5. Kurven- und Flächendarstellung

Polygone sind stückweise *lineare* Approximationen für Kurven bzw. Flächen

Nachteile:
- hohe Zahl von Eckpunkten für genaue Repräsentation erforderlich
- interaktive Manipulation schwierig

Suche nach kompakteren und einfacher manipulierbaren Repräsentationen

$\Rightarrow$ "Freiformflächen", -kurven
insbesondere:
stückweise *polynomiale* Kurven bzw. Flächen

Geschichtlicher Hintergrund:
- ab ca. 1958 Anwendungen von Freiformflächen im CAD-Bereich, insbes. im Automobil-Karosseriebau
- **Pierre Bézier** (Renault): parametrische Repräsentation auf der Basis von Bernstein-Polynomen: System UNISURF
- **P. de Casteljau** (Citroen)

Welche Repräsentationen von Kurven und Flächen gibt es?

Formen der Darstellung von Kurven oder Flächen:

- **explizit**
- **implizit**
- **Parametrisch**

Kurze Diskussion am Beispiel der Kurven:

Explizite Darstellung

- y = f(x)
- Bsp.: $y = \sqrt{x^3} - \sqrt{x}$
- Probleme:
  - Für ein x darf es nur einen y Wert geben (Probleme z.B. ist ein Kreis nicht geschlossen darstellbar)
  - Beschreibung nicht invariant gegenüber Rotationen
  - Keine Kurven mit (echt) vertikalen Tangenten möglich (impliziert unendliche Steigung)

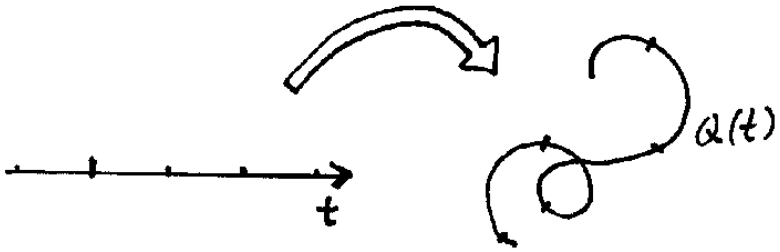
Implizite Darstellung

- f(x,y) = 0
- Bsp.: $x^3 - 2x^2 + x - y^2 = 0$
- Probleme:
  - Gleichung kann mehr Lösungen als gewollt haben, was zur Notwendigkeit von Randbedingungen führt
  - Richtung der Tangente ist schwer zu ermitteln

Parametrische Darstellung

- Q(t) = (x(t), y(t))
- Bsp.: $Q(t) = (t^2, t^3 - t)$

- Vorteile:
  - Keine Mehrdeutigkeiten
  - Geometrische Steigungen (potentiell unendlich) werden durch Tangentenvektoren (niemals unendlich) ersetzt
  - Invarianz gegenüber Rotationen
- Wir verwenden daher im folgenden nur die **parametrische Darstellung**



Parametrische Kurven sind i.d.R.

- (ganz rationale) Polynome
- gebrochen rationale Polynome

n-ten Grades (n: höchster auftretender Exponent), z.B.

$$\mathbf{Q}(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + \ldots + p_k u^k$$

In der CG werden ganz überwiegend kubische (also k=3) Repräsentationen genutzt:

Definition einer 3D-Kurve durch stückweise Spezifikation dreier kubischer Polynome *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*) mit dem Parameter *t*.

- Definition eines Kurvensegmentes $Q(t) = [x(t)\ y(t)\ z(t)]$ durch ($t \in [0,1]$):

$$\begin{aligned} x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) &= a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{aligned}$$

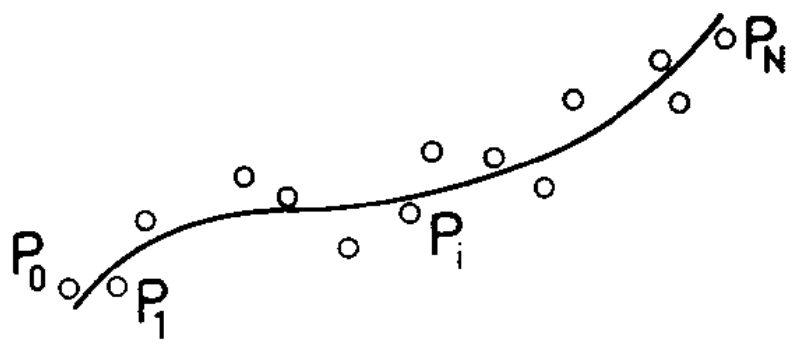
- andere Repräsentation: $Q(t) = [x(t)\ y(t)\ z(t)] = T \cdot C$ mit:

$$C = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = [t^3\ t^2\ t\ 1]$$

Typen der Darstellung von Kurven (und Flächen)

- Exakte Darstellung
  - Jeder Punkt ist durch eine Formel definiert
  - Problem: Formel ist meist nicht bekannt oder zu komplex
- Interpolatorische Darstellung
  - Kurve ist durch Stützstellenbedingungen beschrieben
  - Kurve ist an den Stützstellen determiniert
- Approximative Darstellung
  - Kurve ist durch Stützstellenbedingungen beschrieben
  - Kurve ist an den Stützstellen nicht determiniert

Prinzip der Approximation:



- Gesucht sind die Koeffizienten eines Polynoms P(t) derart, daß $P(t_i) = P_i$ für alle Stützpunkte P_i gilt
- Für n+1 paarweise verschiedene Stützpunkte gibt es genau ein Polynom vom Grad n, das die obige Bedingung erfüllt
- Nachteil: Berechnung der Koeffizienten ist aufwendig
- Nachteil: Änderung eines Stützpunktes bedingt Neuberechnung aller Koeffizienten

Interpolation mit Polynomen:

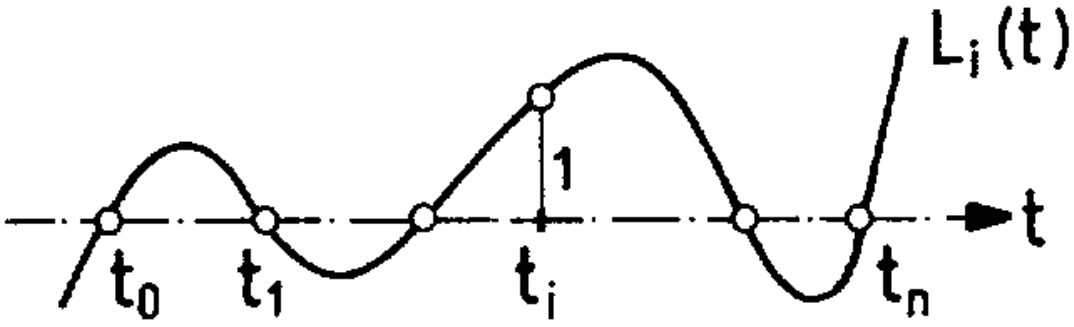
Eine mittels der Stützpunkte gewichtete Summe von sog. *Lagrange-Polynomen* liefert genau das Polynom, das durch alle P_i verläuft (**Lagrange-Interpolation**):

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot L_{n,i}(t)$$

(P_i : gegebene Punkte, t_i : entspr. Stützstellen, $i = 0,1,...,n$)

mit $L_{n,i}(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$.

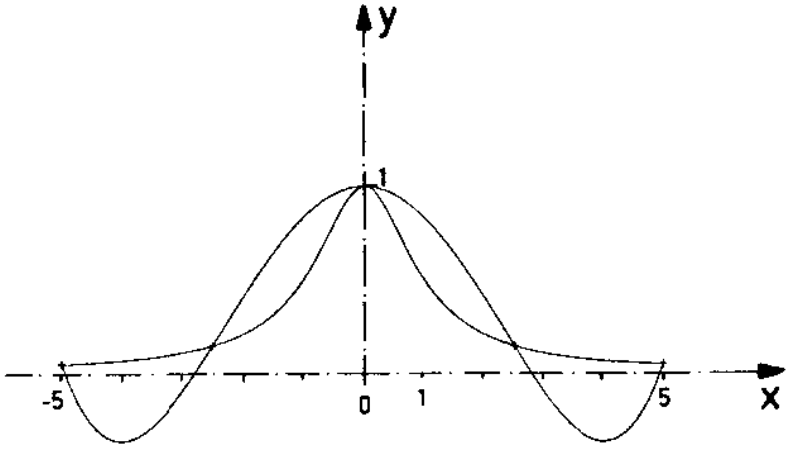
Die Lagrange-Polynome $L_{n,i}(t)$ haben die Eigenschaft, an der Stützstelle t_i den Wert 1 zu liefern und an allen anderen Stützstellen 0:



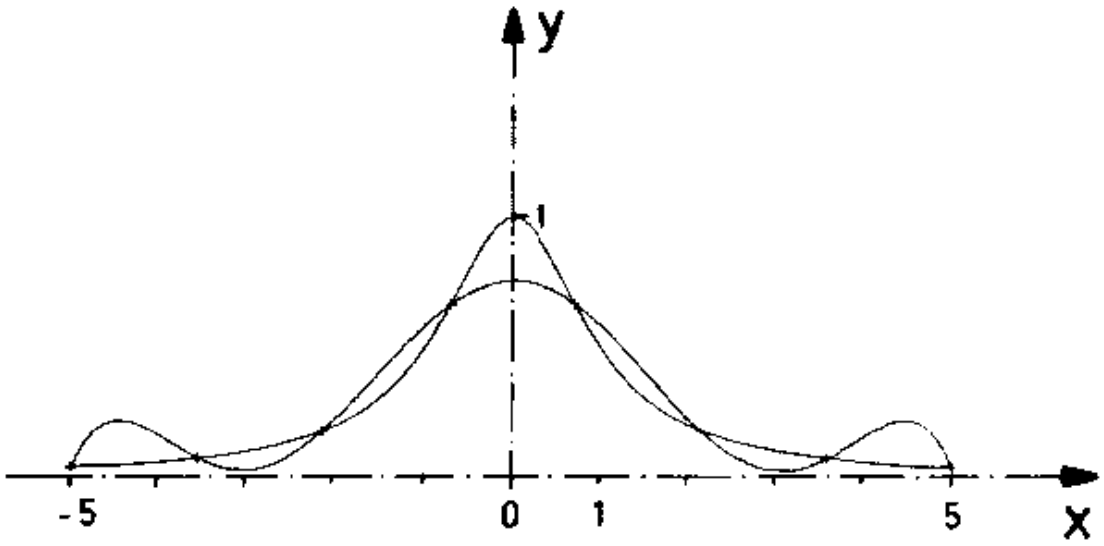
- bei Hinzufügen eines weiteren Stützpunktes müssen alle Koeffizienten neu berechnet werden
- "globales Verfahren": bei einer lokalen Änderung, z.B. eines einzelnen Stützpunktes, kann sich die Gestalt der ganzen Kurve ändern

