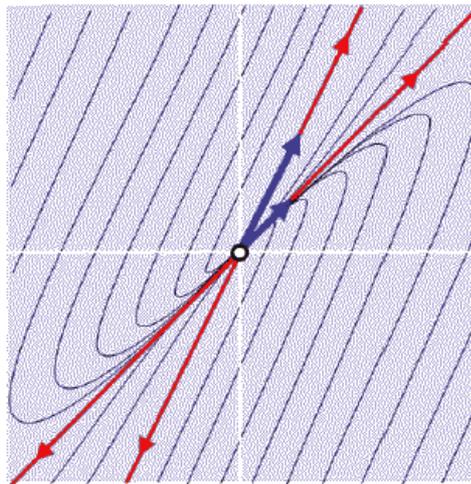
$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Betrachte das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbf{A} \vec{x}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(2 - \lambda) + 10 = 0 \quad \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

Zwei Lösungen im Komplexen: $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}$

$$\lambda_1 = 1 + 3i \quad \lambda_2 = 1 - 3i$$

Allgemein gilt:

Für jede reelle $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} gilt:

- die Matrix \mathbf{A} hat genau n (möglicherweise komplexe) Eigenwerte.

(jeder Eigenwert wird entsprechend seiner Vielfachheit gezählt)

[Fundamentalsatz der Algebra]

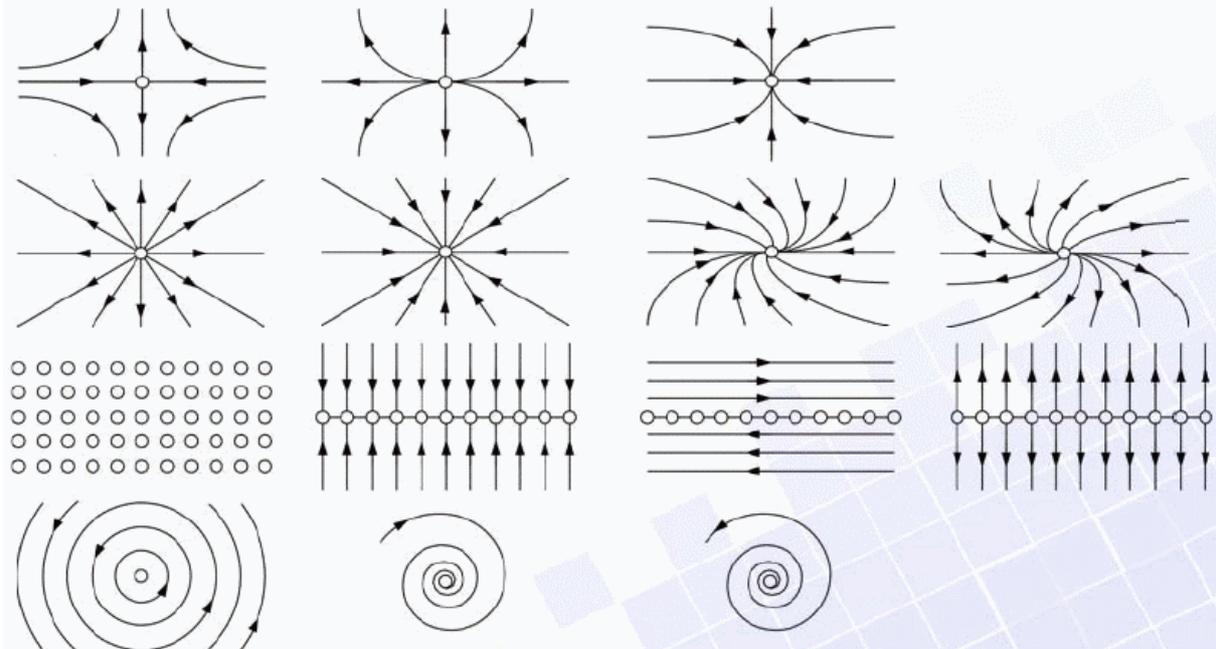
- Komplexe Eigenwerte treten nur als Paare konjugiert komplexer Zahlen $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ auf.

(Dies bedeutet auch, dass bei ungeradem n mindestens ein reeller Eigenwert existiert.)

- Der Nullvektor zählt nicht als Eigenvektor

Klassifikation kritischer Punkte von 2D-Vektorfeldern

Der Verlauf der Flußlinien in unmittelbarer Umgebung eines Fixpunktes läßt sich in bestimmte *topologische* Kategorien einordnen:



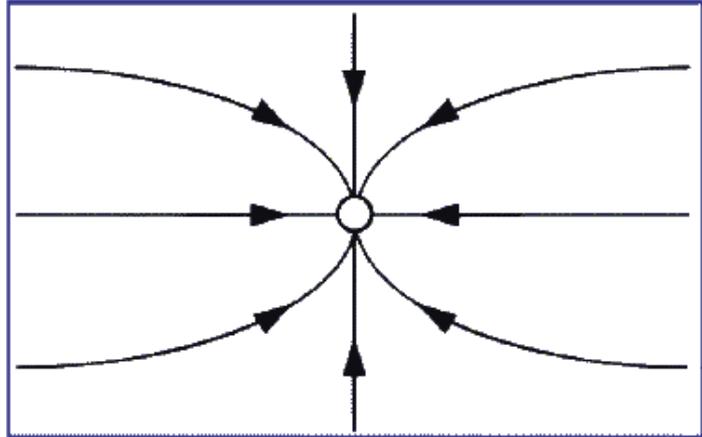
Vorgehensweise:

- Bestimme *kritische Punkte* (Fixpunkte) im Vektorfeld
 - Bestimme die *Jacobimatrix* für jeden Fixpunkt (z.B. durch zentrale Differenzen)
 - Bestimme die *Eigenwerte* der Jacobimatrix und klassifiziere nach der Topologie (= Einordnung in eine der topologischen Kategorie)
 - Bestimme die *Eigenvektoren* zu den Eigenwerten (= Bestimmung des exakten Topologie, Scherung)

Kategorie 1:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 1A:
 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

