

10. Nichtklassische Modelle / Fraktale

bisher:

Grafik-Modelle für klassische, euklidische geometrische Objekte (Polygonnetze, Würfel, Polyeder, Spline-Kurven und -Flächen...)

- gut für: Gebäude, Autos, Möbel, Maschinen...
- Mängel bei der Modellierung natürlicher Objekte

z.B.

Wolken



Flussläufe



Wälder



Galaxien



Gemeinsamkeiten dieser natürlichen Objekte:

- "nicht glatt"
- Koexistenz "großer und kleiner" Strukturen
- Koexistenz geordneter und ungeordneter, "chaotischer" Strukturen
- Beschreibung mit klassischen, geometrischen Standardkörpern sehr aufwändig
- geordnete Anteile (und "einfache" Zufalls-Anteile) legen nahe, dass es kompaktere Beschreibungen gibt

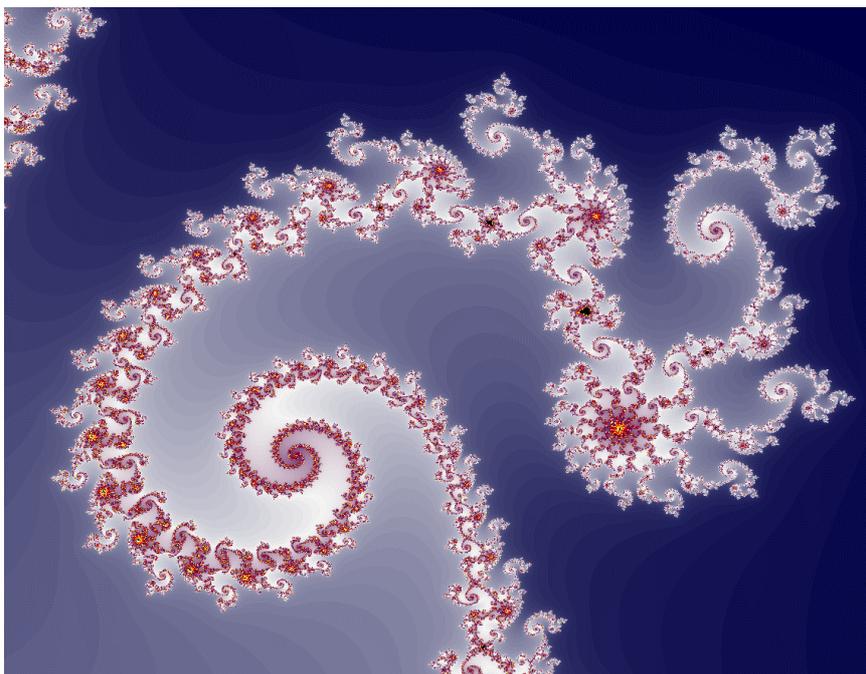
alternativer Modellansatz seit den 1970er Jahren:

"Fraktale" (Bezeichnung von Benoît B. Mandelbrot)

größeres Theorie-Umfeld:

- Topologie, Maß- und Dimensionstheorie
- Selbstähnlichkeit
- dynamische Systeme
- Chaostheorie
- Iteration von (geometrischen) Abbildungen
- Zeitreihenanalyse
- Informations- und Komplexitätstheorie

lieferte neue, populäre Metaphern ("Schmetterlingseffekt")
und ästhetische Möglichkeiten





Erste Grundidee:
Selbstähnlichkeit

Analogie zum klassischen Symmetriebegriff

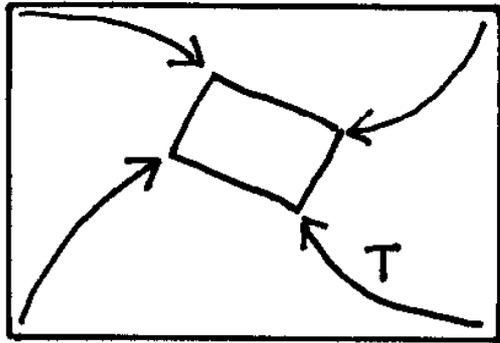
| | |
|--|---|
| symmetrische Objekte (Rotations-, Spiegelsymmetrie, Periodizität...) | selbstähnliche Objekte |
| <i>invariant unter:</i> Kongruenzabbildungen | <i>invariant unter:</i> Ähnlichkeitsabbildungen (<i>allgemeiner:</i> affinen Abbildungen) (<i>noch allgemeiner:</i> nichtlinearen Abbildungen) |