- genereller Nachteil der Interpolation mit Polynomen höheren Grades: **Oszillationen**

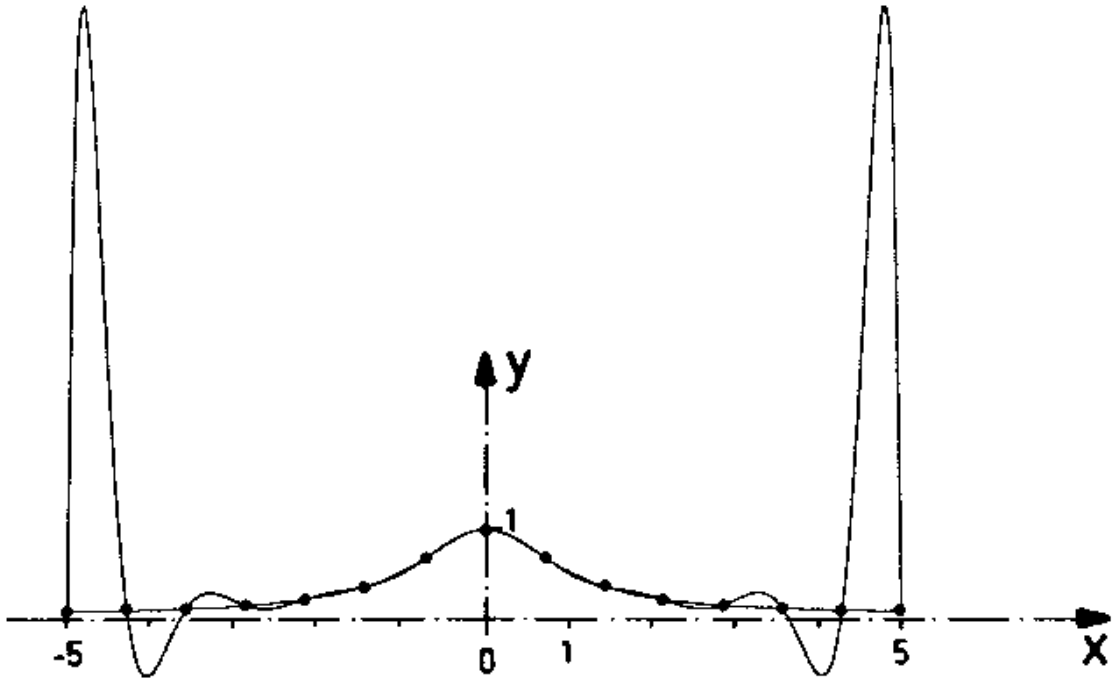
Beispiel: Interpolation des Funktionsgraphen von $y = 1/(1+x^2)$ zwischen –5 und 5



Polynom 4. Grades



Polynom 7. Grades



Polynom 14. Grades

- weiterer Nachteil: bei der Interpolation durch ein Polynom *n*-ten Grades weicht die Tangente stellenweise stark von der Tangente der darzustellenden Kurve ab

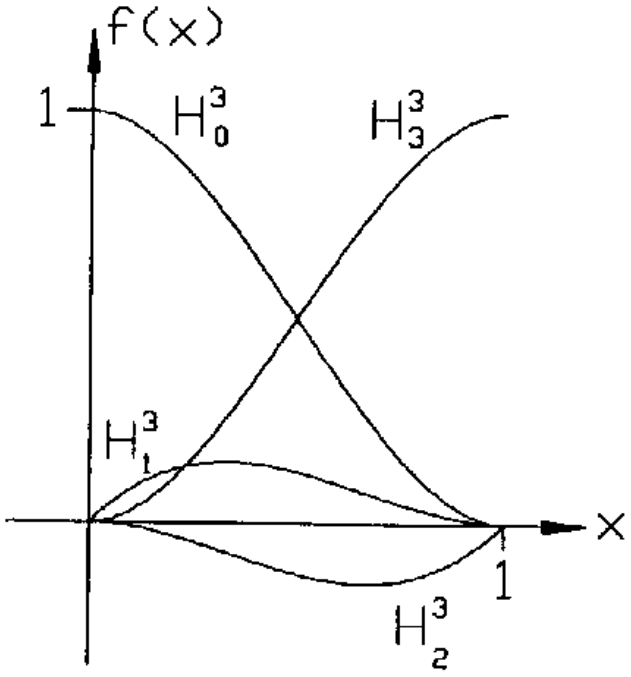
Abhilfe für den letzten Punkt:
man gibt neben den Stützpunkten auch die ersten *m* Ableitungen an den Stützpunkten vor und wählt das Polynom so, dass auch diese übereinstimmen.

für einzelnes Kurvensegment:
gegeben: $P_0^{(k)}$, $P_1^{(k)}$ (k = 0; 1; ...; m) (Werte der Ableitungen an den beiden Stützstellen).
Der Parameterbereich sei $[t_0 , t_1]$ ($t_0 < t_1$).
Ansatz für dieses Segment:

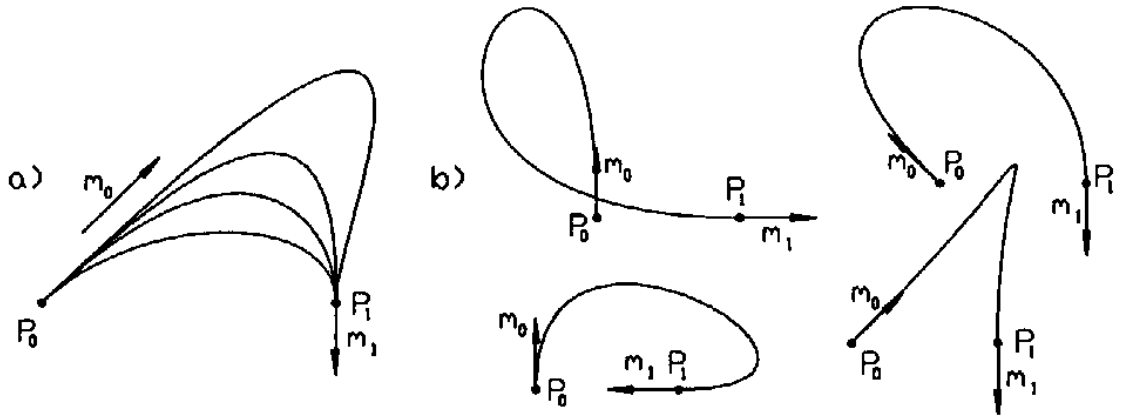
$$Q(t) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{k=0}^{m} P_i^{(k)} \cdot H_{i,k}(t) \ , t \in [t_0 , t_1]$$

darin sind die $H_{i,k}(t)$ die sog. *Hermite-Interpolationspolynome* vom Grad $2m+1$.

Das folgende Diagramm zeigt die Hermite-Polynome vom Grad 3 über dem Intervall [0; 1] (hier mit 0; 1; 2; 3 indiziert, entspr. $H_{0,0}$, $H_{0,1}$, $H_{1,1}$, $H_{1,0}$):



Durch die Vorgabe der Ableitungen, insbes. der ersten Ableitung (Tangentenvektor), kann der Kurvenverlauf besser gesteuert werden als allein durch die Positionen an den Stützstellen:



a) Variation der Länge des Tangentenvektors im Anfangspunkt des Kurvensegments
b) die Richtungen der beiden Tangenten in den Endpunkten werden variiert

zur Vermeidung von Oszillationen und globalen Auswirkungen bei lokalen Änderungen:
Zerlegung in Teilintervalle mit *verschiedenen*, nur begrenzt voneinander abhängigen Interpolationskurven

→ Idee der *Spline-Kurven*

Splines

spline (engl.): dünner Stab, von Schiffsbauern benutzt, um die richtige Form der "stringer" zu konstruieren (Planken, die in Schiffs-Längsrichtung quer zu den Spanten angebracht werden und die Außenwand des Rumpfes bilden)
Entspr. deutsches Wort: "Straklatte",
daher in der älteren dt. Lit. für Splinefunktionen z.T. auch "Strakfunktionen".

Seien t_0 , ..., $t_n \in$ R, $t_0 < t_1 < ... < t_n$, Funktion S def. auf $[t_0, t_n]$.

Def.:
S heißt *Splinefunktion* der Ordnung k (oder vom Grad k–1), wenn gilt:
(1) S ist in jedem Teilintervall $[t_r, t_{r+1}]$ ein Polynom vom Grad k–1.
(2) S und die Ableitungen $S^{(m)}$, m = 1; ...; k–2, sind stetig auf $[t_0, t_n]$.
S heißt *Sub-Splinefunktion*, wenn (1) gilt, S stetig ist, (2) aber nicht gilt.

Kubische Splines

k = 4, also Polynomsegmente vom Grad 3, zweimal stetig differenzierbar.

Eine kubische Splinefunktion beschreibt näherungsweise die Biegelinie eines dünnen Stabes durch eine vorgegebene Reihe von festen Stützhaken.
(Lösung d. Euler-Lagrange-Gleichung, Variationsrechnung, s. Hoschek & Lasser 1992)

Kubische Splines benutzen auf den Teilintervallen Hermite-Interpolationspolynome vom Grad 3 = 2*m*+1 (*m* = 1).

Gegeben: *n*+1 Punkte $P_r^{(0)}$, *r* = 0; ...; *n* (*n* > 0);
Stützstellen $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$.

Auf dem Teilintervall $[t_r, t_{r+1}]$: Hermite-Interpolation 3. Grades

$$Q_r(t) = \sum_{i=r}^{r+1} \sum_{k=0}^{1} P_i^{(k)} \cdot H_{i,k}(t) = (t^3; t^2; t; 1) \cdot M_H \quad (t \in [t_r, t_{r+1}])$$

darin ist M_H die sog. Hermite-Matrix (4,3-Matrix)
(beachte: die $P_i^{(k)}$ werden hier als Zeilenvektoren interpretiert!)
M_H ist unabhängig von *t*.