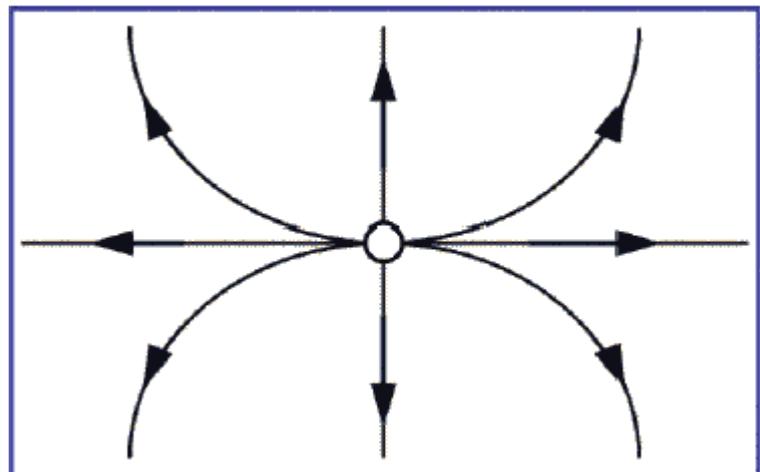
☾ **Beispiel:** $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$



Senke (sink, attracting node).
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Kategorie 1B:
 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

☀ **Beispiel:** $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

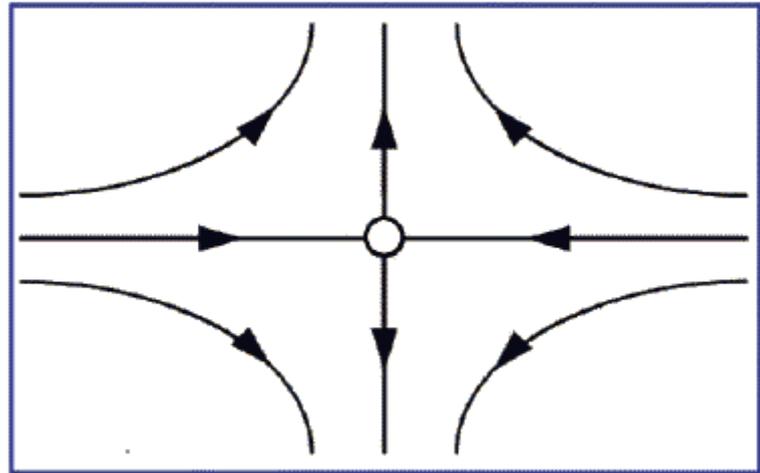


Quelle (source, repelling node).
Fixpunkt ist *instabil*.

Kategorie 1C:

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

● Beispiel:
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$



Sattelpunkt (saddle).
Fixpunkt ist *instabil*.

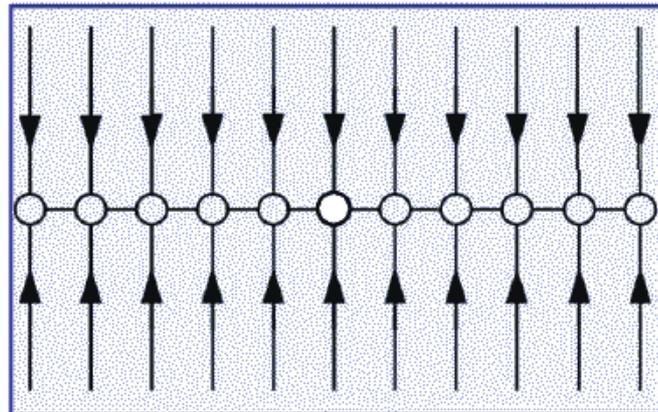
Kategorie 2:

Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte,
einer davon ist 0
2 reelle Eigenvektoren

● Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Kategorie 2A:

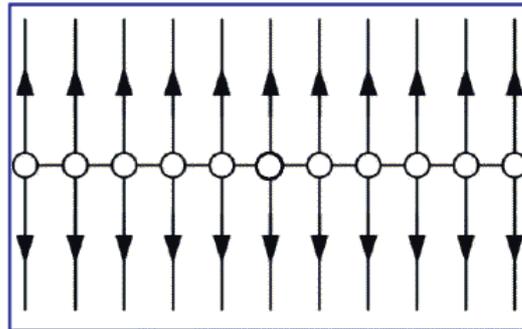
$$\lambda < 0$$



Senken auf einer Gerade
Fixpunkt ist *stabil*.

Kategorie 2B:
 $\lambda > 0$

● Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

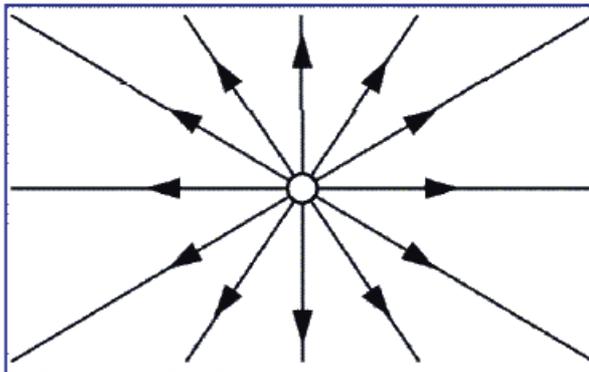


Quellen auf einer Gerade
Fixpunkt ist *instabil*.

Kategorie 3:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 3A:
 $\lambda > 0$

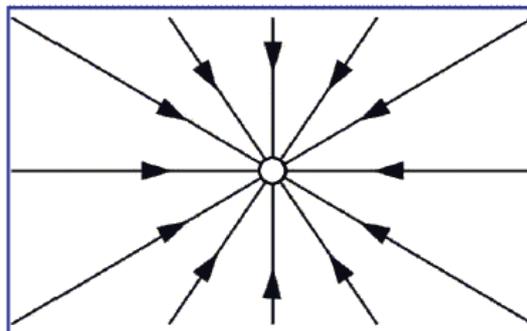
● Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Quelle (source, attracting node).
Fixpunkt ist *instabil*.