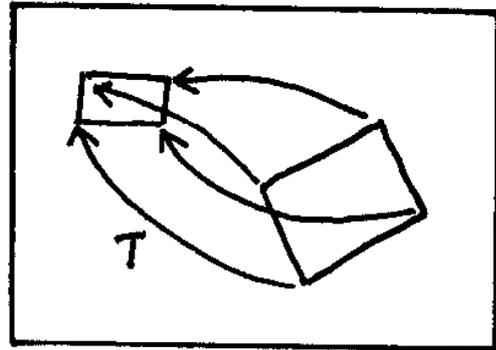
Prinzip der Selbstähnlichkeit:
"Bild im Bild"

- geometrisches Analogon zur Rekursion

vollständige Selbstähnlichkeit:
es existieren eine oder mehrere (endlich viele) Ähnlichkeitsabbildung(en) T , die das gesamte Bild auf (jeweils) einen Teil von sich selbst abbilden



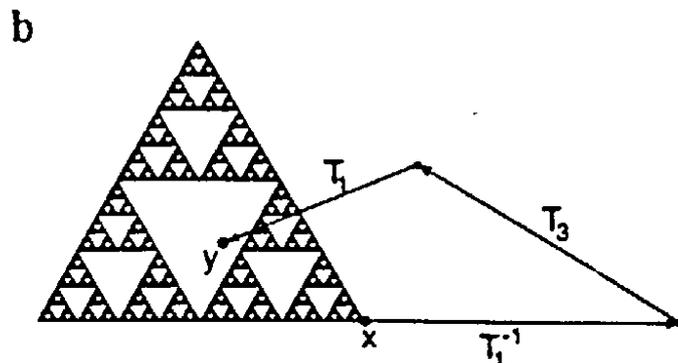
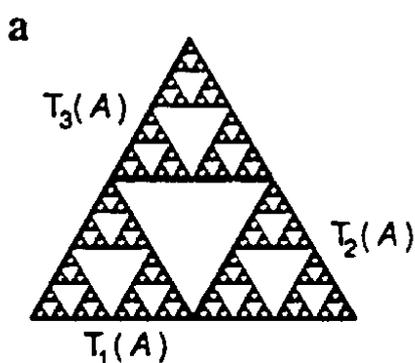
partielle Selbstähnlichkeit:
es existieren eine oder mehrere (endlich viele) Ähnlichkeitsabbildung(en) T , die Teile des Bildes auf andere Teile abbilden

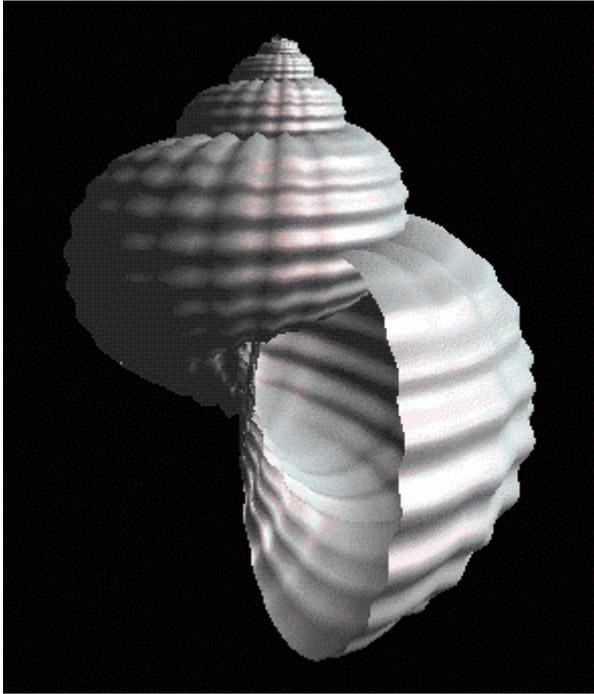


Abschwächung:

lasse affine Abb. statt Ähnlichkeitsabb. zu –
"Selbstaffinität"

