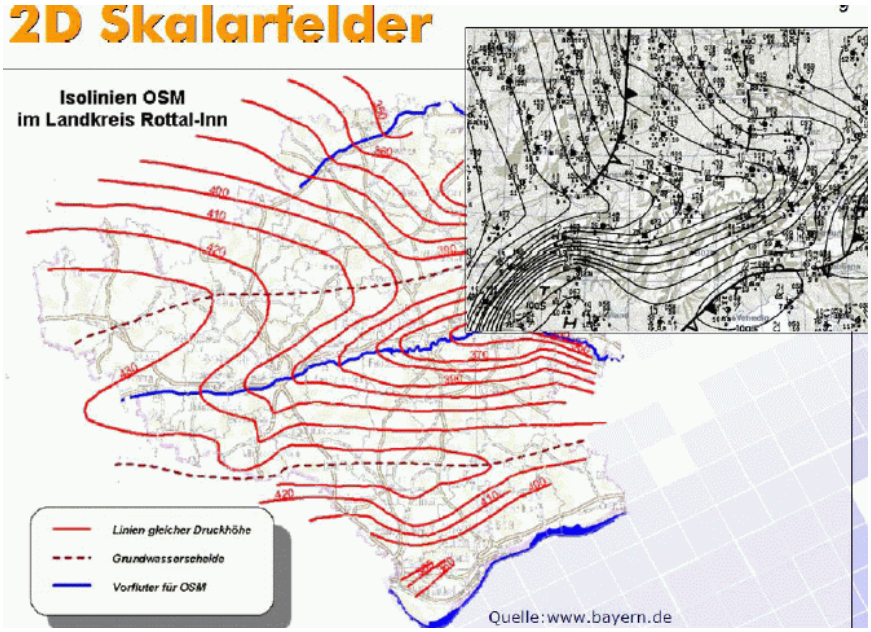
7. 2D-Skalarfelder

(nach Rezk-Salama, o.J.)

Definitionsbereich: 2-dimensional
(Beobachtungs-) Werte: skalar (1 reelle Zahl je Punkt)



2D Skalarfelder:

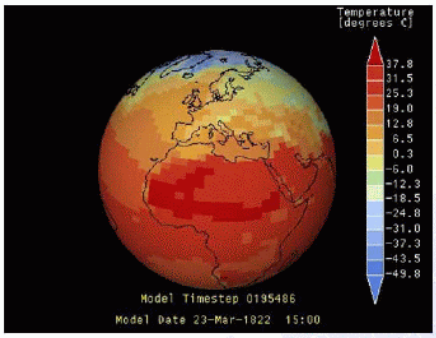
- selten analytisch gegeben: $s = f(x, y)$
- üblicherweise als diskrete Daten:
  $(x_i, y_i) \mapsto f_i \qquad i \in [0, \ldots N]$

Visualisierungmöglichkeiten:

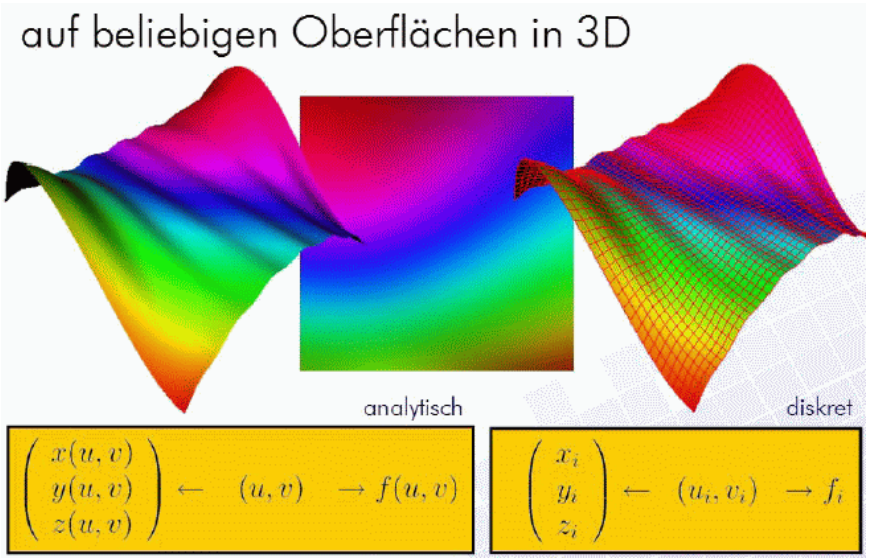
- *Color Plots (Farbcodierung)*
- *Surface Plots (Oberflächendarstellung)*
- *Isolinien*

beachte:

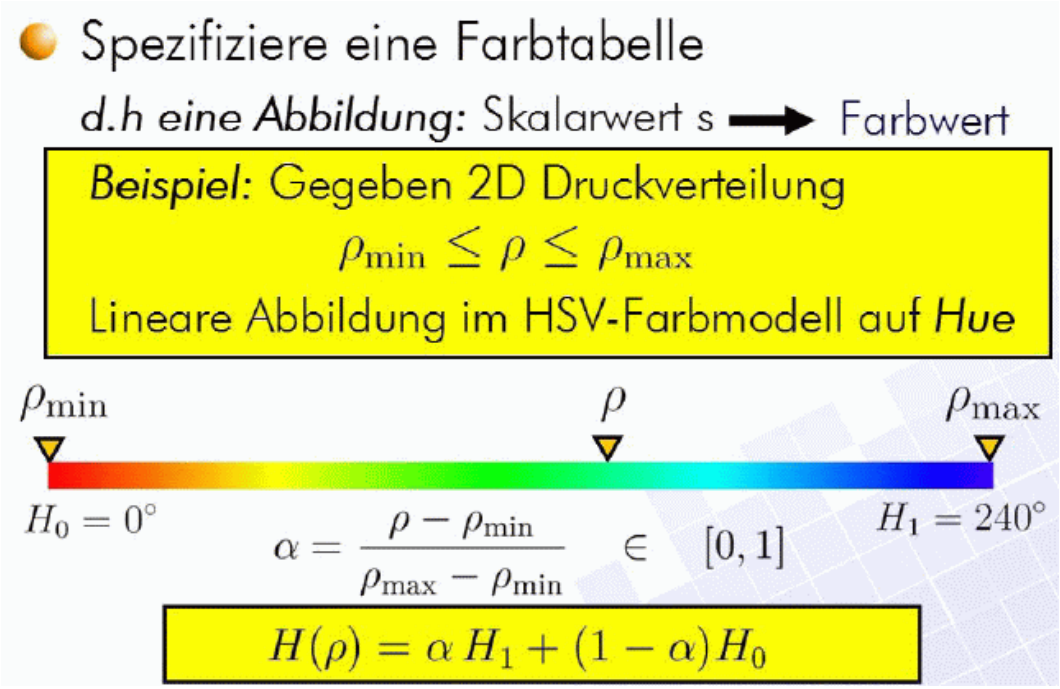
- *„2D"* heißt nicht zwangsläufig *„kartesische* Koordinaten"!
- 2D Skalarfelder müssen nicht ***eben*** sein!