Die Berechnung von M_H erfolgt durch Einsetzen von t_r und t_{r+1} in die obige Gleichung und in die einmal differenzierte Version der obigen Gleichung.

Daraus lassen sich die Hermite-Polynome, und damit die Splinefunktion, berechnen.

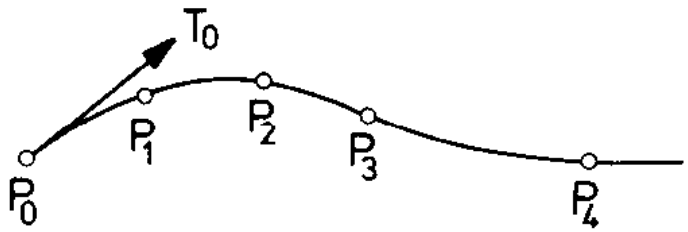
Eine explizite Vorgabe der 1. Ableitungen auch in den inneren Stützstellen ist i. allg. nicht sinnvoll

- fordere stattdessen: Stetigkeit der 1. Ableitung (siehe Def. der Spline-Funktionen)

2*n* Werte bislang unbestimmt (für jedes Segment die 1. Ableitungen in den beiden Endpunkten)
Stetigkeitsforderung liefert *n*–1 weitere Bedingungen
$\Rightarrow$ *n*+1 Koeffizienten immer noch unbestimmt

fordere zusätzlich die Stetigkeit der 2. Ableitung
liefert *n*–1 weitere Bedingungen
$\Rightarrow$ 2 Koeffizienten immer noch unbestimmt

man gibt die 1. Ableitung in den Endpunkten vor



⇒ liefert Bestimmungsgleichungen für die restlichen 2 Koeffizienten

Berechnung der Koeffizienten für die kubischen Polynome in den Teilintervallen läuft auf Lösen eines lin. Gleichungssystems heraus!

Zusammenfassung zur stückweisen Polynom-Interpolation (gilt entsprechend auch für Approximationsansätze):

- Grad n = 1:
  Polygonzug, unstetige Steigungen an den Eckpunkten
- Grad n = 2:
  In 3D können nur planare Kurven erhalten werden (d.h. Kurve liegt immer in einer Ebene)
- **Grad n = 3 (übliche Wahl)**
  Die vier Koeffizienten können z.B. durch Startpunkt, Endpunkt, Tangente am Startpunkt, Tangente am Endpunkt gegeben werden
- Grad n > 3:
  Rechenaufwendig, nur in speziellen Anwendungen benutzt

Allgemeine Darstellung für k=3

$$\mathbf{Q}(u) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{p}_i b_i(u)$$

mit $b_i(u)$: *Basisfunktionen*

$\mathbf{p}_i$: *Kontrollpunkte*

$$\mathbf{Q}(u) = [x(u)\ y(u)\ z(u)] = [u^3\ u^2\ u\ 1] \cdot M \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Parametervektor — Basismatrix — Geometrievektor (Kontrollpunkte)

\+

Blendingfunktionen

- Der erste Faktor ist der Parametervektor U
- Der zweite Faktor, die 4x4 Matrix M heißt **Basismatrix**
- Der dritte Faktor heißt **Geometrievektor G**, die G_i sind geometrische Nebenbedingungen (z.B. Punkte oder Tangentenvektoren)
- Das Produkt aus U und M ergibt die *Blendingfunktionen* (diese gewichten die geometrischen Nebenbedingungen G_i)

Approximationsverfahren für die Kurvendarstellung

(a) Bézier-Kurven

- spezielle Form polynomialer Kurven
- spezifiziert durch n+1 Kontrollpunkte P_0, P_1, ..., P_n
- Kurve läuft nicht durch alle Kontrollpunkte, sondern wird von ihnen beeinflusst!

Der Kontrollpunkt P_i wird durch das sogenannte i-te *Bernstein-Polynom* gewichtet:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot \underbrace{B_{i,n}(t)}_{\text{"Bernstein - Polynome"}} \quad , \quad t \in [0;1]$$

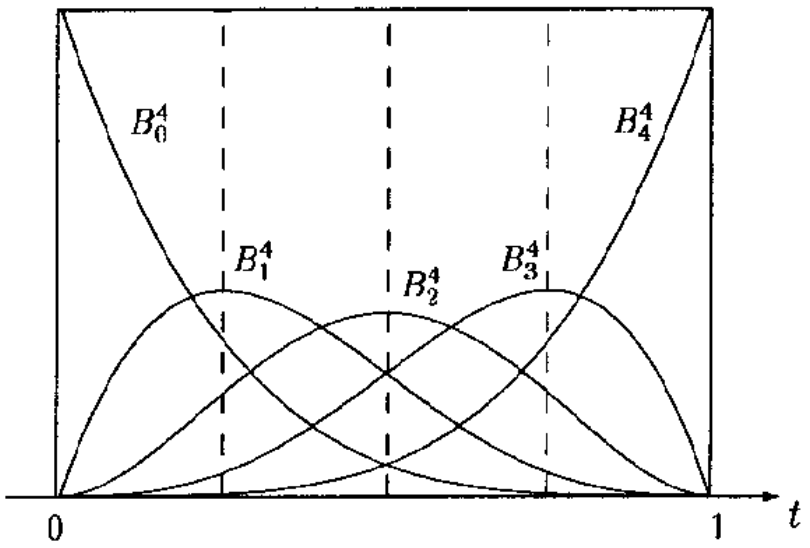
Definition:

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \quad i = 0, \ldots, n$$

darin ist der Vorfaktor der bekannte Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Bernsteinpolynome vom Grad $n = 4$ (unterer Index = i):



Eigenschaften:

- Es gilt:

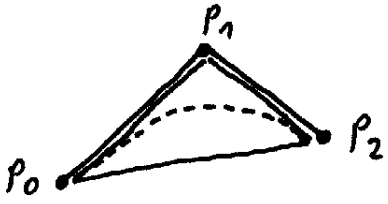
$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1 \quad \forall t \in [0;1]$$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (t + (1-t))^n = 1^n = 1$$

(↑ nach dem binomischen Satz)

- Die approximierende Kurve $Q(t)$ liegt innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte P_0, ..., P_n

n = 2:	n = 3:
	

- Für die Sortierung nach t-Potenzen def. man:

$$Q_{i,n} := \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^j P_{i-j} = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} P_j$$

dann gilt:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} Q_{i,n} \cdot t^i \quad (t \in [0;1])$$

Die Berechnung der $Q_{i,n}$ aus den Kontrollpunkten lässt sich in Matrixschreibweise zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} Q_{0,n} \\ Q_{1,n} \\ \vdots \\ Q_{n,n} \end{bmatrix} = M_n \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad , \qquad (M_n)_{i,j} = (-1)^{i-j} \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

($\binom{i}{j} = 0$ für $j > i$)

- bei n+1 vorgegebenen Kontrollpunkten ist $Q(t)$ Polynom n-ten Grades mit $Q(0) = P_0$ und $Q(1) = P_n$, also Übereinstimmung mit den Kontrollpunkten am Rand

- die Kante P_0P_1 und die Kante $P_{n-1}P_n$ sind Tangenten an Q im Punkt $Q(0)$ bzw. $Q(1)$ und zeigen in Richtung der Differenz zum Nachbarpunkt:

  $$\frac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,n} \cdot i \cdot t^{i-1}$$

  für $t = 0$:

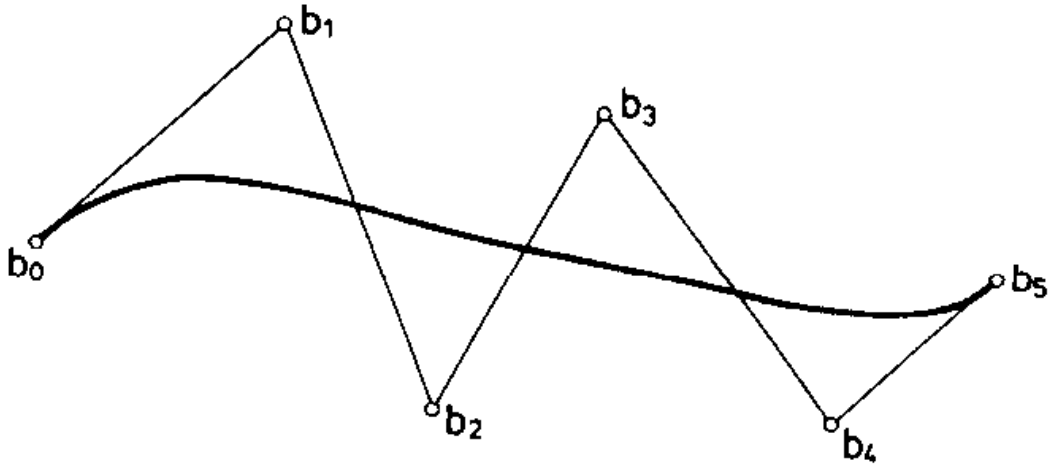
  $$\frac{dQ}{dt}\Big|_{t=0} = Q_{1,n} = n \cdot (-P_0 + P_1)$$

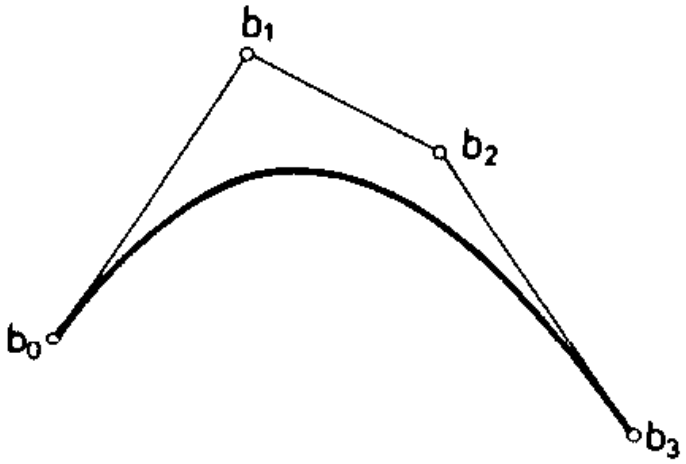
  für $t = 1$ entsprechend.