Im Gegensatz zur klassischen Symmetrie bilden die Selbstähnlichkeiten eines Objektes i. allg. keine Gruppe, sondern eine Halbgruppe:
die inversen Transformationen führen aus dem Objekt heraus





(Simulation)

- Schneeflocken
- pflanzliche Verzweigungsstrukturen
- Höhenmuster von Landschaften (stochastische Selbstähnlichkeit)

Beachte: Selbstähnlichkeit \neq Fraktalität,
obgleich enge Beziehungen bestehen!
(log. Spirale hat Dimension 1, kein Fraktal)

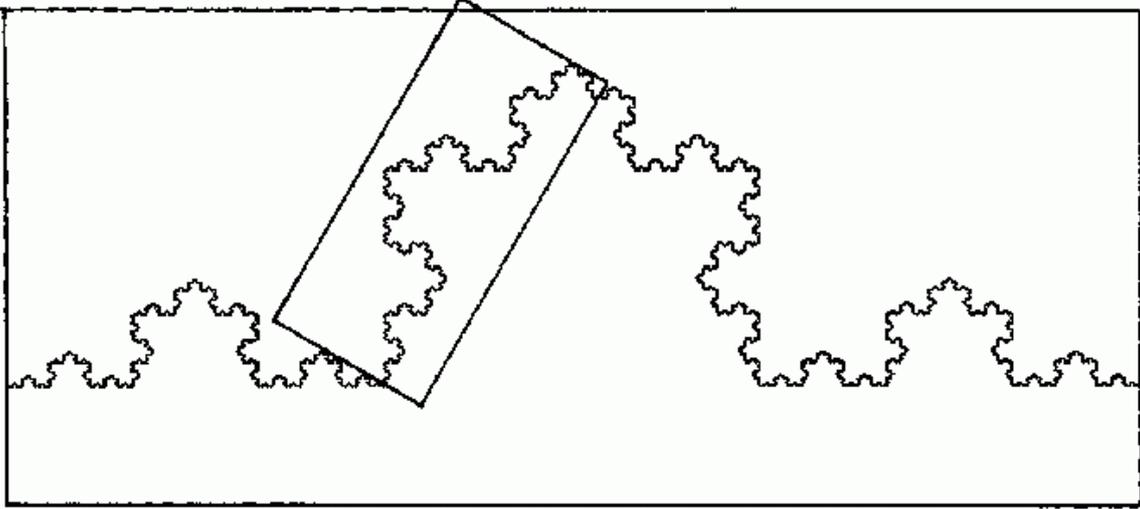
Konstruktion selbstähnlicher Strukturen:
einfachster Ansatz ergibt sich aus der Definition

iterierte Anwendung der Selbstähnlichkeitstransformation(en)
auf ein Grundobjekt ("Initiator")

Prinzip der "*Mehrfach-Verkleinerungs-Kopiermaschine*"
(Peitgen et al.)

→ "iteriertes Funktionensystem" (iterated function system, *IFS*),
siehe unten

Beispiel Koch-Kurve (vgl. PostScript-Übung):