Beispiel: Temperaturverteilung über dem Globus



Farbcodierung (*Colorplots*)

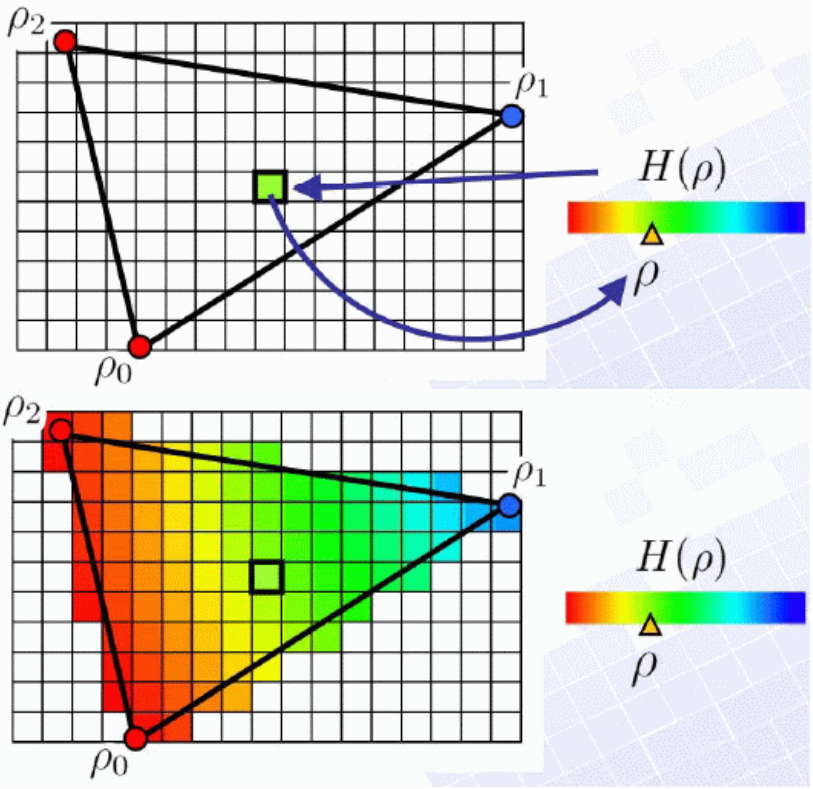


bei uniformen, rektilinearen 2D-Gittern:
- trivial bei feinen Gittern:
  interpretiere jeden Abtastpunkt als 1 Pixel
  Skalarwert dort bestimmt Farbe des Pixels
  per Farbtabelle
- im allgemeinen Fall: Rasterisierung erforderlich

bei curvilinearen und unstrukturierten 2D-Gittern:
- Rasterisierung erforderlich

Rasterisierung – Grundidee:

- Zerlege das Dreieck in einzelne Pixel
- Interpoliere für jeden Pixel den Skalarwert
- Bestimme die Farbe des Pixels anhand des Skalarwerts



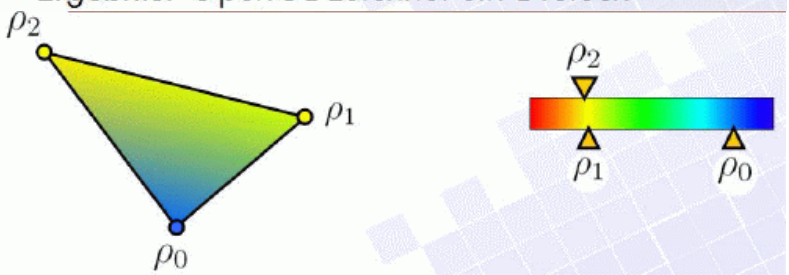
Umsetzung: einfache Implementierung

- *Nutzung von Graphik-Hardware:*
  Hardware übernimmt die Rasterisierung der Dreiecke

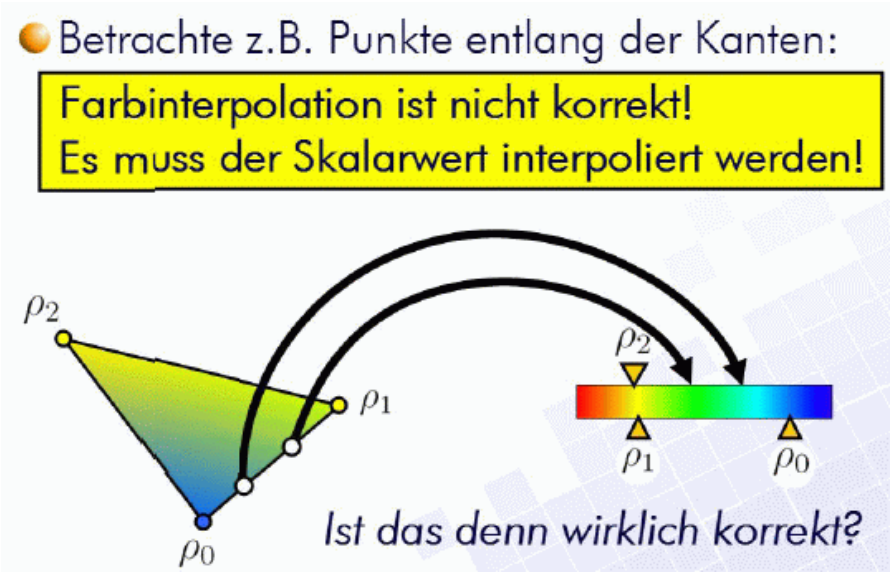
Beispiel OpenGL:

```
00    glBegin(GL_TRIANGLES);
01       glColor3d(R[i], G[i], B[i]);
02       glVertex2d(x[i], y[i]);
03       glColor3d(R[j], G[j], B[j]);
04       glVertex2d(x[j], y[j]);
05       glColor3d(R[k], G[k], B[k]);
06       glVertex2d(x[k], y[k]);
07    glEnd();
```