Kategorie 3B:
 $\lambda < 0$

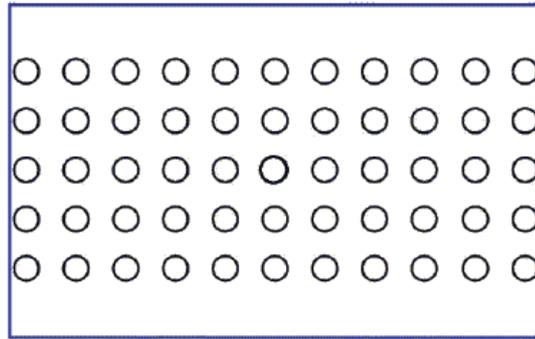
● Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Senke (sink, attracting node).
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Kategorie 3C:
 $\lambda = 0$

● Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

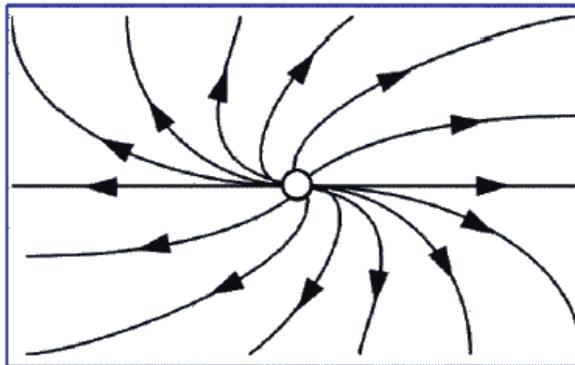


keine Strömung (alles Fixpunkte)
Fixpunkt ist *stabil*.

Kategorie 4:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
1 reellen Eigenvektor

● Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

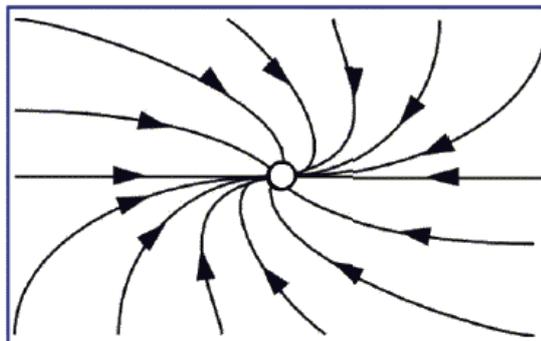
Kategorie 4A:
 $\lambda > 0$



Quelle (source, repelling focus)
Fixpunkt ist *instabil*.

Kategorie 4B:
 $\lambda < 0$

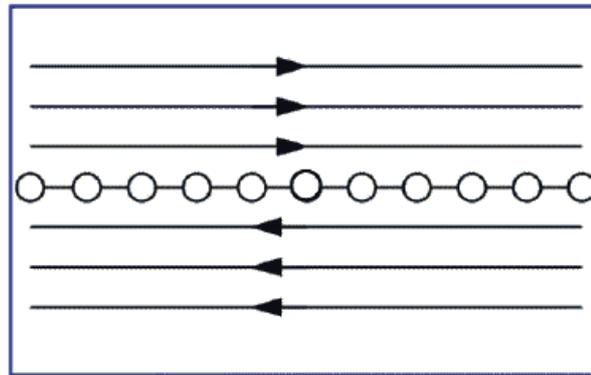
● Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Senke (sink, attracting focus)
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Kategorie 4C:
 $\lambda = 0$

● **Beispiel:** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

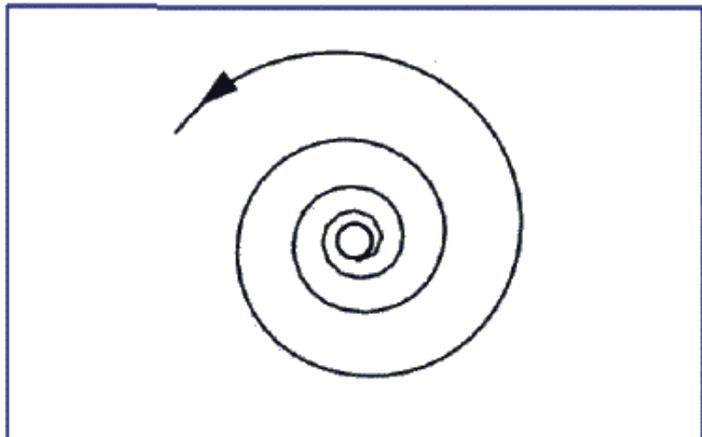


Gerade von Fixpunkten
Fixpunkt ist *stabil*.

Kategorie 5:
Jacobimatrix besitzt
2 komplexe Eigenwerte
2 kompl. Eigenvektoren

● **Beispiel:** $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$
 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

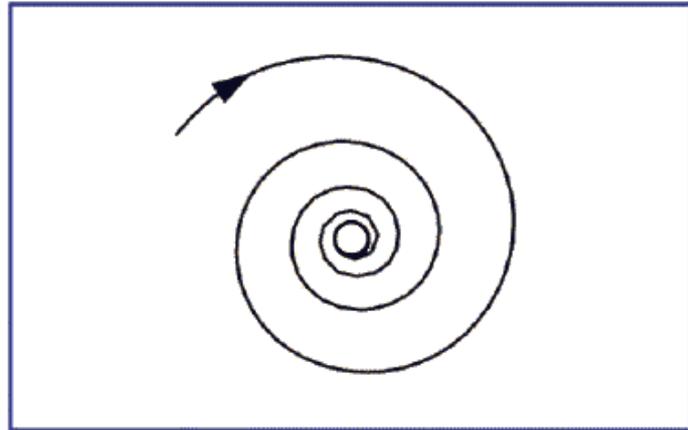
Kategorie 5A:
 $\beta \neq 0 < \alpha$



Quellwirbel (*repelling whirl*)
Fixpunkt ist *instabil*.

Kategorie **5B**:
 $\alpha < 0 \neq \beta$

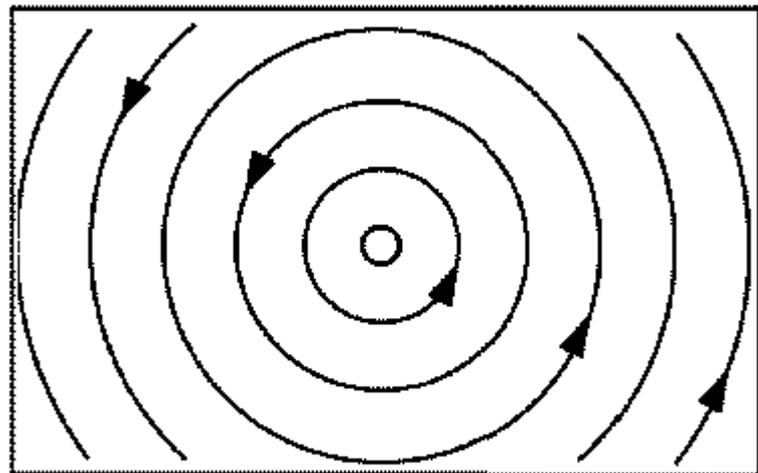
● Beispiel: $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$
 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$