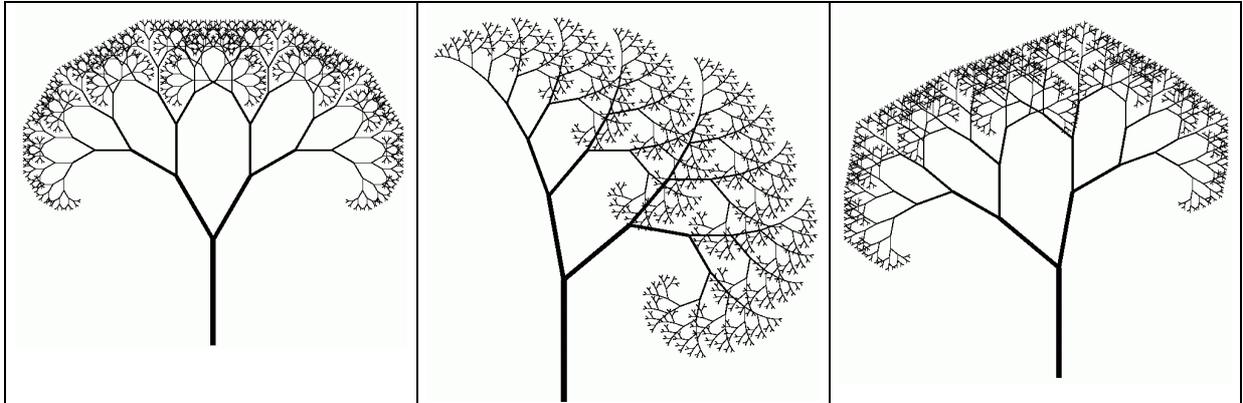
hier 4 Selbstähnlichkeits-Transformationen

bei genügender Iterationstiefe kommt es auf das Initiator-Objekt nicht an:



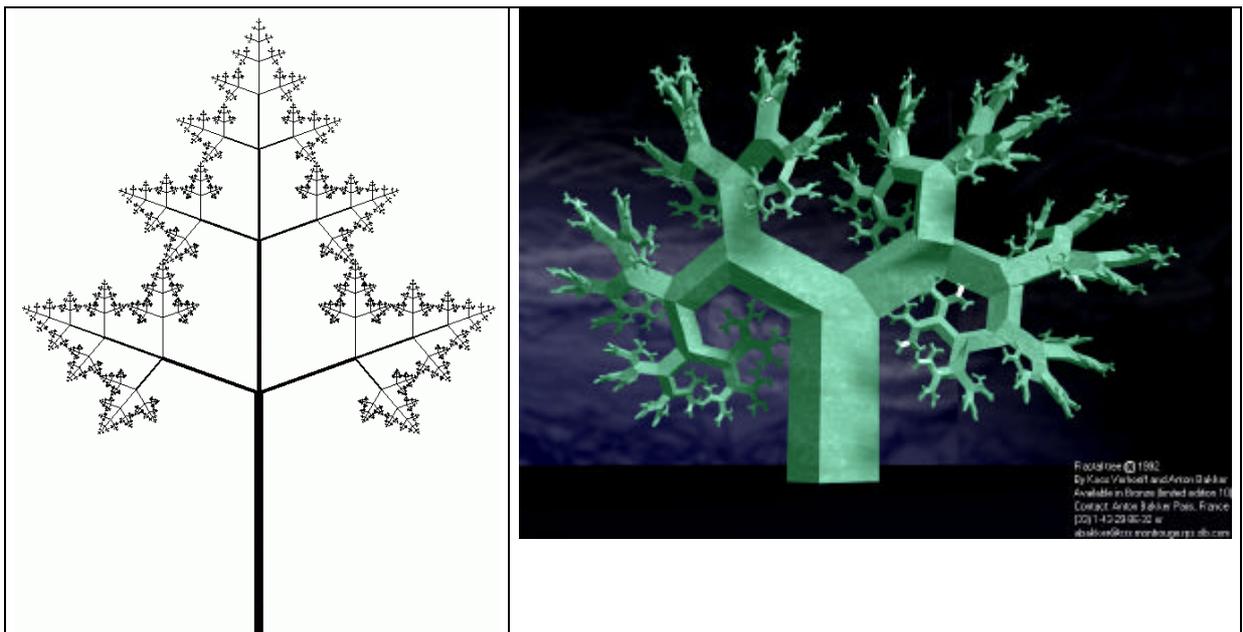
einfache selbstähnliche / selbstaffine Konstruktionen:

binäre Bäume



ternärer Baum

gerenderter binärer Baum

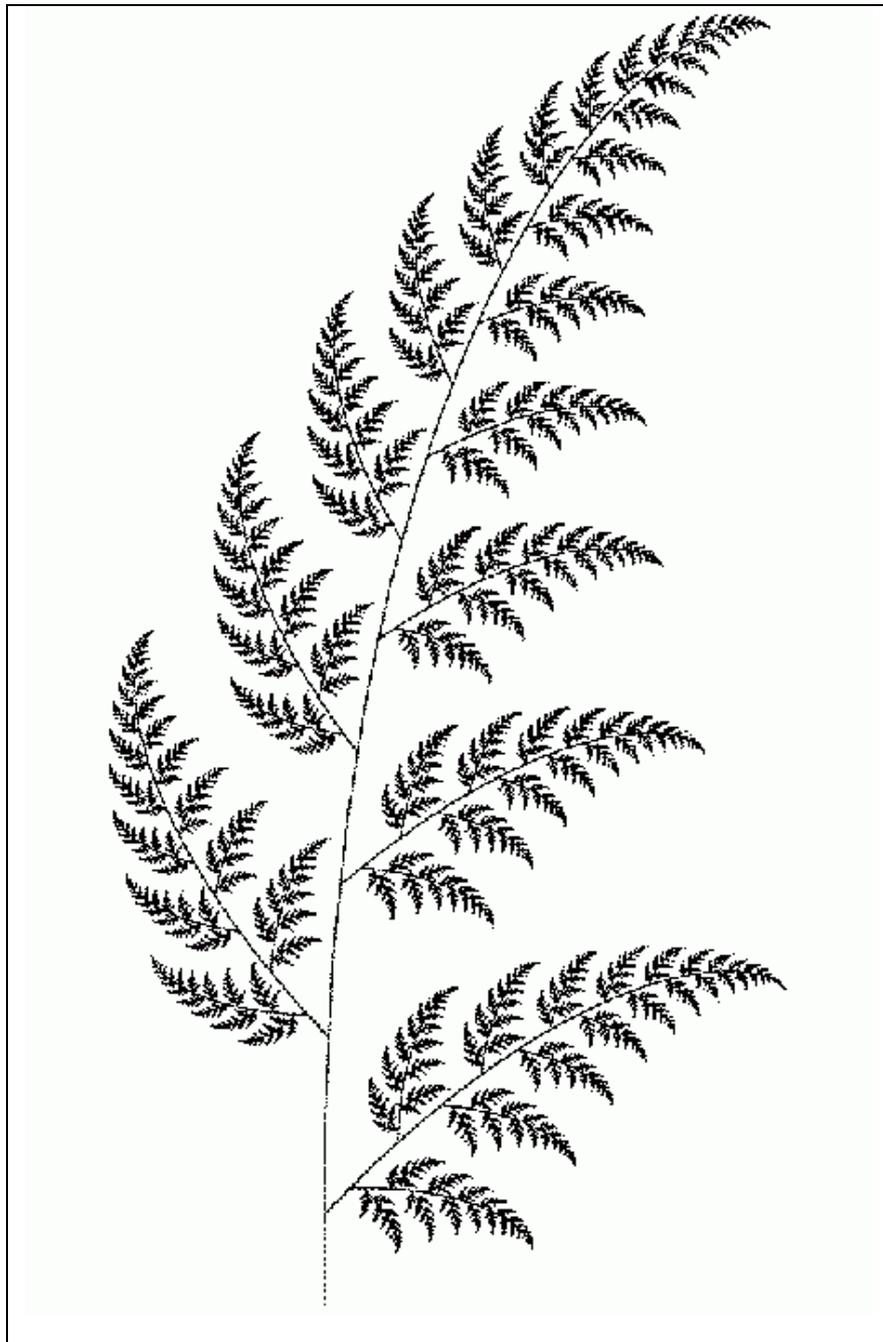


→ Konstruktionen mit strikter Selbstähnlichkeit wirken oft "künstlich"

Gründe:

- stets gleiche Winkel
- gleiche Längenverhältnisse beim Übergang von einer Iterationsordnung zur nächsten
- fehlende Zufallseffekte (Varianzen)
- Konstruktionsprinzip wird zu offensichtlich

nur in Spezialfällen wirken solche Objekte "natürlich":
Beisp. Barnsley-Farn



Fraktalität

Ursprung des Begriffs aus der Dimensionstheorie

Fraktale als geometrische Objekte, denen gemäß ihrer Flächen- bzw. Raumauffüllung eine "gebrochene Dimension" zugeordnet werden kann

"fraktale Dimension" als Eigenschaft, die analysiert (gemessen) werden kann

⇒ impliziert *kein* bestimmtes Syntheseverfahren für Objekte!