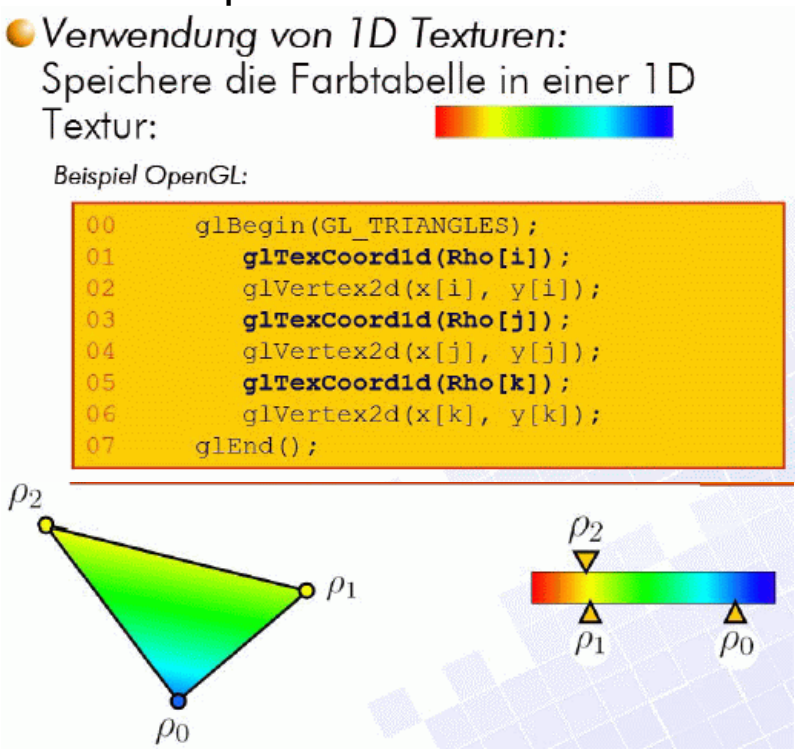
Ergebnis: OpenGL zeichnet ein Dreieck



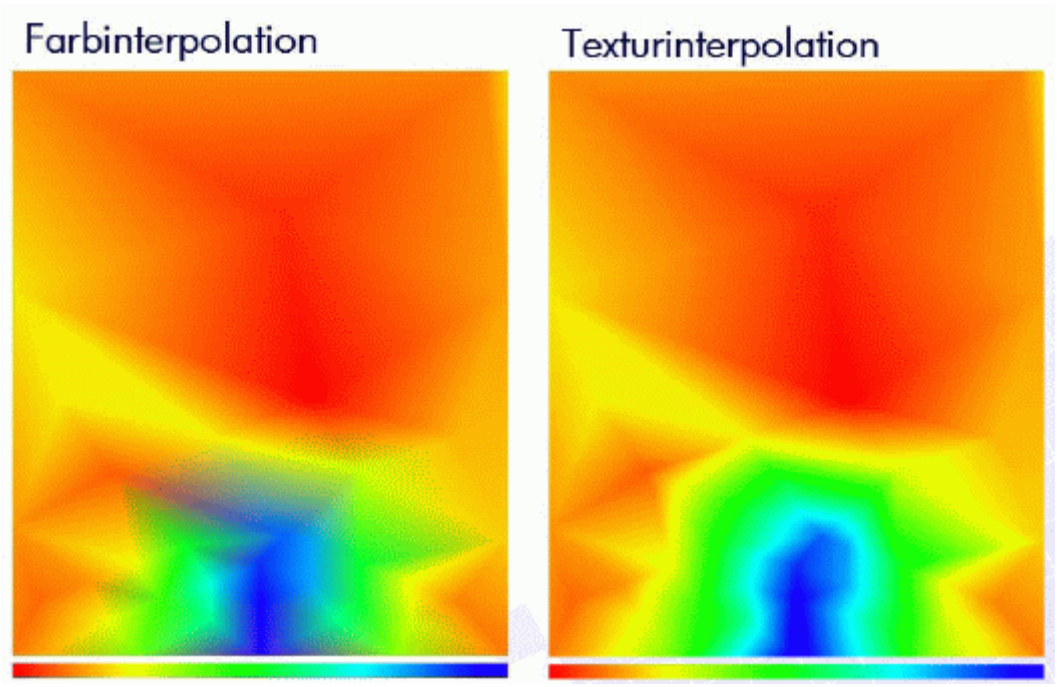
Problem: OpenGL bzw. die Grafikkarte interpoliert hier automatisch einfach die Farbwerte zwischen den Ecken.

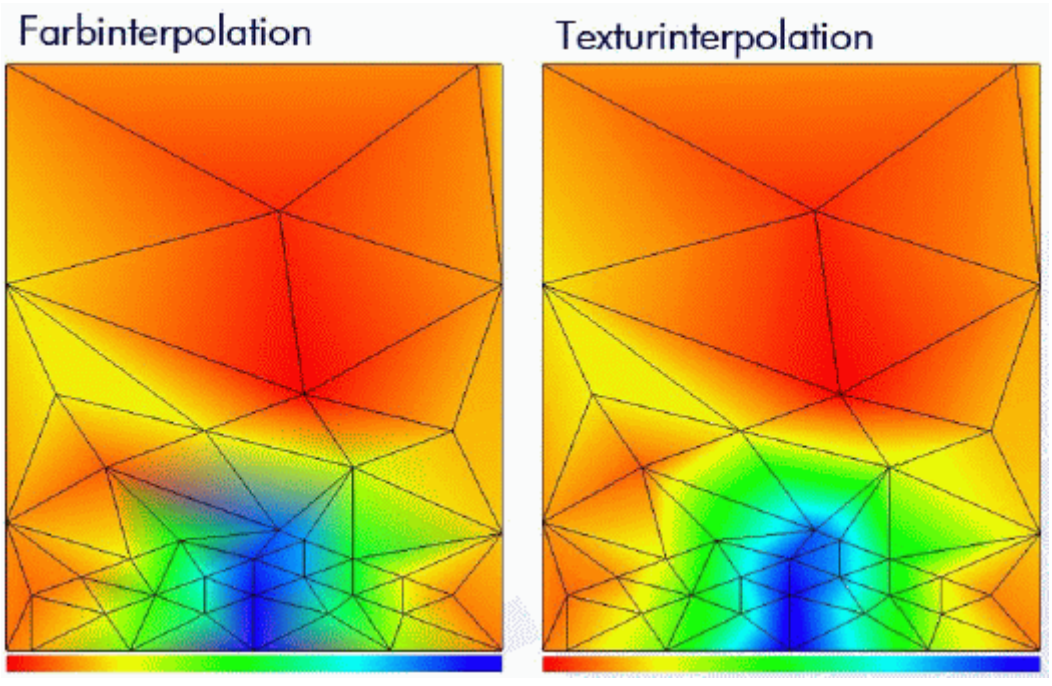


Verbesserte Implementierung:
Skalarwerte interpolieren, zugehörige Farben pixelweise aus Lookup-Table entnehmen.