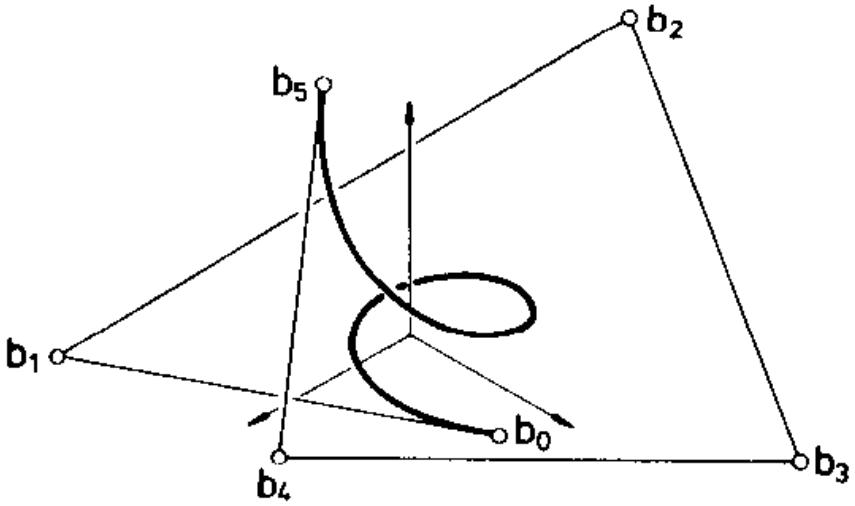
- das Verfahren hat globalen Charakter: Einfügen von zusätzlichen Kontrollpunkten bedingt höheren Grad des approximierenden Polynoms und engere Anlehnung an das Polygon der Kontrollpunkte ("charakteristisches Polygon").

- zum Aneinanderfügen zweier Bézier-Kurven mit stetig differenzierbarem Übergang müssen die entsprechenden Endstücke der charakteristischen Polygone kollinear sein.

Beispiele verschiedener Bézier-Kurven mit ihren charakteristischen Polygonen (Kontrollpunkten):





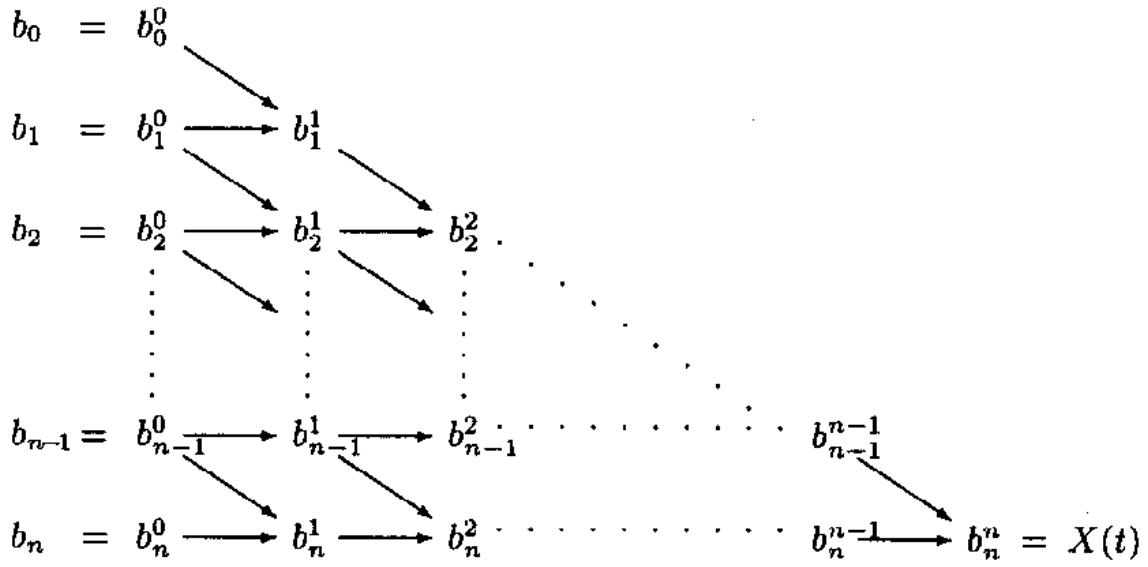


Berechnung von Punkten auf der Bézier-Kurve:
iterativ in endlich vielen Schritten möglich

→ *Algorithmus von de Casteljau*

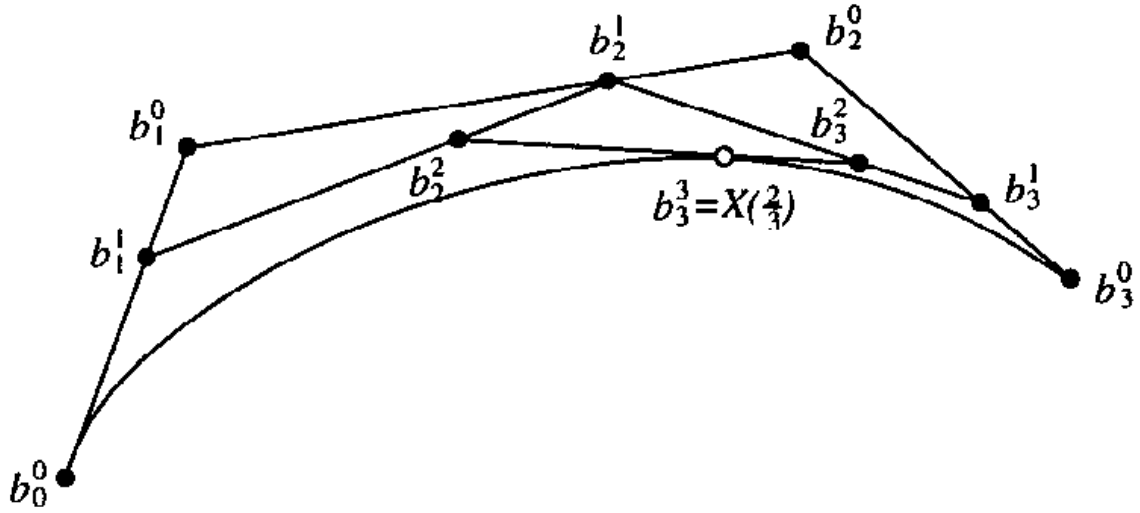
Initialisierung:
$b_i^0 = P_i$ für $i = 0, ..., n$
Iteration:
$k = 1, ..., n$:
  $i = k, ..., n$:
    $b_i^k = (1 - t)\, b_{i-1}^{k-1} + t\, b_i^{k-1}$
Ergebnis:
$Q(t) = b_n^n$.
(hochgestellte Zahl hier kein Exponent, sondern Index.)

Veranschaulichung des Rechenschemas
(hier $b_i = P_i$, $X(t) = Q(t)$):



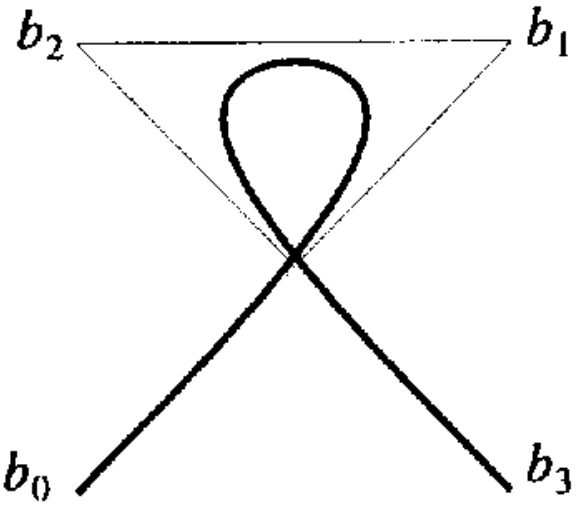
Entsprechende geometrische Konstruktion eines Punktes zum Parameterwert t auf der Kurve:
Teilung der Kanten des charakteristischen Polygons im Verhältnis $t : (1–t)$, Verbinden der Teilungspunkte, Iteration

Beispiel: Konstruktion nach de Casteljau für $n = 3$ und $t = 2/3$:



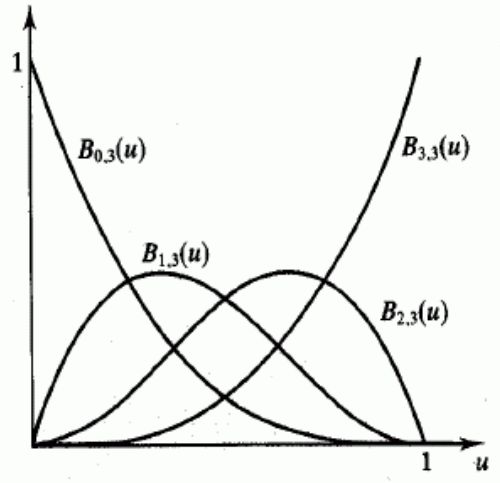
weitere Eigenschaften der Bézier-Kurven:

- monotoner Datensatz führt zu monotoner Kurve
- konvexer Datensatz führt zu konvexer Kurve
- Rotations- und Translationsinvarianz
- lokale Änderungen in den Kontrollpunkten wirken sich zwar global aus, **aber** Einfluss ist nur in der Umgebung des geänderten Punktes signifikant
- es können Doppelpunkte auftreten:



Bézierkurve vom Grad 4 mit einem Doppelpunkt

häufig gebraucht: Spezialfall *n* = 3, *kubische Bézier-Kurve*



$$\mathbf{Q}(\mathrm{u}) = \sum_{\mathrm{i}=0}^{3} \mathbf{p}_\mathrm{i} B_{i,3}(u) \quad mit$$

$$B_{0,3}(u) = (1-u)^3$$

$$B_{1,3}(u) = 3u\ (1-u)^2$$

$$B_{2,3}(u) = 3u^2(1-u)$$

$$B_{3,3}(u) = u^3$$

- Die Bezier Basisfunktionen
- Beobachtungen: p_0 hat dominierenden Einfluß für u < 0,1
- Mit wachsendem u nimmt der Einfluß der anderen Kontrollpunkte zu

Matrix-Notation der kubischen Bézier-Kurve:

$$\mathbf{Q}(\mathrm{u}) = [\mathrm{x(u)\ y(u)\ z(u)}] = \mathbf{U}\mathbf{M}_\mathbf{B}\mathbf{P}_\mathbf{c} = [\mathrm{u^3\ u^2\ u\ 1}] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_4 \end{bmatrix}$$