Wirbelsenke (attracting whirl)
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Kategorie **5C**:
 $\alpha = 0$

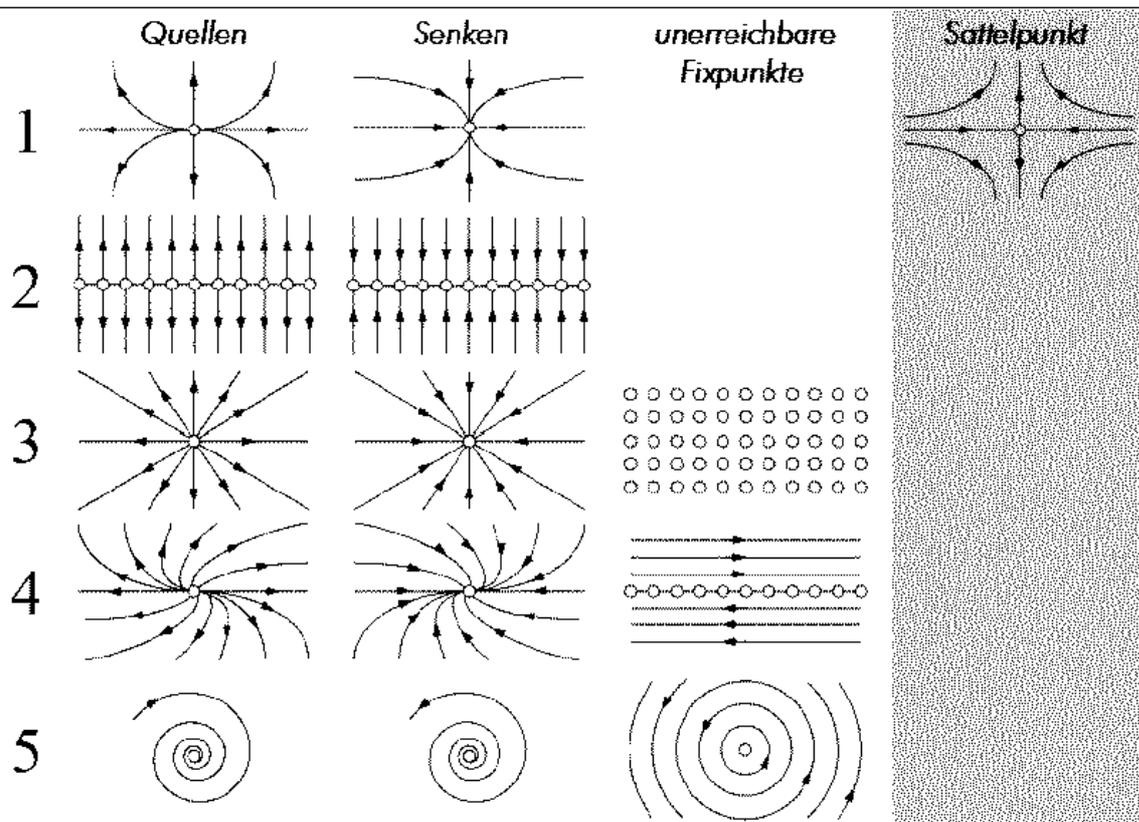
● Beispiel: $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$
 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$



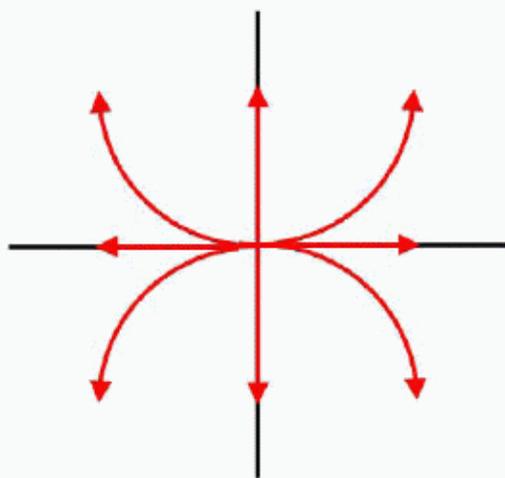
Zirkulare Strömung (center)
Fixpunkt ist *stabil*.

Zusammenfassung:

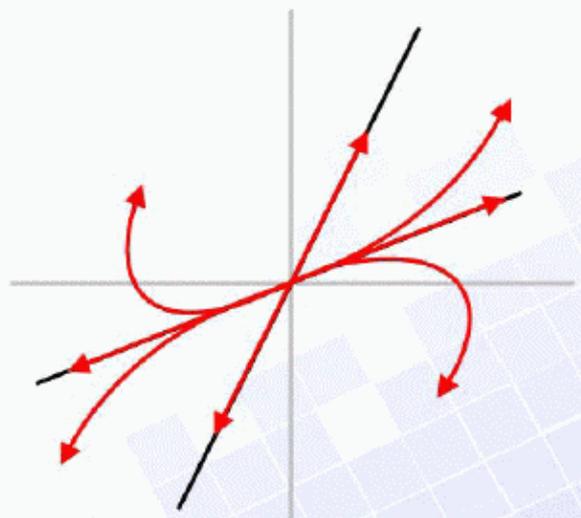
Vektorfeld-Topologie



● Welche Rolle spielen die *reellen Eigenvektoren*?
(komplexe Eigenvektoren sollen hier nicht betrachtet werden)



Bei den Beispielmatrixen waren die Eigenvektoren die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen



Bei beliebigen Jacobimatrixen bestimmen die Eigenvektoren die Scherung der Koordinatenachsen

Stabilität

Stabilität bzw Instabilität wird durch den *Realteil der Eigenwerte* bestimmt:

- Ein lineares System ist (asymptotisch) stabil, wenn für alle Eigenwerte gilt:

$$\text{Re}\lambda_k \leq 0$$

- Ein lineares System ist instabil, wenn für mindestens einen Eigenwert gilt:

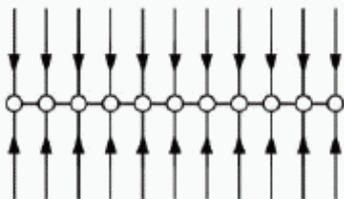
$$\text{Re}\lambda_k > 0$$

Im kritischen Punkt ist die Strömung gleich null.