Vergleich:


Farbinterpolation
Texturinterpolation


Farbinterpolation
Texturinterpolation

Fazit:

Farbkodierung von Skalarfeldern:

- Einfache Implementierung:
  - Bestimme Farbwerte für die Eckpunkte der Zellen (mittels Farbtabelle)
  - Interpoliere die Farbwerte für jeden Pixel im Inneren der Zelle

Per-Vertex Operations

„Gouraud-Shading"

- Aufwändigere Implementierung:
  - Interpoliere den Skalarwert für jeden Pixel im Inneren einer Zelle
  - Bestimme Farbwerte für jeden interpolierten Skalarwert (Farbtabelle)

Per-Pixel Operations

„Phong-Shading"

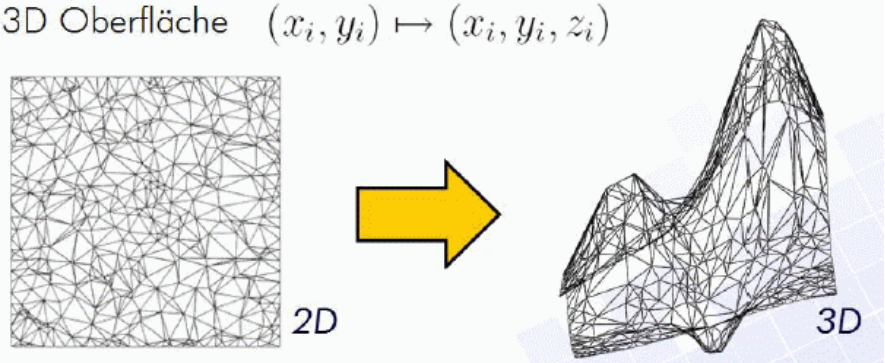
Zusammenfassung

Color Plots / Farbcodierung

- Spezifiziere eine Farbtabelle, die den Skalarwert auf einen Farbwert abbildet *(= Transferfunktion)*
- Unstrukturierte und Curvilineare Gitter müssen rasterisiert werden
- *Rasterisierung* mit Grafik-Hardware
  - Einfach aber inkorrekt: Farbinterpolation *(Gouraud)*
  - Korrekte Interpolation des Skalarwerts mit 1D Texturen

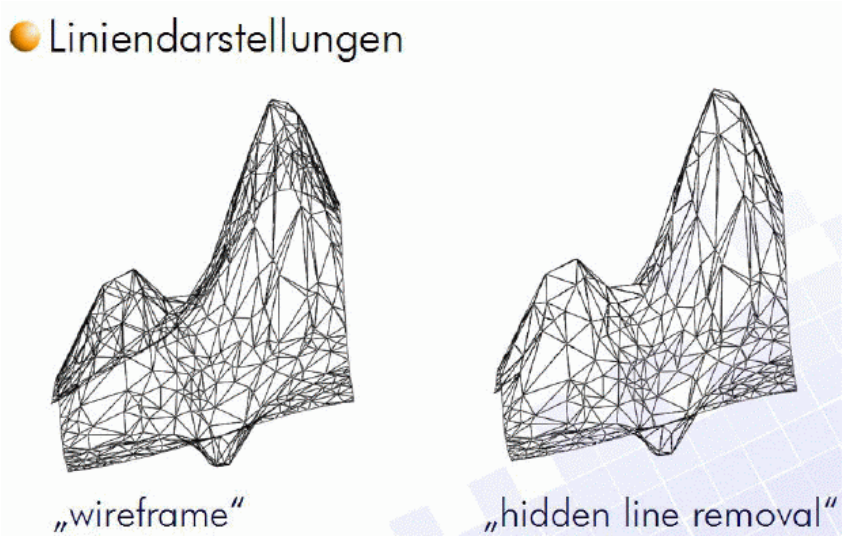
Surface Plots

- *Oberflächendarstellung:*
  Interpretiere das Skalarfeld als Höhenfeld und zeichne eine 3D Oberfläche $(x_i, y_i) \mapsto (x_i, y_i, z_i)$

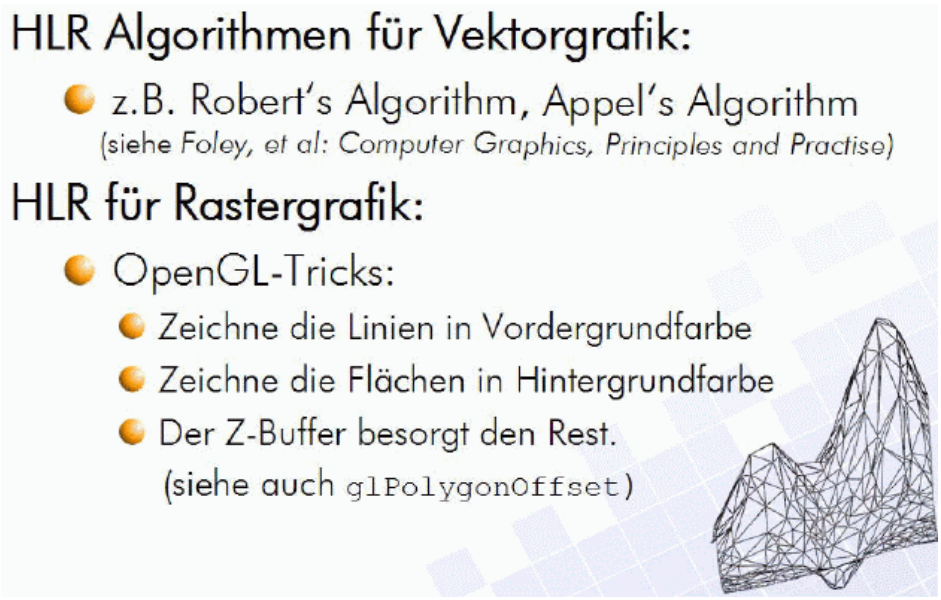


$$\alpha = \frac{\rho - \rho_{\min}}{\rho_{\max} - \rho_{\min}}$$

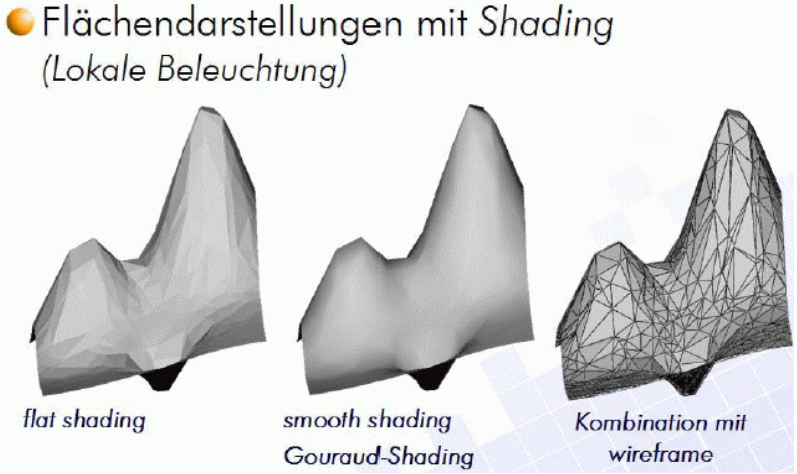
$$z_i = \alpha\, z_{\max} + (1 - \alpha) z_{\min}$$