Vorsicht:

manchmal "Fraktal" einfach als Synonym für "verzweigte Struktur" gebraucht – Missbrauch der Terminologie!

Anwendungen der fraktalen Analyse:

Physik, Chemie, Geografie, Meteorologie, Physiologie

Präzisierung des fraktalen Dimensionsbegriffs:

nicht trivial

ca. 10 verschiedene Dimensionsbegriffe in der math. Literatur

wichtigste davon:

- "Selbstähnlichkeits-Dimension" – nur für strikt selbstähnliche Objekte
- Hausdorff-Dim.: math. allgemeinste Version
- Box-counting-Dim.: häufig praktisch angewandt

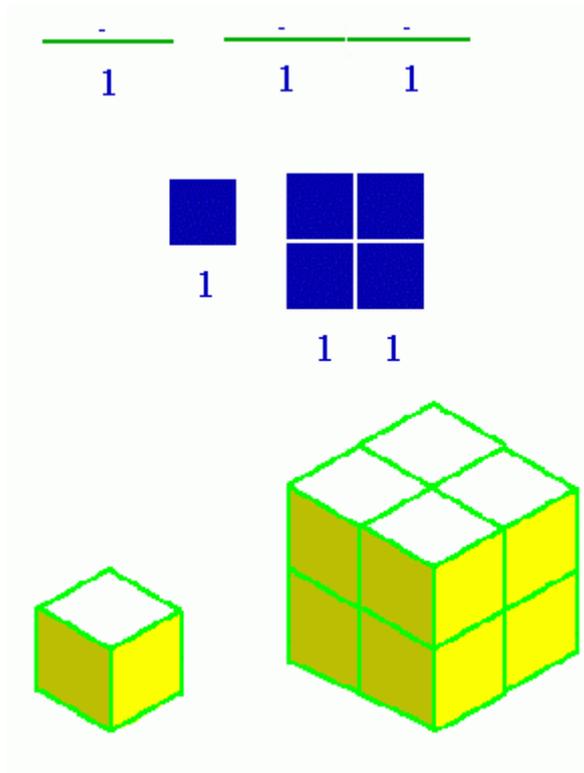
Selbstähnlichkeits-Dimension:

beschreibt Beziehung zwischen Anzahl der Teile, in die ein Objekt zerlegt werden kann, und dem Skalierungsfaktor der entsprechenden Selbstähnlichkeits-Transformationen

Beispiel: klassische, euklidische Objekte:

auch diese lassen Selbstähnlichkeiten zu

z.B. beim Quadrat Einteilung in 4 Unter-Quadrate



Strecke:

$$\begin{aligned} \text{Anzahl der Teile} = N &= 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \\ \text{Skalierungsfaktor} = r &= 1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \dots \\ \Rightarrow (\log N) / \log (1/r) &= 1 \end{aligned}$$

Quadrat:

$$\begin{aligned} N &= 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad \dots \\ r &= 1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \dots \\ \Rightarrow (\log N) / \log (1/r) &= 2 \end{aligned}$$

Würfel:

$$\begin{aligned} N &= 1 \quad 8 \quad 27 \quad 64 \quad \dots \\ r &= 1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \dots \\ \Rightarrow (\log N) / \log (1/r) &= 3 \end{aligned}$$

Koch-Kurve:

$$\begin{aligned} N &= 1 \quad 4 \quad 16 \quad 64 \quad \dots \\ r &= 1 \quad 1/3 \quad 1/9 \quad 1/27 \quad \dots \\ \Rightarrow (\log N) / \log (1/r) &= (\log 4) / \log 3 = 1,2619\dots \end{aligned}$$

Selbstähnlichkeits-Dim. $D = (\log N) / \log (1/r)$.