Multipliziert man die Basismatrix $\mathbf{M}_\mathrm{B}$ mit dem Parametervektor **U** so errechnen sich die Basisfunktionen *(Blending Functions)*:

$$(B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{3,3}) = \mathbf{U}\mathbf{M}_\mathrm{B}$$

Zusammenfassung zu Bézier-Kurven:

- historisch bedeutendes Repräsentationsmodell
- schnelle + einfache Berechnung
- noch oft in interaktiver Anwendungssoftware genutzt: Kontrolle der Endpunkte und der Tangenten, ggf. interaktive Beeinflussung der Kontrollpunkte
- Verallgemeinerung auf Flächen: möglich, aber durch zu wenige Freiheitsgrade beim Modellieren nur beschränkt einsetzbar
- Verwendung von Bézier-Flächen für das Rendering

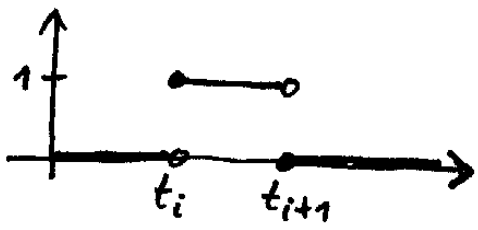
(b) B-Splines

Es sei (t_0, t_1, ..., t_n) ein "Knotenvektor" (Vektor von Kontroll-stellen) mit $t_i \leq t_j$ für $i < j$.
Die *(nicht-uniformen) normalisierten B-Spline-Basisfunktionen* $N_{i,k}$ der Ordnung k über dem Intervall [t_0, t_n] sind def. durch

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot N_{i,k-1}(t) + \frac{-t + t_{i+k}}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot N_{i+1,k-1}(t)$$

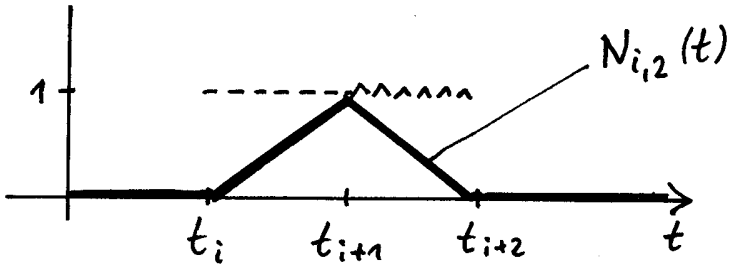
Verlauf von $N_{i,1}$:



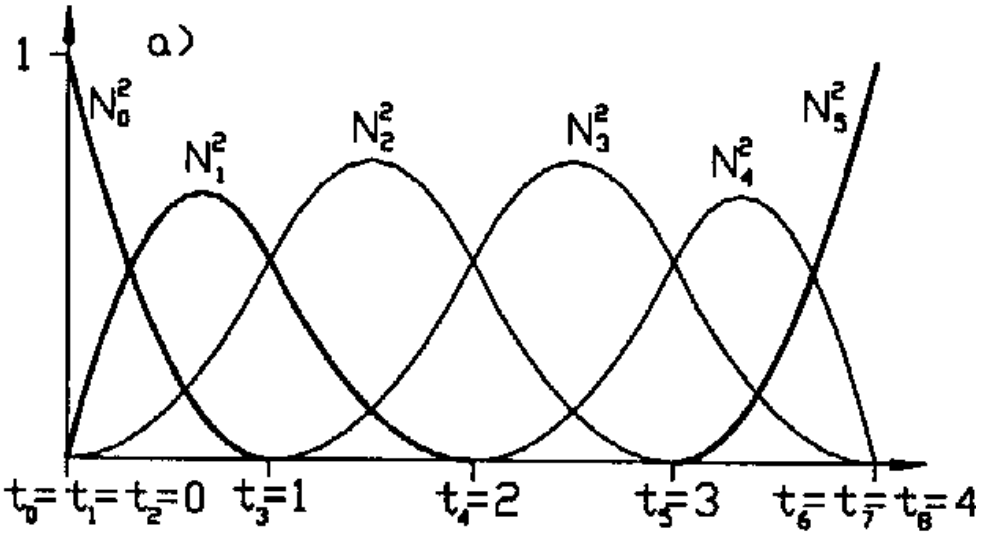
Beispiel $k = 2$:

$$N_{i,2}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} N_{i,1}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} N_{i+1,1}(t)$$

..... ^^^^^^^



Beispiel $k = 3$, Knotenvektor (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4),
Verlauf der B-Spline-Basisfunktionen $N_{i,3}(t)$, $i = 0, ..., 5$:



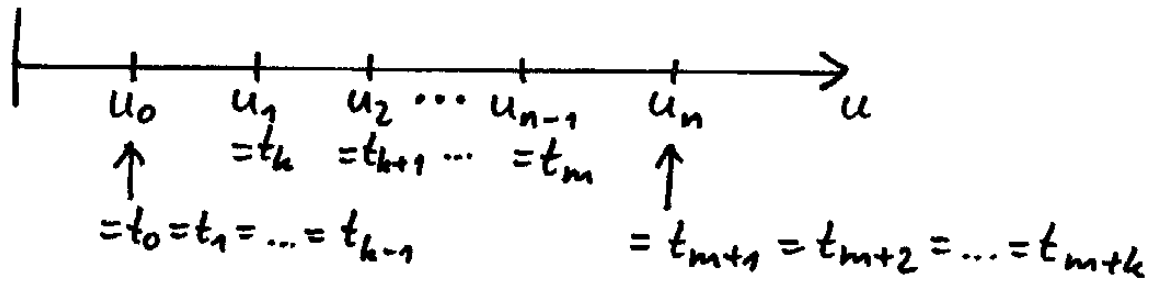
Allgemein ist $N_{i,k}(t) = 0$ für $t \notin [t_i, t_{i+k}]$.
Vereinbarung:

$$\frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} := 0 \quad \text{für} \quad t_{i+k-1} = t_i$$

$$\frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} := 0 \quad \text{für} \quad t_{i+k} = t_{i+1}$$

Das Parameterintervall für die Kurve, $[u_0, u_n]$, wird zerlegt in $n = m–k+2$ Teilintervalle $[u_i, u_{i+1})$, $i = 0; 1; ...; n–1$.
Def. des Knotenvektors $(t_0, t_1, ..., t_{k+m})$:

$t_i = u_0$ für $i = 0; 1; ...; k–2$,
$t_{i+k–1} = u_i$ für $i = 0; 1; ...; m–k+2$,
$t_{i+m+2} = u_n$ für $i = 0; 1; ...; k–2$.



- Spezialfall der *uniformen* B-Splines: wähle uniforme (d.h. äquidistante) Teilung von $[u_0, u_n)$, also $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, ..., $u_n = n$.

- Spezialfall $m = k–1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$:

Knotenvektor = (0, 0, 0, ..., 0, 1, 1, 1, ..., 1) (k Nullen, k Einsen) liefert "degenerierte B-Spline-Basis":

$$N_{i,k}(t) = \binom{k-1}{i} t^i (1-t)^{k-1-i} = B_{i,k-1}(t)$$

(Bernstein-Polynom somit als Spezialfall).

- Für die B-Spline-Basisfunktionen gilt (im allgemeinen Fall):

$$\sum_{i=0}^{m} N_{i,k}(t) = 1 \quad \text{für} \quad t \in [t_0 \,;\, t_n) \,.$$

(wichtig für die Konvexe-Hüllen-Eigenschaft, s.u.).
(Beweis durch Induktion über k.)

Approximation einer gegebenen Liste von Kontrollpunkten P_i, i= 0, ..., m, durch eine B-Spline-Kurve der Ordnung k:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{m} P_i \cdot N_{i,k}(t), \qquad t \in [t_0; t_n)$$

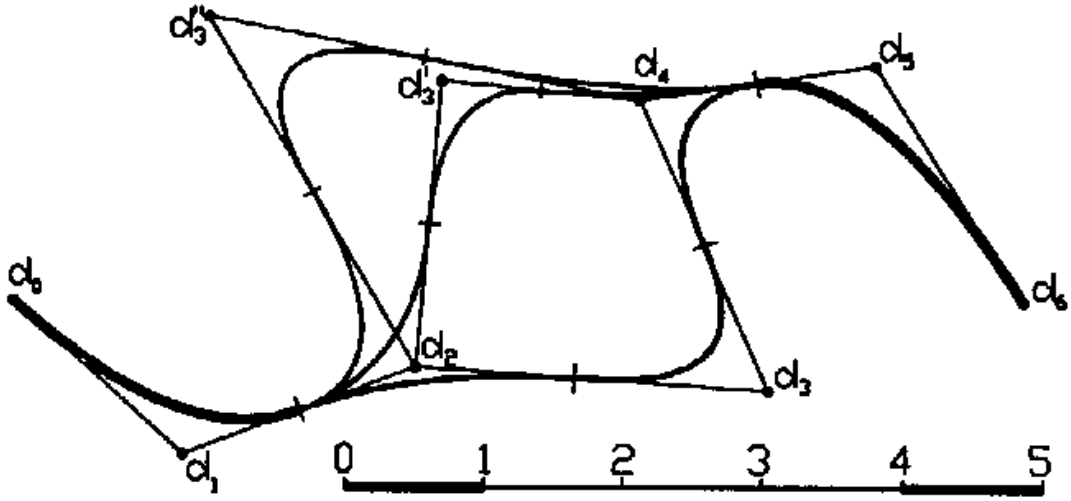
.

An den Rändern: $Q(t_0) = P_0$, $Q(t_n) = P_m$,
dazwischen werden die P_i i. allg. lediglich approximiert.

Aber: wenn man $P_i = P_{i+1} = ... = P_{i+k-1}$ setzt, muss $Q(t)$ durch P_i verlaufen $\Rightarrow$ Durchlaufen eines Punktes lässt sich erzwingen.