Hidden Line Removal (vgl. Skript zum Projektstudium Computergrafik und Softwaretechnik, Wintersem.):



Intuitiverer Tiefeneindruck durch Rendering der Fläche:

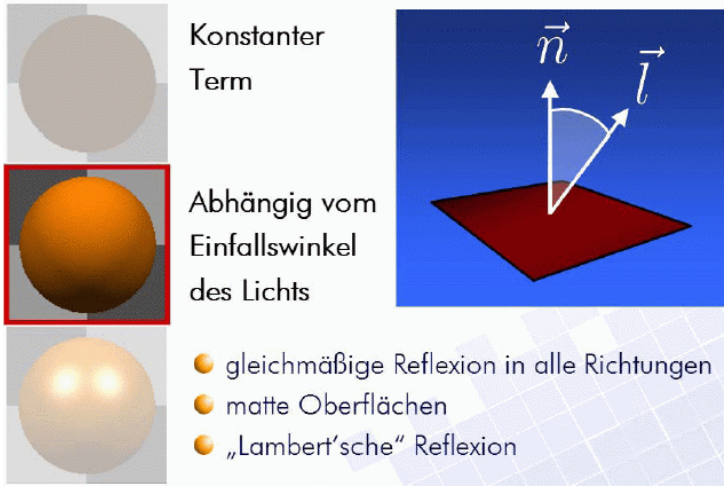


Lokale Beleuchtungsrechnung

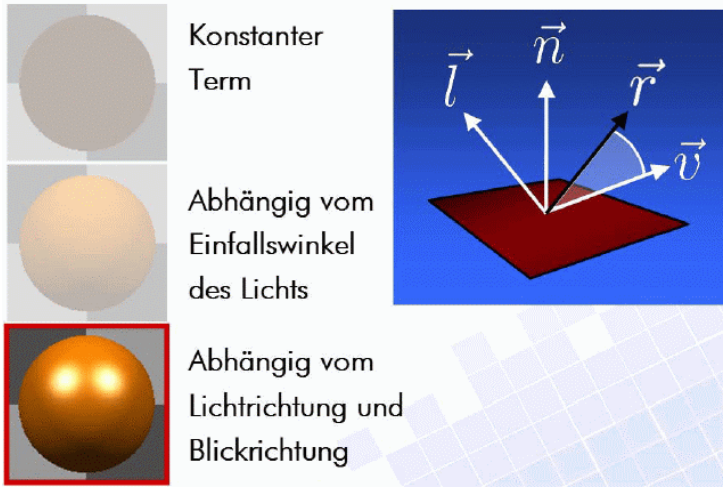
Phong-Beleuchtungsmodell: 3 Summanden

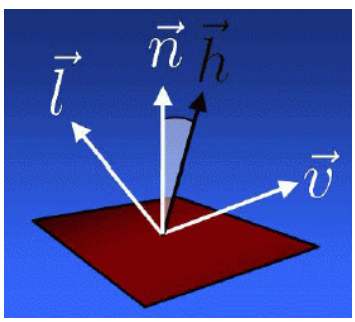
1. *Ambiente* Beleuchtung

2. *Diffuse* Reflexion

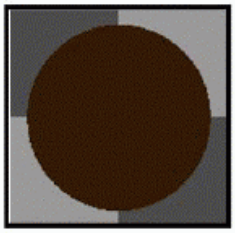


3. Spekulare (spiegelnde) Reflexion

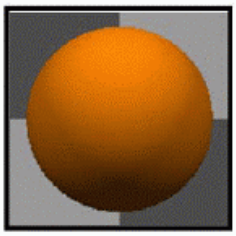




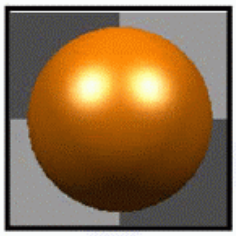
Blinn-Phong Beleuchtungsmodell:



ambient



diffuse
(Lambert)



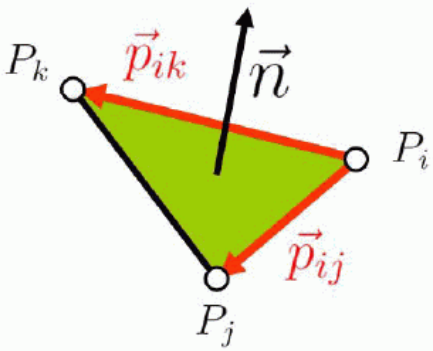
spekular
(spiegelnd)

$$I = I_a + I_d\,(\vec{n} \circ \vec{l}) + I_s\,(\vec{n} \circ \vec{h})^r$$

(hier ∘ = Skalarprodukt)

Wie bestimmt man den Oberflächen-Normalenvektor?

Die Normale für ein einzelnes Dreieck:



$$\vec{p}_{ij} = P_j - P_i$$
$$\vec{p}_{ik} = P_k - P_i$$

Das normalisierte Kreuzprodukt ergibt den Normalenvektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}_{ij} \times \vec{p}_{ik}}{\|\vec{p}_{ij} \times \vec{p}_{ik}\|}$$

einfachste Art des Shading: jedes Polygon einheitlich färben, entsprechend den Beleuchtungsverhältnissen an einem repräsentativen Punkt dieses Polygons. D.h.:

flat shading:

Bestimme einen Normalenvektor für jedes Dreieck

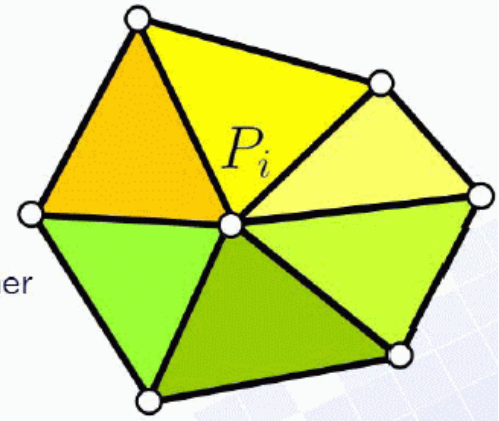
OpenGL Beispiel:

```
00      glBegin(GL_TRIANGLES);
01         glNormal3d(nx, ny, nz);
02         glVertex3d(x[i], y[i], z[i]);
03         glVertex3d(x[j], y[j], z[j]);
04         glVertex3d(x[k], y[k], z[k]);
05      glEnd();
```