Beginne ich die Berechnung einer Partikelbahn in der Nähe eines kritischen Punkts führt mich die Strömung...

stabil

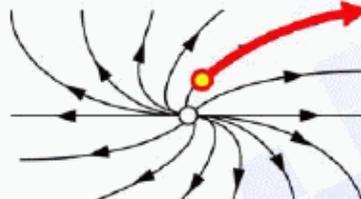
„...immer direkt in die Umgebung Fixpunkts“



„Der Fehler wird geringer bzw. bleibt konstant“

instabil

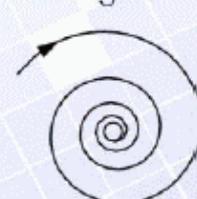
„...immer aus der Umgebung des Fixpunkts heraus“



„Der Fehler wird größer“

asymp. stabil

„...immer zu dem Fixpunkt hin, aber evtl. auf Umwegen“

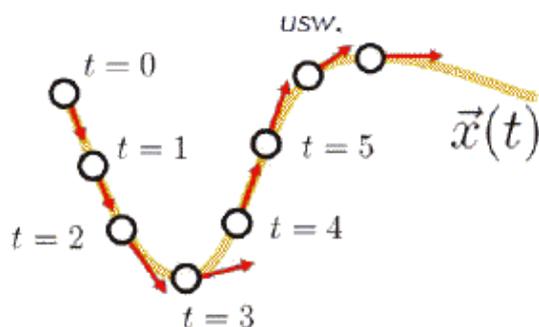


„Der Fehler wird irgendwann geringer“

Feldlinien

- Wie bestimme ich Feldlinien (Strömungslinien) im allgemeinen Fall?
 - Wir suchen die *Bahn eines Partikels*, d.h. seine Position in Abhängigkeit der Zeit.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



- Diese Bahn muß so bestimmt werden, dass sie in jedem Punkt tangential zu dem gegebenen Vektorfeld verläuft

Das Vektorfeld selbst sei zeitlich konstant (statisch)

somit: Interpretation als Geschwindigkeitsfeld für Partikel
Diskreter Lösungsansatz:

Explizites Euler-Verfahren

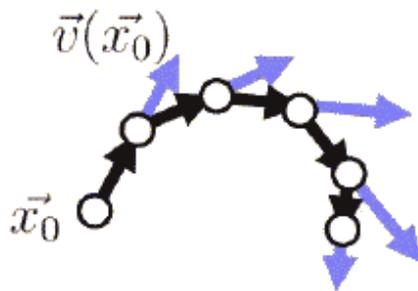
- Gegeben sei ein statisches Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ und ein Startpunkt $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$.
- Gesucht ist die Partikelbahn $\vec{x}(t)$

- *Taylorentwicklung:*

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \tau) &= \boxed{\vec{x}(t_0)} + \tau \boxed{\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t_0)} + \dots \\ \vec{x}(t_0 + \tau) &= \vec{x}_0 + \tau \vec{v}(x_0) + \dots \end{aligned}$$

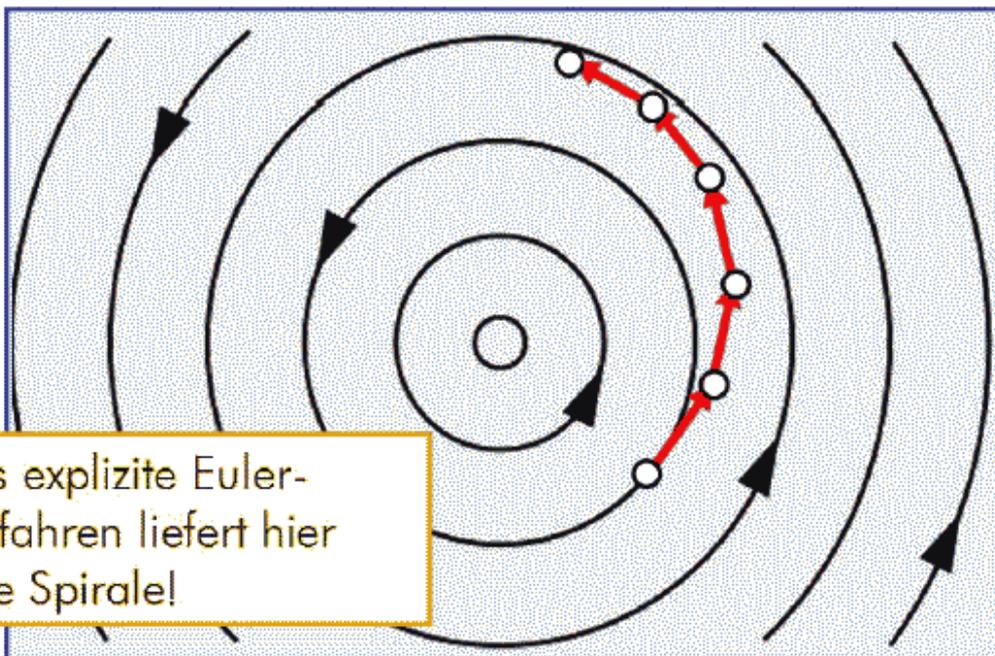
$$\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau \vec{v}(\vec{x}_i)$$

- Beginne an einem bestimmten Startpunkt \vec{x}_0
- Bestimme die Strömung $\vec{v}(\vec{x}_0)$ an diesem Punkt.
- Gehe einen kleinen Schritt in Richtung der Strömung



- Genauigkeit ist abhängig von der Schrittweite τ
- Warum „explizit“?
Der Wert x_{i+1} ist *explizit* gegeben, da alle Terme aus der rechten Seite bekannt sind.