Eigenschaften der B-Spline-Kurven:

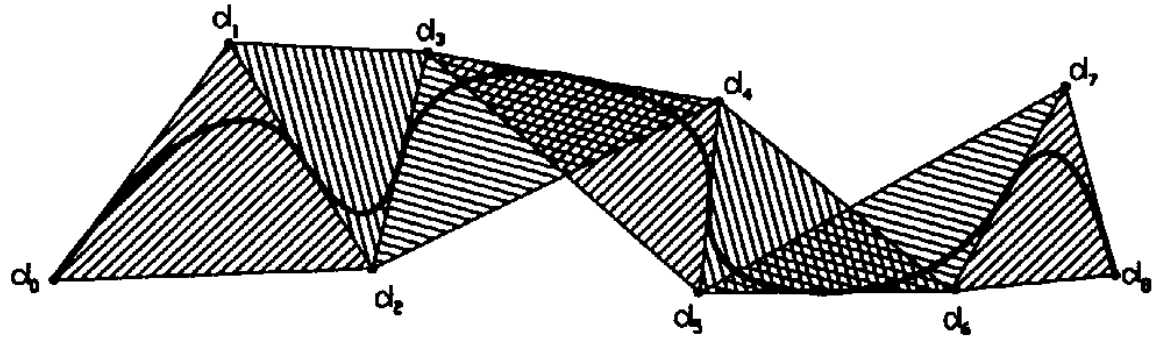
- wegen $N_{i,k}(t) = 0$ für $t \notin [t_i, t_{i+k})$ ist das Verfahren lokal.



lokale Wirkung der Kontrollpunkte. k = 3, Knotenvektor (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5); durch Verschieben von d_3 nach d_3' werden lediglich die Kurvensegmente mit Parameterwerten zwischen 1 und 4 beeinflusst.

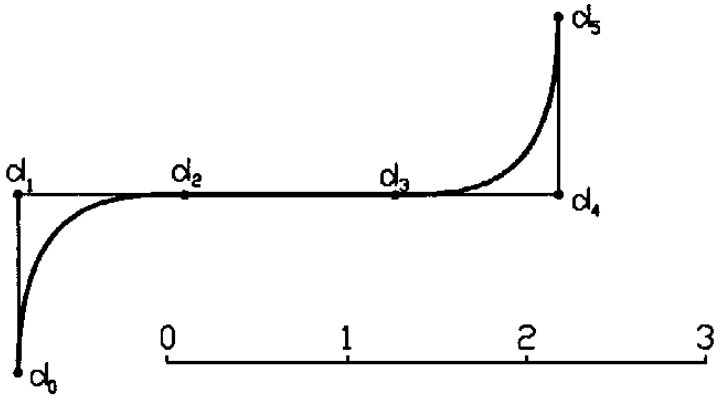
- Da sich die Basisfunktionen zu 1 summieren (s.o.), liegt die approximierende Kurve innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte.

- Genauer: $Q(t)$ verläuft innerhalb der konvexen Hülle von je k aufeinanderfolgenden Kontrollpunkten:



$\Rightarrow$ für kleines k legt sich $Q(t)$ eng an das Polygon an,
für $k = 2$ ist $Q(t)$ *identisch* mit dem charakteristischen Polygon.

- wenn k+1 aufeinanderfolgende Kontrollpunkte kollinear sind, enthält die Kurve eine der Polygonkanten:



k = 3, 4 Punkte d_1, ..., d_4 kollinear: Erzwingung eines Geradenstücks

- es gibt ein iteratives Berechnungsverfahren als Verallgemeinerung des de Casteljau-Algorithmus:

  Algorithmus von de Boor
  (siehe Encarnação et al. 1996)

Für einige Anwendungen (insbes. bei Verwendung für Flächen) bei B-Splines immer noch nicht genug Freiheitsgrade

Idee: Def. der Kurve in homogenen Koordinaten
$\Rightarrow$ dadurch zusätzliche Freiheitsgrade

($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $w(t)$)

Bei Normalisierung (Division durch $w(t)$) entstehen gebrochenrationale Funktionen.
Somit:

(c) NURBS

= Nicht-uniforme rationale B-Splines

NURBS

- gebräuchlichste Form: $x = \frac{x(t)}{w(t)}, y = \frac{y(t)}{w(t)}, z = \frac{z(t)}{w(t)}$
  (in homogenen Koordinaten: $(x(t), y(t), z(t), w(t))$)
- invariant bei Rotation, Skalierung, Translation und Projektion
- Nur Kontrollpunkte müssen projiziert werden!
  (letzteres gilt nicht für nichtrationale Kurven)

wie bei den einfachen B-Splines wird die Kurve stückweise zusammengesetzt:

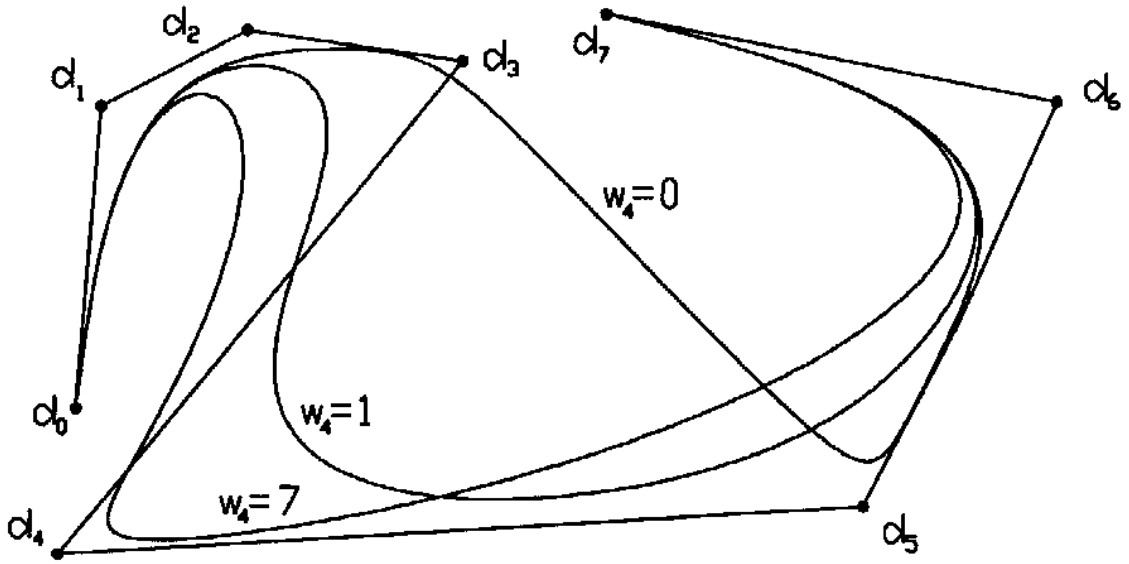
$$\mathbf{p}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i w_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,k}(u)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i \cdot R_{i,k}(u) \text{ mit } R_{i,k}(u) = \frac{N_{i,k}(u) w_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,k}(u) w_j}$$

Eigenschaften von Rationalen B-Splines

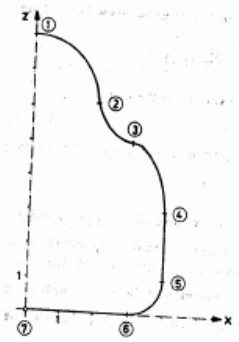
- Haben die gleichen analytischen und geometrischen Eigenschaften wie Splines
- w_i =1 für alle i dann gilt
  $R_{i,k}(u) = N_{i,k}(u)$
- die mit jedem Kontrollpunkt assoziierten Gewichte w_i wirken als zusätzliche Formkontrollparameter. Wirken auch lokal.
- $w_i > 1$ ➔ Kurve nähert sich dem Kontrollpkt.
- $w_i < 1$ ➔ Kurve entfernt sich von dem Kontrollpkt

Wirkung der Gewichte auf NURBS: eine NURBS-Kurve mit $k = 5$, Knotenvektor (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4), bei der das Gewicht w_4 variiert wurde:



Vorteile von NURBS

- Invarianz gegenüber Rotation, Skalierung, Translation und perspektivischer Transformation (d.h. nur die Kontroll-punkte müssen transformiert werden und nicht jeder Punkt der Kurve)
- NURBS können Kegelschnitte exakt beschreiben
- Gegenüber B-Splines durch die Gewichte ergänzende Editiermöglichkeiten



Flächendarstellung

man unterscheidet 2 Typen:

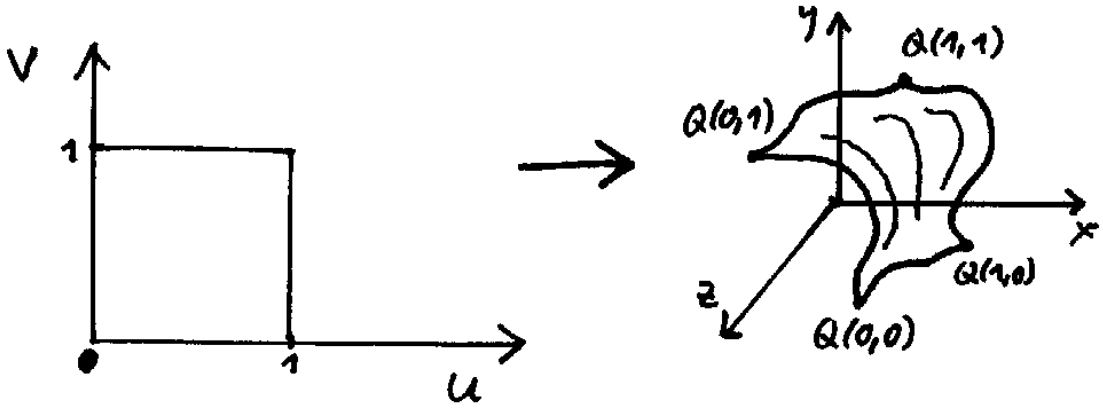
- *finite* Interpolationen / Approximationen: endliche Zahl von Stützstellen / Kontrollpunkten vorgegeben
- *transfinite*: unendliche Menge von Punkten ist vorgegeben, z.B. die Randkurven der zu modellierenden Fläche

  Rand der Fläche soll exakt eingehalten werden: häufige Anforderung, z.B. in der Konstruktion von Bauteilen

1. Transfinite Interpolationsverfahren

Ausgangspunkt:
Parameterdarstellung eines Flächenstücks
mit 2 reellwertigen Parametern *u*, *v*

$u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$
Abbildung des Recktecks $[a, b] \times [c, d]$ in den dreidim. Raum:



Parameterdarstellung der Fläche:

$$Q(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

für festes $u_i \in [a, b]$: $Q(u_i, v)$
für festes $v_j \in [c, d]$: $Q(u, v_j)$ stellen Linien auf der Fläche dar

Randkurven: $Q(a, v)$, $Q(b, v)$, $Q(u, c)$, $Q(u, d)$

Vorgegebene Daten:
- Eckpunkte $Q(a, c)$, $Q(a, d)$, $Q(b, c)$, $Q(b, d)$
- Randkurven
- oft zusätzlich: Richtungsvektoren in den Randpunkten oder auf dem Rand

man definiert:

$$q^{(r,s)}(u_i, v_j) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} Q(u, v)\Big|_{\substack{u=u_i \\ v=v_j}}$$

Oft normiert man auf $a = c = 0$, $b = d = 1$: also Einheitsquadrat als Parameterbereich.