Nachteil: Kanten deutlich sichtbar.
Interpolierende Shading-Verfahren (Gouraud, Phong) glätten die Kanten zwischen den Polygonen (smoothing).

smooth shading:

Bestimme einen Normalenvektor für jeden Vertex



- Betrachte den Dreiecksfächer um den Punkt P_i
- Bestimme die Normalen-vektoren für alle Dreiecke
- Der Normalenvektor der Punktes P_i ergibt sich als Mittelwert der Normalen der angrenzenden Dreiecke

- Gouraud-Shading: wie beschrieben
- Phong-Shading: die Normalenvektoren werden interpoliert, für jedes Pixel wird die lokale Beleuchtungsrechnung durchgeführt (s. VL Grundzüge der Computergrafik).

Zusammenfassung:

Surface Plots / Oberflächendarstellung

- Interpretiere den Skalarwert als Höhenwert und zeichne eine 3D Fläche
- Liniendarstellung:
  wireframe und hidden lines
- Flächendarstellung mit Beleuchtung:
  - benötigt Normalenvektoren
  - Normalenvektor pro Dreieck *(flat shading)*
  - Normalenvektor pro Vertex *(smooth, Gouraud shading)*

Isolinien (vgl. Kapitel 4.2)

Definition:

- Für ein gegebenes Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ und einen Skalarwert $c \in \mathbb{R}$ entspricht die Menge
  $$\{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$$
  einer Isolinie.
- Falls f differenzierbar ist und $\mathrm{grad}(f) \neq 0$, dann sind die Isolinien *Kurven*.
- Falls $\mathrm{grad}(f) = 0$, können die Isolinien auch *Flächen* und *Punkte* sein.

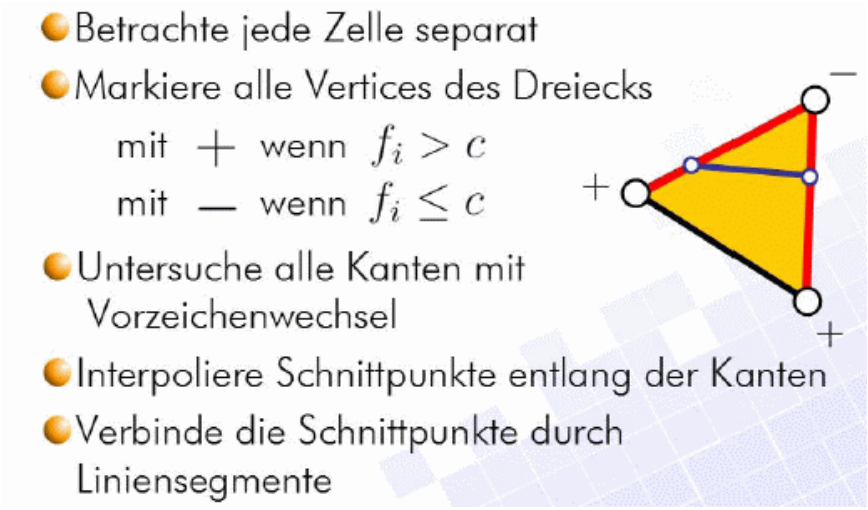
Konstruktion von Isolinien:
bereits kennengelernt:

1. Pixel by pixel contouring (für alle Pixel überprüfen, ob Isolinie hindurchgeht)
2. *Marching squares* (Werte nur in Knoten eines Reckteckgitters verwenden, Nullstellen auf den Kanten approximieren, diese verbinden).

hier Verallgemeinerung und Vertiefung des 2. Ansatzes.

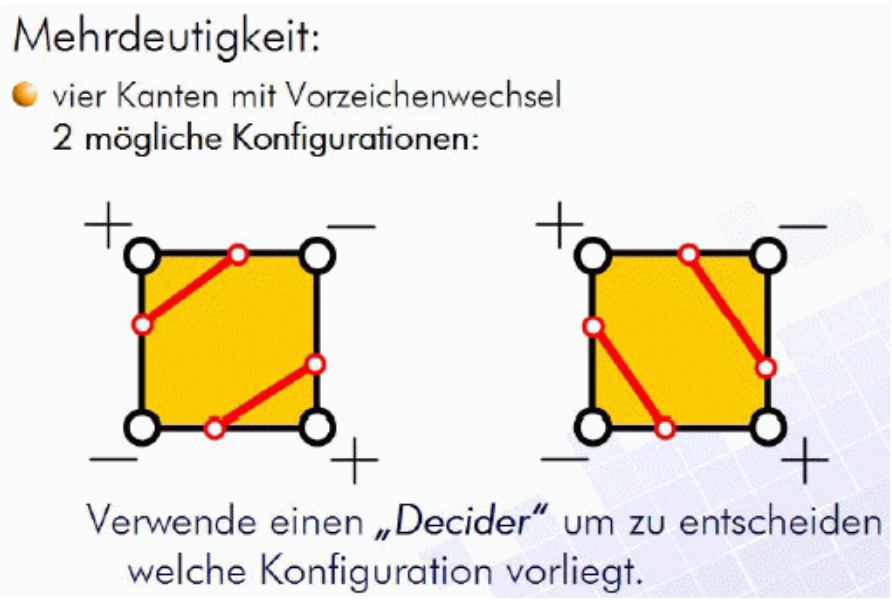
4 Ergänzungen:
- Verallgemeinerung auf Dreieckszellen
- Strategien der Auflösung der Mehrdeutigkeit bei Viereckszellen
- Reihenfolge der Abarbeitung der Zellen
- Glättung der Isolinien

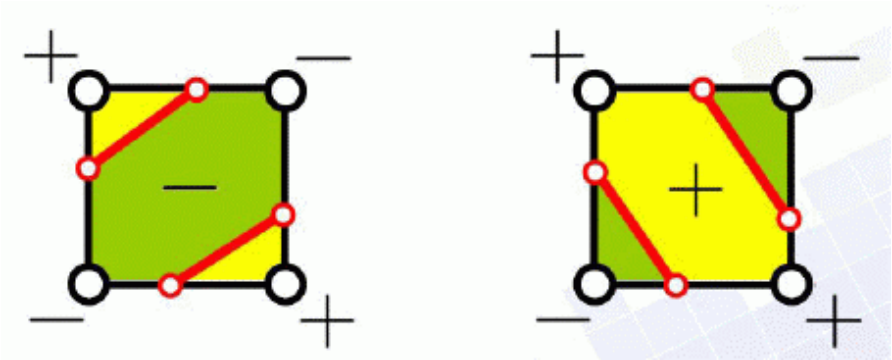
Bei dreieckigen Zellen:



- keine Mehrdeutigkeiten

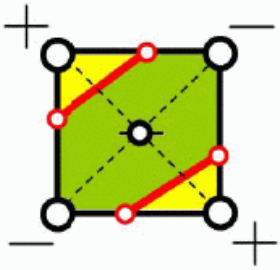
Isolinien für Rechteckgitter (Marching squares):



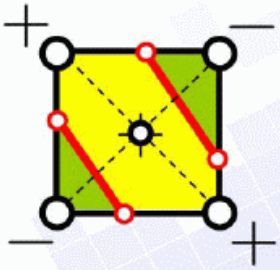


Midpoint Decider

Interpoliere den Skalarwert im Mittelpunkt des Rechtecks:

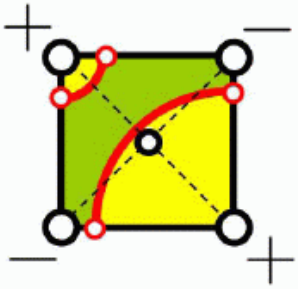


$f_M \leq c$



$f_M > c$

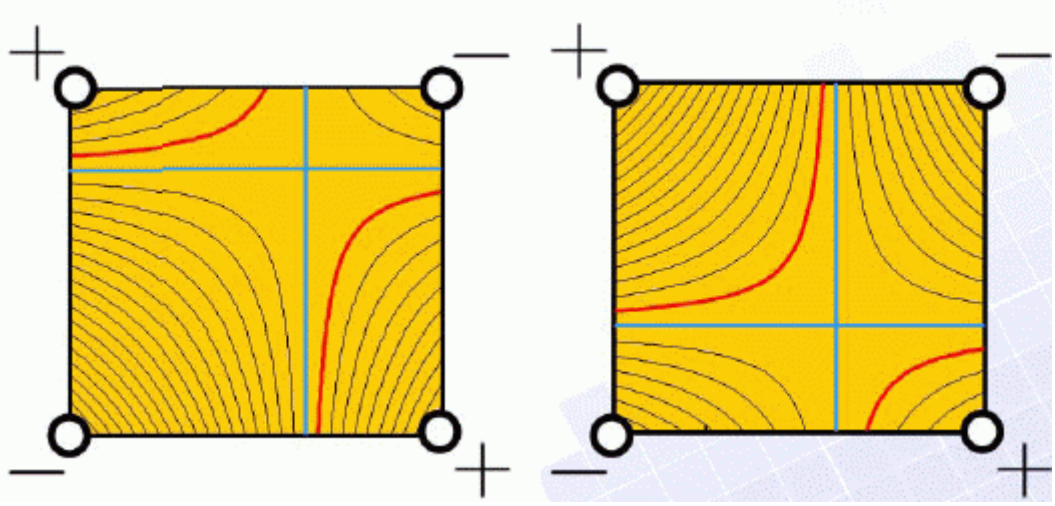
Schwachpunkt des Midpoint Deciders:
Isolinien sind keine Geraden, sondern Kurven



Hier ist $f_M > c$, obwohl der Mittelbereich negativ ist

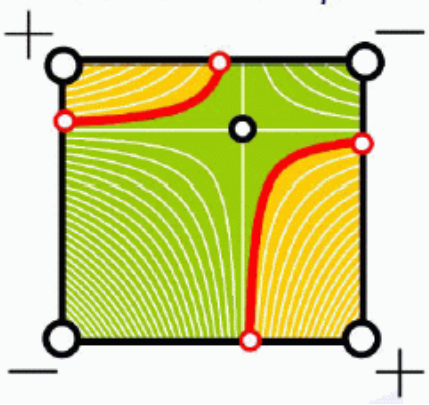
daher genauere Betrachtung des Verlaufes von typischen Isolinien in dieser Situation:

bei bilinearer Interpolation innerhalb der Zelle sind die echten Isolinien Hyperbelbögen.



Asymptotic Decider

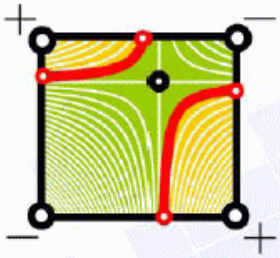
Bestimme den Skalarwert nicht am Mittelpunkt, sondern am *Schnittpunkt der Asymptoten*



- Der Schnittpunkt der Asymptoten liegt immer innerhalb des Mittelbereichs

Stelle die Interpolationsfunktion auf:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_{00}(1-x)(1-y) + \\ &+ f_{10}\,x(1-y) + \\ &+ f_{01}(1-x)y + \\ &+ f_{11}\,xy \end{aligned}$$



Bringe diese Gleichung in die Form

$$f(x,y) = \alpha(x-x_0)(y-y_0)+\gamma.$$

Dann ist γ der Skalarwert am Schnittpunkt der Asymptoten

zur Reihenfolge der Zellen-Abarbeitung:

sequenzieller Ansatz: alle Zellen in fester Folge abfahren

Nachteile des *sequentiellen Ansatzes:*

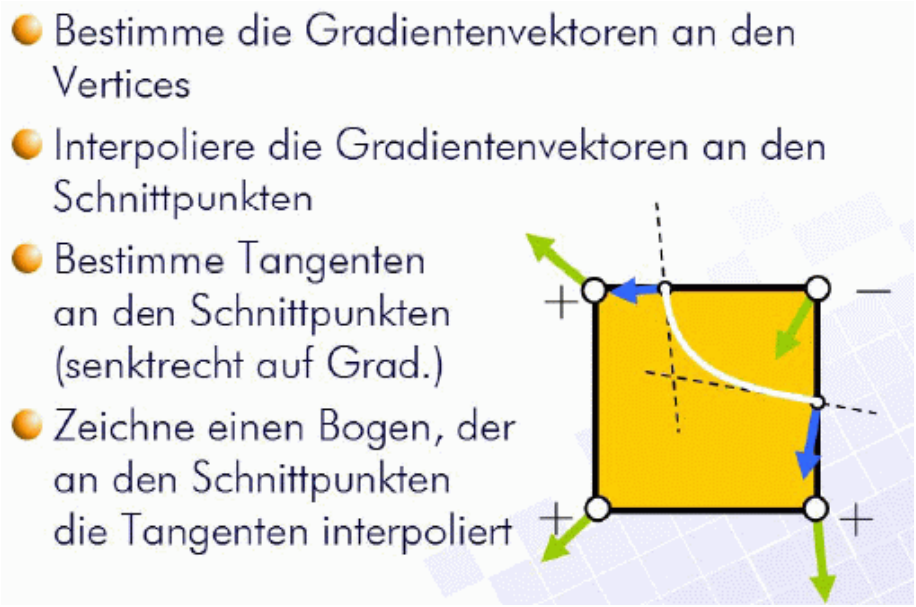
- Jeder Vertex der Isolinie und jede Kante des Gitters wird zweimal bearbeitet
- Das Ergebnis ist eine ungeordnete Folge von Liniensegmenten. Diese müssen erst sortiert werden um Polygonzüge zu erhalten.