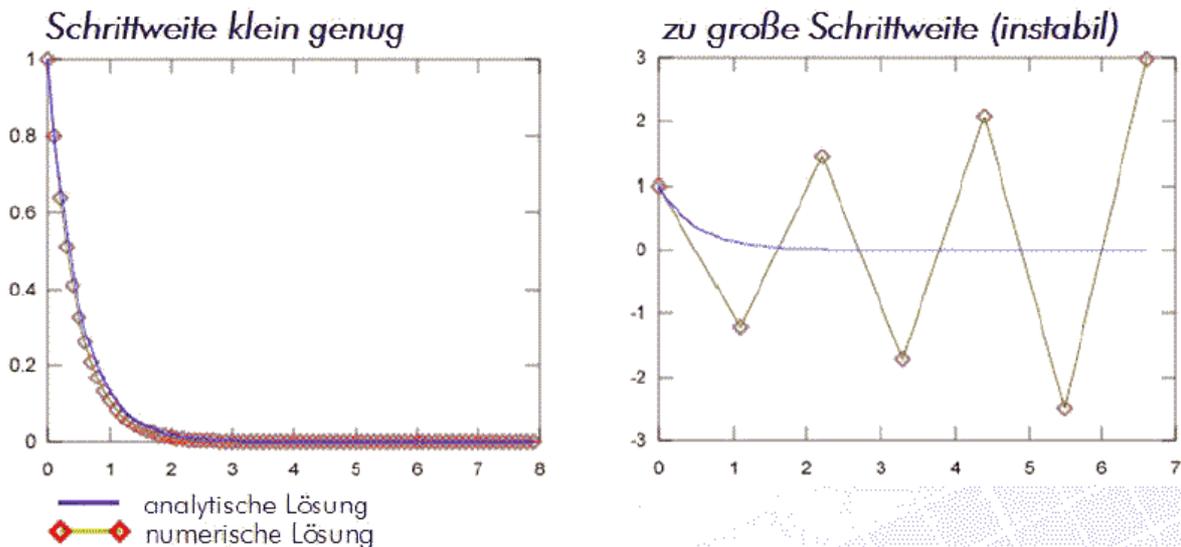
- Beispiel: Zirkulares Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



Das explizite Euler-Verfahren liefert hier eine Spirale!

- Das explizite Euler-Verfahren wird zudem bei zu großer Schrittweite numerisch instabil.

Beispiel: $\frac{\partial x}{\partial t} = -kx$ Lösung: $x(t) = e^{-kt}$ stabil für: $k\tau \leq 2$



Implizites Euler-Verfahren

● Taylorentwicklung im Punkt $\vec{x}(t_0 + \tau)$ rückwärts:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_0 + \tau) - \tau \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t_0 + \tau) + \dots$$

auflösen nach $\vec{x}(t_0 + \tau)$:

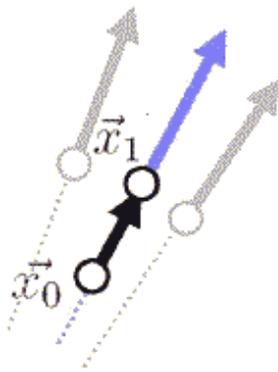
$$\vec{x}(t_0 + \tau) = \vec{x}(t_0) + \tau \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t_0 + \tau) + \dots$$

$$\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau \vec{v}(x_{i+1})$$

● implizit: $\vec{v}(x_{i+1})$ ist nicht von vorneherein bekannt.

$$\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau \vec{v}(\vec{x}_{i+1})$$

- Suche denjenigen Punkt \vec{x}_1 , dessen Geschwindigkeitsvektor mit dem Vektor von \vec{x}_0 nach \vec{x}_1 übereinstimmt.



- **Vorteil:** numerische Stabilität
- **Nachteil:** Lösung der impliziten Gleichung kann sehr aufwändig sein (z.B. iterativer Ansatz)

- Einfache Lösung im linearen Fall: $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbf{A} \vec{x}$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \tau \mathbf{A} \vec{x}_{i+1}$$

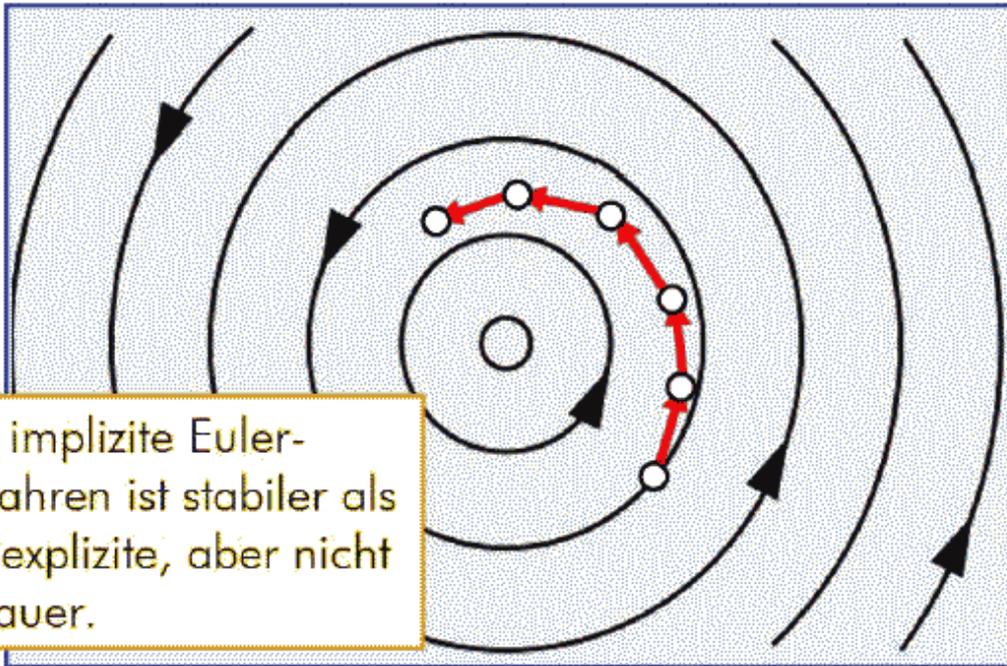
$$\mathbf{Id} \vec{x}_{i+1} - \tau \mathbf{A} \vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i$$

$$\vec{x}_{i+1} = (\mathbf{Id} - \tau \mathbf{A})^{-1} \vec{x}_i$$

Im linearen Fall ist also auch hier eine *explizite* Berechnung der Partikelbahn möglich.

- Im Allgemeinen ist die Lösung der impliziten Gleichung allerdings aufwändiger und erfordert iterative Verfahren.