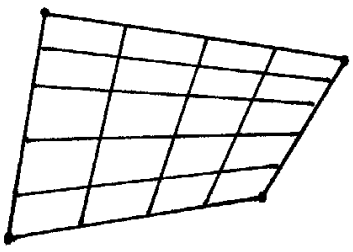
Wie kann man zwischen den 4 Randkurven sinnvoll interpolieren?

Idee: zweimalig linear, in beiden Parameterrichtungen (u und v)

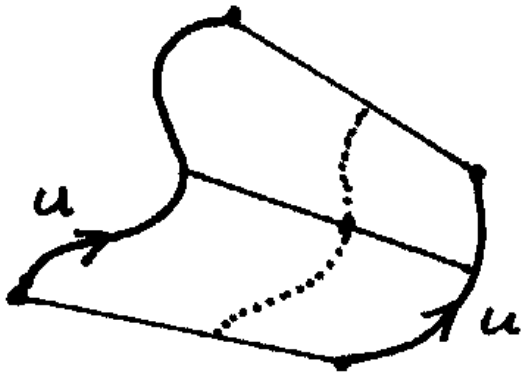
Ausgangspunkt:
bilineare Interpolation zwischen den 4 *Eckpunkten*

$$Q_b(u, v) = Q(0, 0)(1-u)(1-v) + Q(0, 1)(1-u)v + Q(1, 0)u(1-v) + Q(1, 1)uv$$

liefert *bilineares Flächenstück* (i.allg. keine Ebene, sondern parabolisches Hyperboloid = (Ausschnitt aus) Sattelfläche!)



2. Schritt:
Lineare Interpolation zwischen 2 gegenüberliegenden Randkurven: "**Lofting**"



$Q_1(u, v) = Q(u, 0)(1–v) + Q(u, 1)v \qquad (u, v \in [0, 1]).$

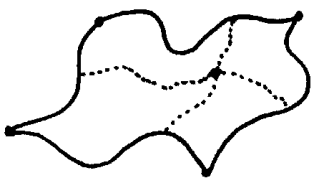
analog für das andere Randkurven-Paar:
$Q_2(u, v) = Q(0, v)(1–u) + Q(1, v)u$

Nachteil: die beiden Interpolations-Flächen enthalten nur je eines der vorgegebenen Randkurven-Paare (das andere Paar ist durch Geradenstücke ersetzt)

3. Schritt: Addition von Q_1 und Q_2; zur Korrektur muss das bilineare Flächenstück Q_b wieder abgezogen werden:

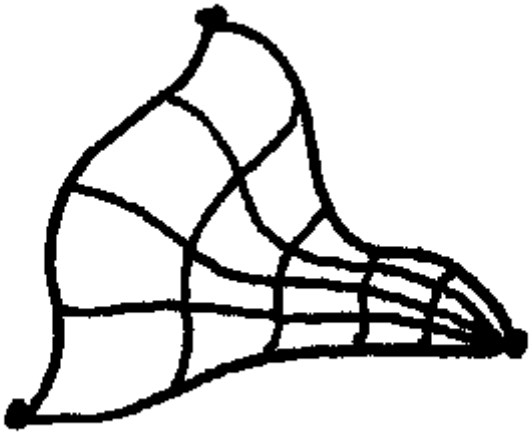
$$Q(u, v) = Q_1(u, v) + Q_2(u, v) – Q_b(u, v)$$

$\Rightarrow Q(u, v)$ hat die 4 vorgegebenen Randkurven



"**Coons-Patch**", "Coons-Pflaster", Coons-Flächenstück.

Coons-Fläche durch 3 Punkte:
man lasse eine der Randkurven zu einem Punkt schrumpfen



"degeneriertes Flächenstück"

– analog für 2 Punkte (2 gegebene Randkurven) oder sogar für nur 1 Punkt (1 gegebene, geschlossene Randkurve) möglich.

2. Finite Verfahren

Oft will man nur wenige Stütz- oder Kontrollpunkte haben
(z.B. beim schnellen interaktiven Editieren von Freiflächen)

Vorgehen analog zur Bézier- oder B-Spline-Modellierung von Kurven

Grundidee:
- ausgehen von Kurvendarstellungen, die wir schon kennen
- "Kurven von Kurven", um auf 2D zu kommen

→ "**Tensorprodukt-Flächen**"

- gegeben eine stückweise polynomiale Kurve $F(u)$ vom Grad n

$$F(u) = \sum_{i=0}^{n} C_i N_i(u) \quad 0 \leq u \leq 1$$

- gegeben eine zweite stückweise polynomiale Kurve $G(v)$ vom Grad m

$$G(v) = \sum_{j=0}^{m} C_j N_j(v) \quad 0 \leq v \leq 1$$

- Tensorproduktfläche $S(u,v)$ beschrieben durch:

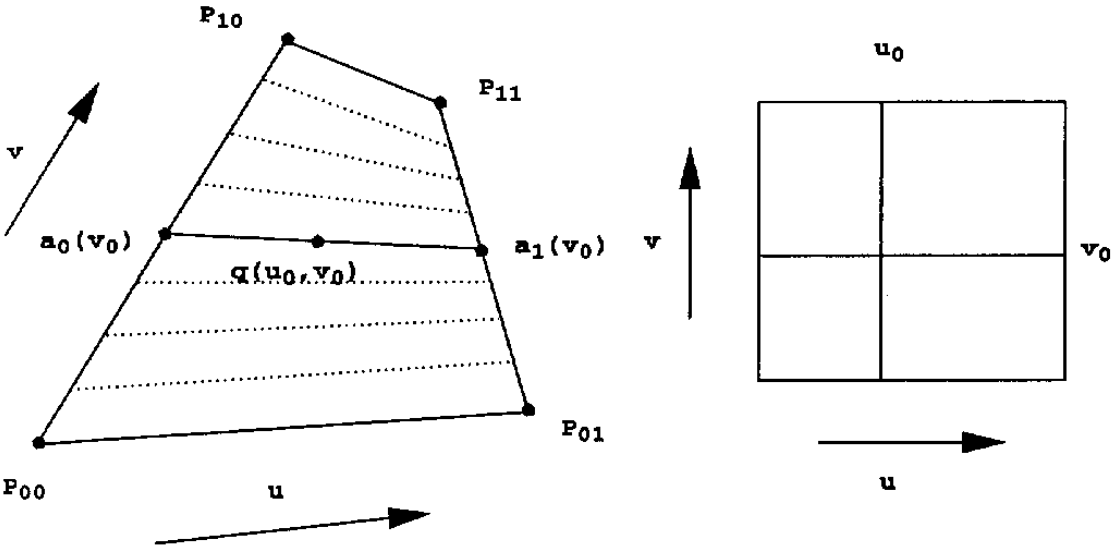
$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} C_{ij} N_i(u) N_j(v) \qquad u,v \in [0,1]$$

- Interpretation als „Kurve von Kurven“

- andere Notation:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} N_i(u) C_i(v) \quad \text{mit} \quad C_i(v) = \sum_{j=0}^{m} N_j(v) C_{ij}$$

Konstruktion analog zur bilinearen Interpolation von Geradenstücken:



– statt der Geraden z.B. kubische Splines oder Bézier-Kurven verwenden
– Kontroll- bzw. Stützpunkte auf den Rändern und innerhalb der Fläche

Beispiel: Tensorproduktfläche, basierend auf kubischen Polynomen (häufig verwendet)

Grundsätzliches zu bikubischen parametrischen Flächen

$$\mathbf{Q}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} p_{ij} b_i(u) b_j(v)$$

mit $p_{i,j}$ *sind die* 16 *Kontrollpunkte*

Ein Punkt Q = (x,y,z) der Fläche im kartesischen Raum ist durch (u,v) im Parameterraum bestimmt.

Komplizierte Flächen werden durch eine Menge von solchen Flächenelemente (Patches) zusammengesetzt.