→ **Contour Tracing**

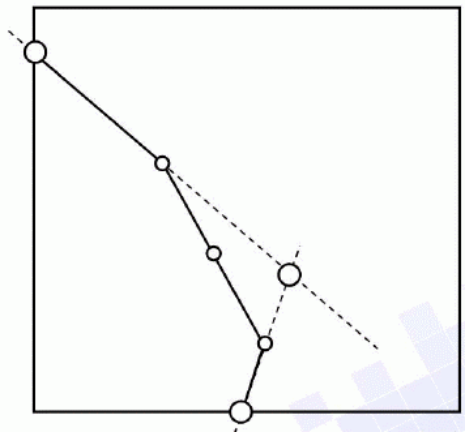
Contour tracing, Algorithmus:

- Markiere alle Zellen mit Vorzeichenwechsel
- Solange es noch markierte Zellen gibt:
    - finde die Isolinie(n) innerhalb dieser Zelle
    - für alle (1 oder 2) Isolinien in dieser Zelle:
        - solange die Isolinie nicht geschlossen ist und der Rand nicht erreicht ist:
            - folge der Isolinie in die Nachbarzelle
            - entferne die Markierung (außer wenn die 2. Isolinie noch nicht abgearbeitet ist)

Glättung der Isolinien:

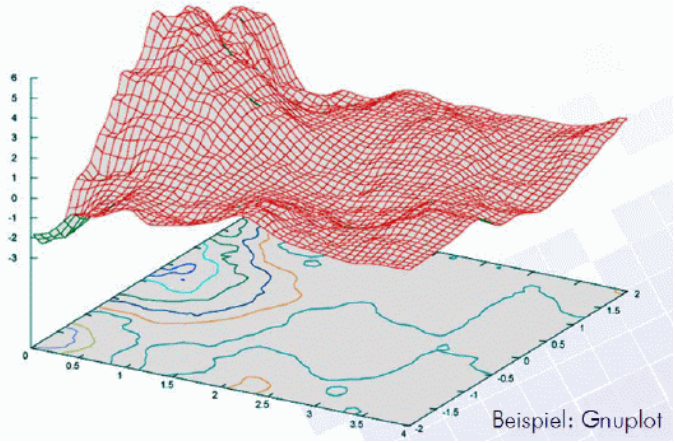


für den Bogen:
verwende z.B. Bézierkurven
(siehe VL "Grundzüge der Computergrafik")

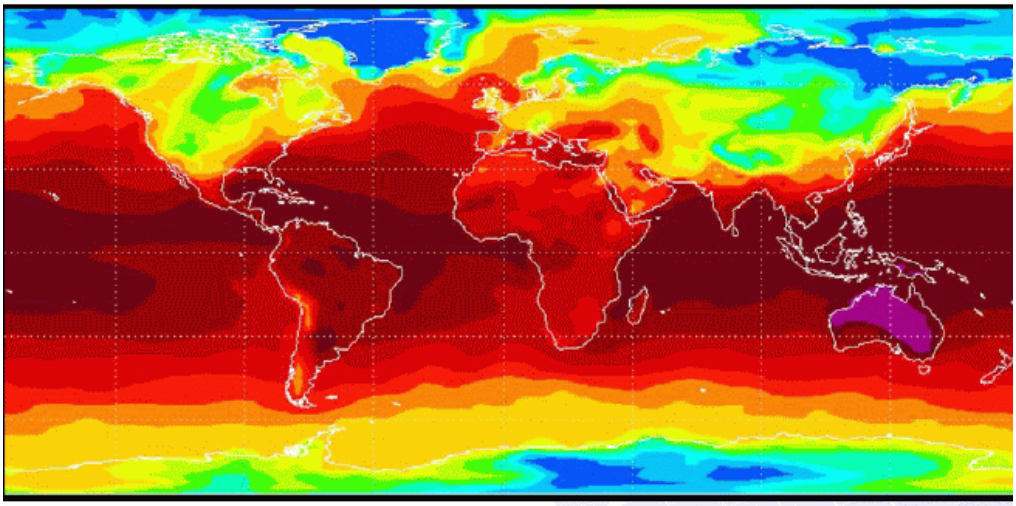


Kombination

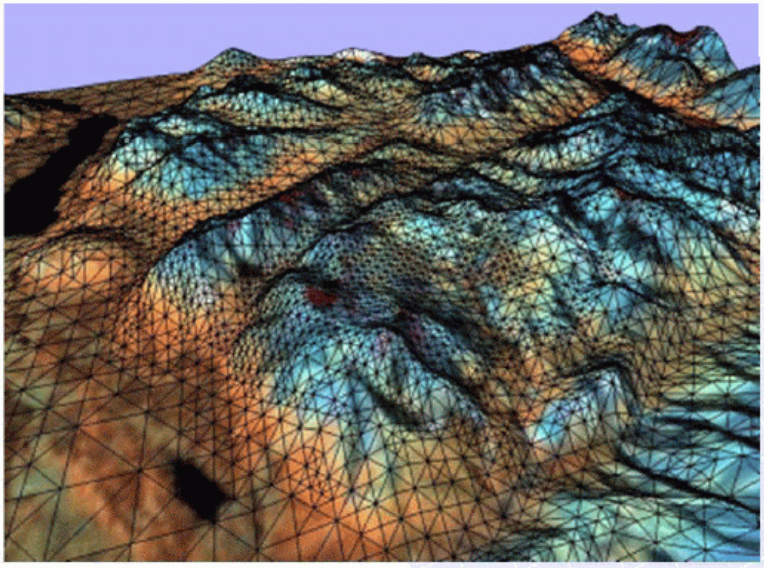
Isolinen + Surface Plot



Farbkodierung + Isolinien



Farbkodierung + Surface Plot



(Rezk-Salama, o.J.)