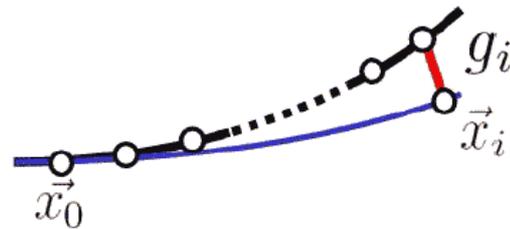
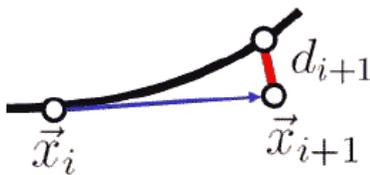
- **Beispiel:** Zirkulares Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



Das implizite Euler-Verfahren ist stabiler als das explizite, aber nicht genauer.

Fehlerbetrachtung

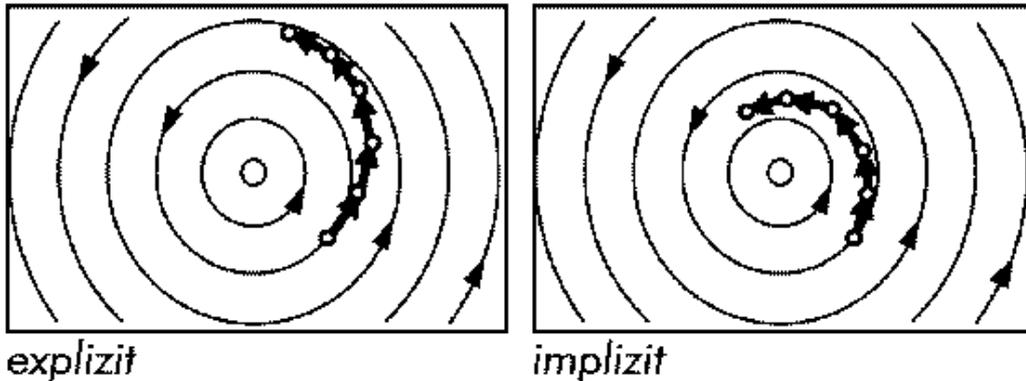
- Wie groß ist der Fehler?



- Der lokale Diskretisationsfehler (lok. Abbruchfehler) d_i ist der Fehler, der bei einem einzigen Schritt gemacht wird.
 - Er entsteht beim Abbrechen der Taylorreihe.
- Der globale Abbruchfehler g_i ist der Fehler, der durch Akkumulation der lokalen Fehler entsteht.
 - Er ist in der Regel eine Größenordnung höher als der lok. Fehler
- Jedes num. Integrationsverfahren hat eine **Fehlerordnung**:

Fehlerordnung p : $g_i = o(\tau^p)$, $d_i = o(\tau^{p+1})$

Das *Euler-Verfahren* (*explizit* oder *implizit*) hat die Fehlerordnung 1.



Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Idee: Kombiniere das explizite mit dem impliziten Euler-Verfahren:

- Versuche zunächst den nächsten Punkt „vorherzusagen“ (Prädiktor) mit explizitem Euler Verfahren:

$$\vec{x}_{i+1}^{(P)} = \vec{x}_i + \tau \vec{v}(\vec{x}_i)$$

- Korrigiere diesen Wert durch einen impliziten Schritt:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \frac{\tau}{2} \left(\vec{v}(\vec{x}_i) + \vec{v}(\vec{x}_{i+1}^{(P)}) \right)$$

Explizites Heun-Verfahren
2. Ordnung

Fixpunkt-Iteration

Idee: Führe mehrere Prädiktor-Korrektor-Schritte hintereinander aus bis das Ergebnis konvergiert.

- Bestimme zunächst den nächsten Punkt vorherzusehen (Prädiktor) mit expliziten Euler Verfahren

$$\vec{x}_{i+1}^{(0)} = \vec{x}_i + \tau \vec{v}(\vec{x}_i)$$

- Korrigiere diesen Wert so lange, bis sich der Wert nicht mehr signifikant ändert.

$$\vec{x}_{i+1}^{(k+1)} = \vec{x}_i + \frac{\tau}{2} \left(\vec{v}(\vec{x}_i) + \vec{v}(\vec{x}_{i+1}^{(k)}) \right)$$

Runge-Kutta-Verfahren

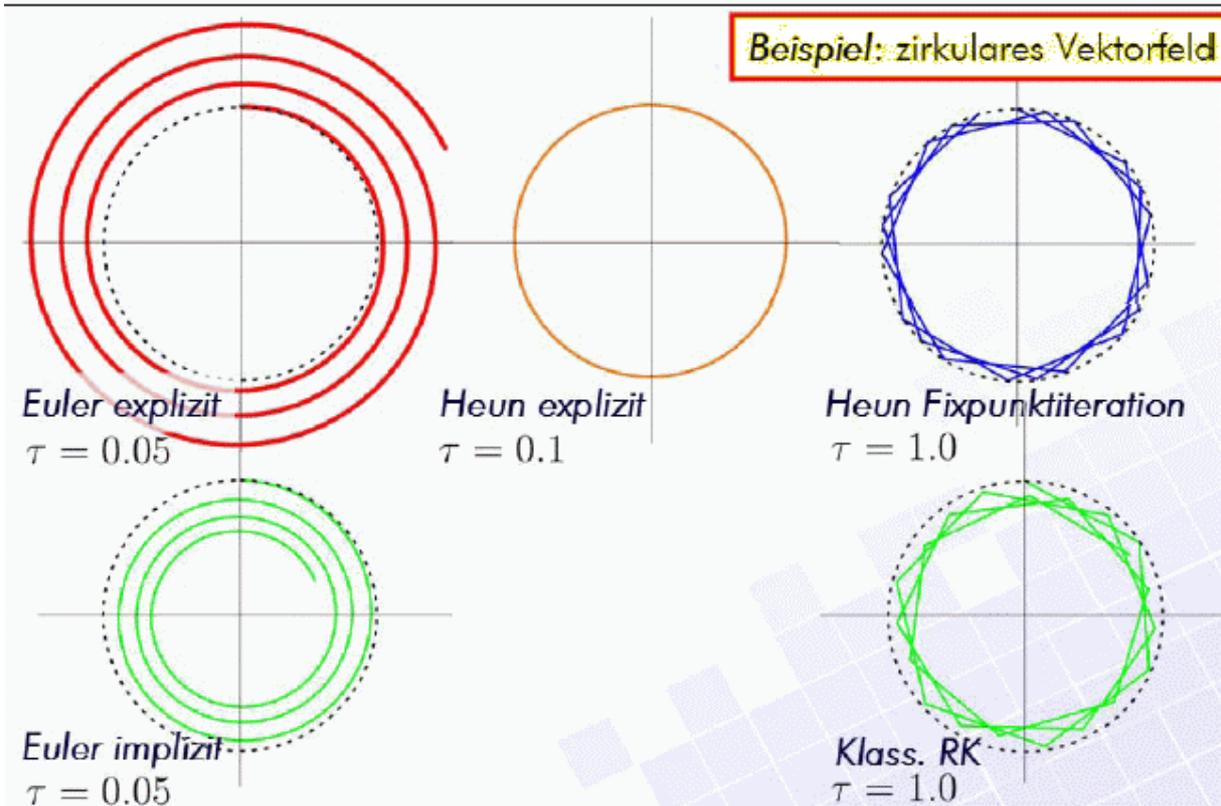
- Klassisches Runge-Kutta-Verfahren (4.Ordnung)