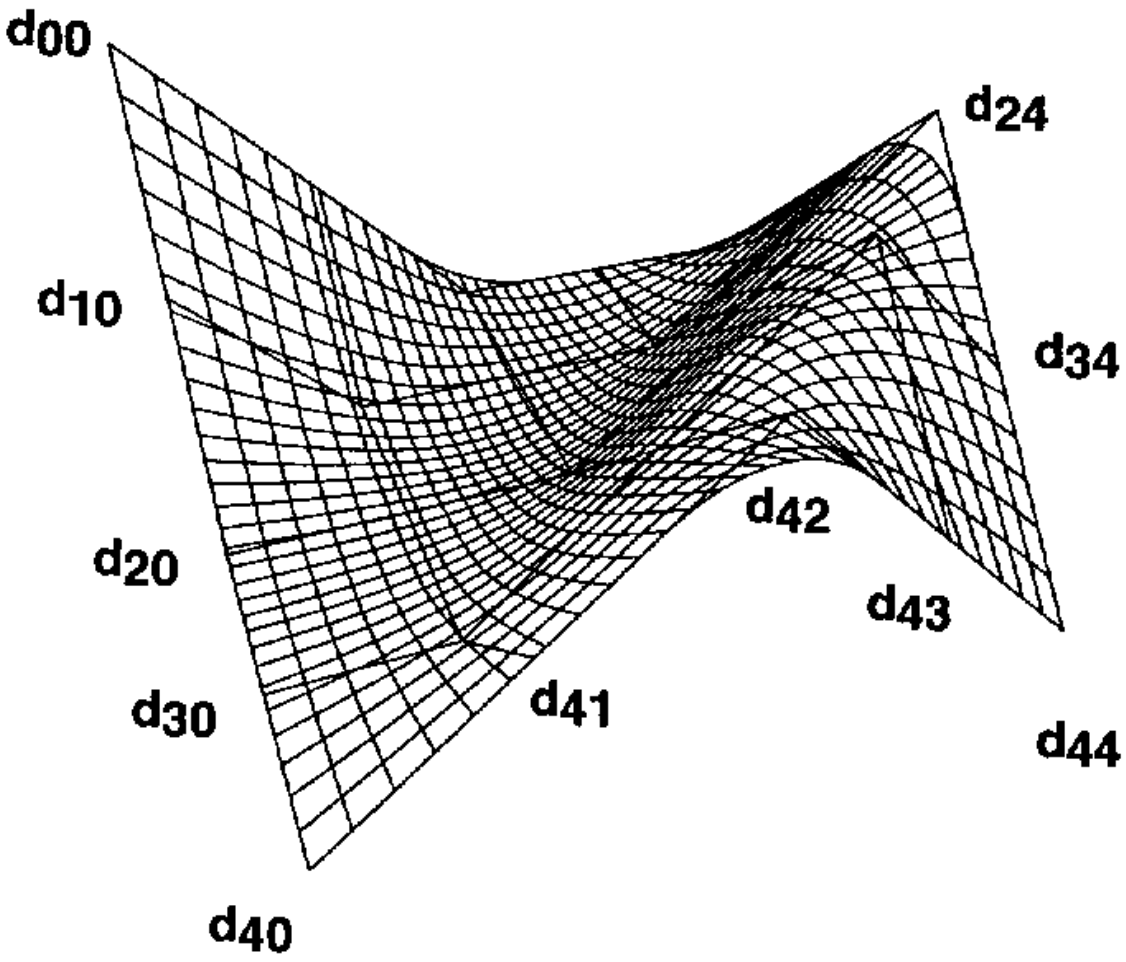
Beispiel: B-Spline-Flächen

Tensorprodukt-Flächen aus B-Spline-Kurven

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} P_{i,j}\ N_{i,m}(u)\ N_{j,n}(v)$$

Die Eigenschaften der B-Spline-Kurven übertragen sich, insbes. die konvexe-Hüllen-Eigenschaft.

Beispiel einer kubischen B-Spline-Fläche mit Kontrollnetz (25 Kontrollpunkte):

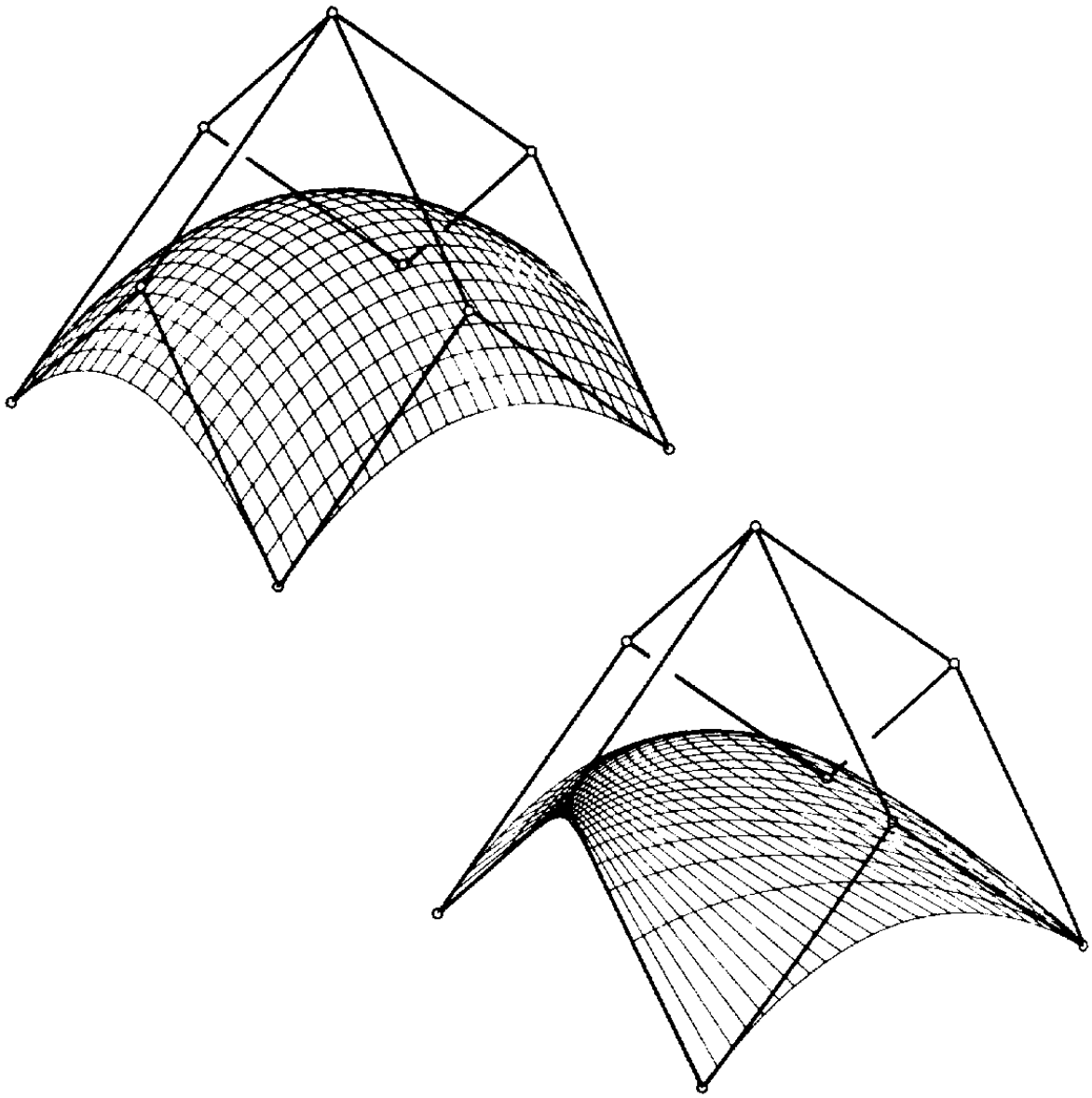


Rationale B-Spline-Flächen (NURBS-Patches) und rationale Bézier-Flächen

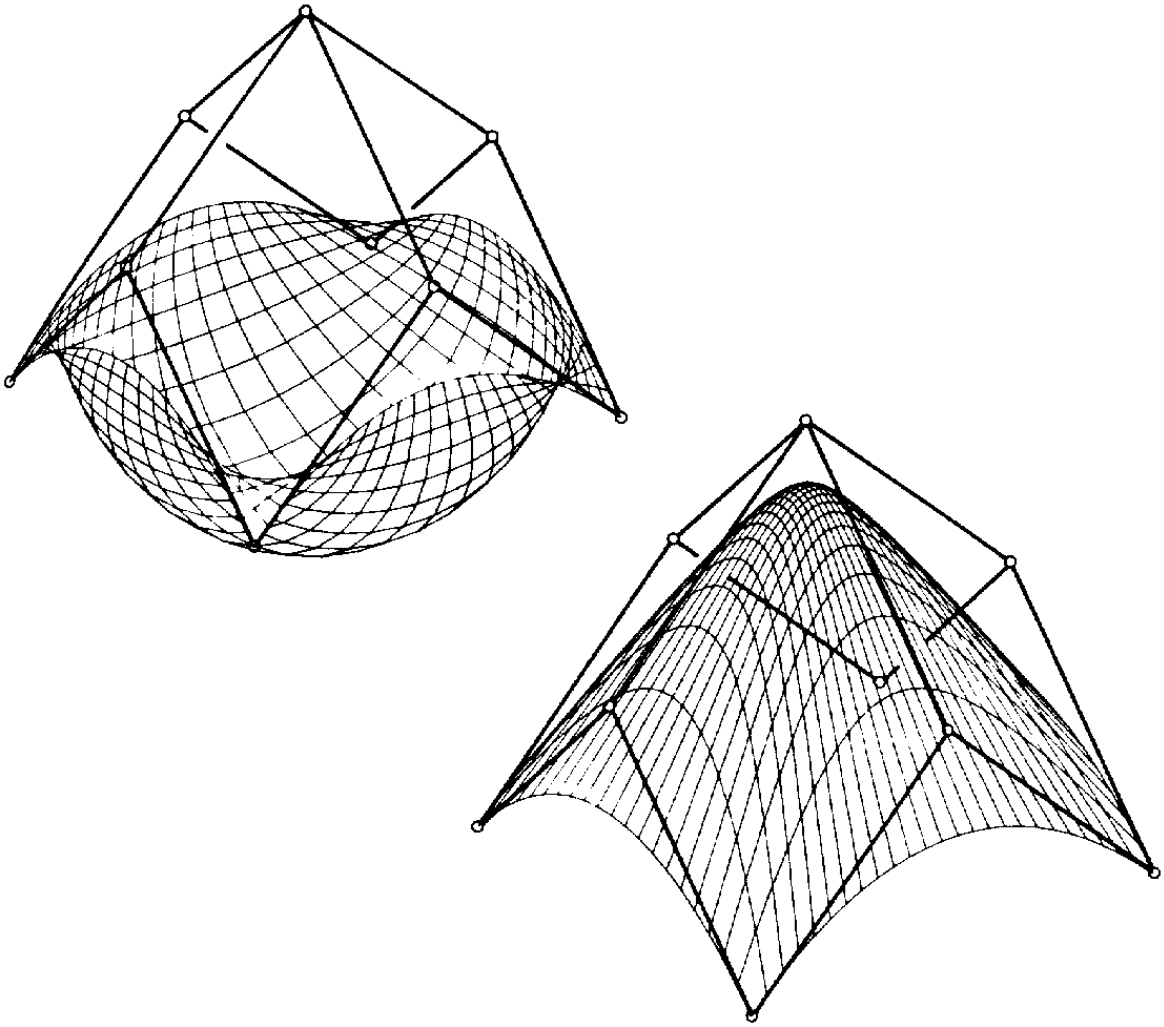
wie im Fall der Kurven: Hinzunahme einer weiteren Funktion in der homogenisierenden, vierten Koordinate, die als "Gewichtsfunktion" weitere Freiheitsgrade eröffnet

Beispiel: rationale Bézier-Flächen mit gleichem Kontrollpunkte-Netz, aber unterschiedlichen Gewichtsfunktionen (aus Hoschek & Lasser 1992):

(1. Bild: alle Gewichte = 1, 2. Bild: linker Rand mit Gewicht 10, rechter Rand mit Gewicht 0,1)



(Fortsetzung nächste Seite)



(oben links: mittlerer Punkt mit Gewicht –1,5,
unten rechts: mittl. Punkt mit Gewicht 10.)