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{v}(\vec{x}_i) \\ \vec{k}_2 &= \vec{v}\left(\vec{x}_i + \frac{1}{2}\tau \vec{k}_1\right) \\ \vec{k}_3 &= \vec{v}\left(\vec{x}_i + \frac{1}{2}\tau \vec{k}_2\right) \\ \vec{k}_4 &= \vec{v}\left(\vec{x}_i + \tau \vec{k}_3\right) \\ \vec{x}_{i+1} &= \vec{x}_i + \frac{1}{6}\tau (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)\end{aligned}$$

- Fehlerordnung 4

Vergleich

3



allgemeine Interpretation der Vorgehensweise:

wir haben ein Vektorfeld $v(x)$ als Geschwindigkeitsfeld betrachtet, d.h. mit der Ableitung des Positionsvektors x nach t gleichgesetzt.

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{x}(t)}{\partial t} - \vec{v}(\vec{x}(t)) = 0$$

Gewöhnliche Differentialgleichung, 1. Ordnung

Mit einer Nebenbedingung $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ spricht man von einer **Anfangswertaufgabe** (bzw. Anfangswertproblem).

Die vorgestellten Verfahren funktionieren auch für allgemeinere Anfangswertprobleme.

Zusammenfassung dieses Kapitels:

Fazit

Integrationsverfahren für gewöhnliche DGL.

Explizite Verfahren

- ☾ einfach zu berechnen
- ☾ numerisch *instabil* bei großen Schrittweiten

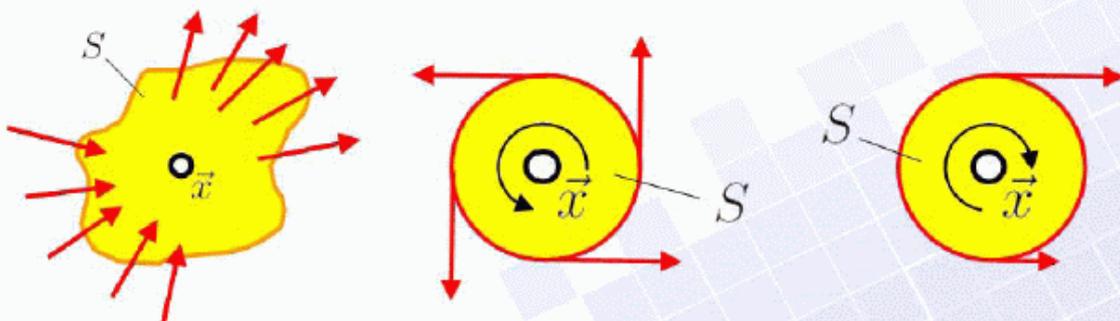
Implizite Verfahren

- ☾ i.A. aufwändig zu lösen
- ☾ numerisch *stabil*

Euler: <ul style="list-style-type: none">• sehr einfach,• ungenau	Heun: <ul style="list-style-type: none">• einfach,• gut für kleine Schrittweiten	Runge-Kutta: <ul style="list-style-type: none">• aufwändiger,• gut auch bei rel. großen Schritten
---	--	---

2D Vektorfelder

- Differenzieren vektorwertiger Funktionen
 - Totales Differenzial: *Jacobi-Matrix*
 - Richtungsableitung (über Jacobi-Matrix)
 - *Divergenz*: beschreibt die Intensität von Quellen und Senken
 - *Rotation*: beschreibt die „Wirbelhaftigkeit“



Eigenwerte und Eigenvektoren

- Eigenvektoren sind Vektoren, die durch die Matrix „auf sich selbst abgebildet“ und dabei mit dem Eigenwert skaliert werden.

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

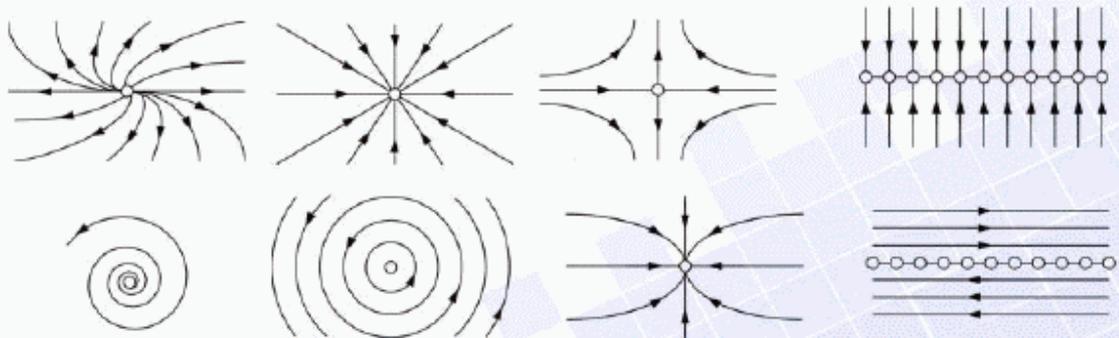
- Löse das charakteristische Polynom

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{Id}) = 0$$

- Bestimme die Eigenvektoren anschließend durch einsetzen

Kritische Punkte (Fixpunkte)

- charakterisiert durch $\vec{v}(\vec{x}_0) = \vec{0}$
- Eigenschaften der Strömung in Umgebung des Fixpunktes wird durch *Jacobi-Matrix* bestimmt.
- Die *Eigenwerte* der Jacobi-Matrix erlauben Klassifikation von kritischen Punkten (Topologie).



(Rezk-Salama, o.J.)