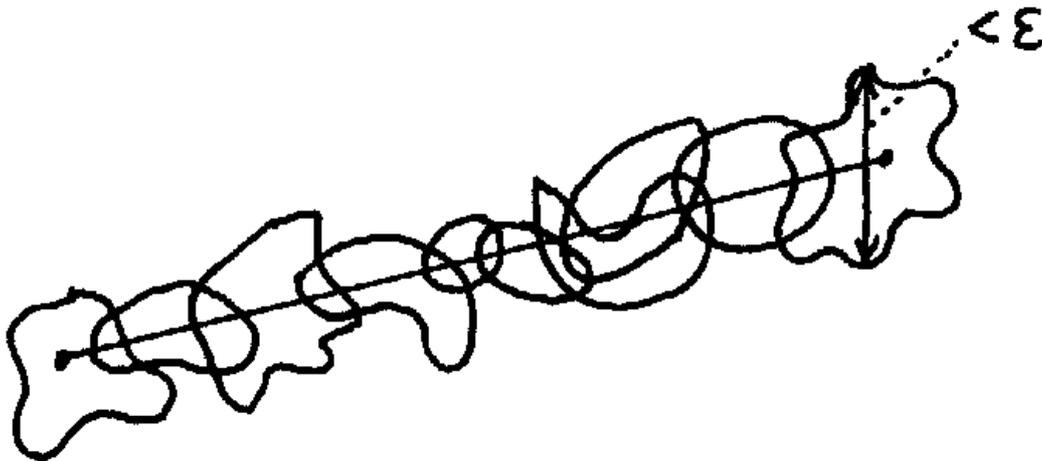
Selbstähnlichkeits-Dim. nur unter sehr einschränkenden Bedingungen definiert

zur Hausdorff-Dim.:

Hilfsbegriffe

- $d(x, y)$ bezeichne den (euklidischen) Abstand zweier Punkte im \mathbb{R}^n
- für eine Teilmenge U von \mathbb{R}^n sei $\text{diam}(U) = \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in U \}$ der "Durchmesser von U " (kleinste obere Schranke aller Abstände in U)
- eine offene, abzählbare Überdeckung von U ist eine Menge nichtleerer, offener Teilmengen $\{U_1, U_2, \dots\}$ von \mathbb{R}^n derart, dass U ganz in der Vereinigung aller U_i enthalten ist.

Beisp.: Überdeckung einer Strecke im \mathbb{R}^2 mit Mengen, deren Durchmesser $< \varepsilon$ sind:



Man def. zu gegebenen Zahlen s und $\varepsilon > 0$ und zu $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$h_{s, \varepsilon}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s \mid \{U_1, U_2, \dots\} \text{ offene, abz. Überdeckung von } A \text{ mit } \text{diam}(U_i) < \varepsilon \right\}$$

Die Reihen können endlichen oder unendlichen Wert haben.
 Je kleiner ε gewählt wird, desto kleiner wird die Gesamtheit der betrachteten Überdeckungen, desto größer also das Infimum
 \Rightarrow für $\varepsilon \rightarrow 0$ strebt $h_{s,\varepsilon}(A)$ gegen einen Grenzwert (dieser kann auch ∞ sein):

$$h_s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{s,\varepsilon}(A)$$

$h_s(A)$ heißt "s-dimensionales Hausdorff-Maß" der Menge A .

Spezialfälle:

- $h_1(A)$ = Länge einer glatten Kurve A
- $h_2(A)$ = (bis auf konstanten Faktor) Flächeninhalt einer glatten Fläche A
- $h_3(A)$ = (bis auf konst. Faktor) Volumen einer glatten 3D-Mannigfaltigkeit.
- Aber: $h_s(A)$ ist auch für nicht-ganzzahliges s definiert!

Es gilt:

Für jede Menge A gibt es eine Zahl $D_H(A)$, so dass

$$h_s(A) = \infty \quad \text{für } s < D_H(A),$$

$$h_s(A) = 0 \quad \text{für } s > D_H(A).$$

Das s-dim. Maß liefert also nur für ein einziges s "sinnvolle", nichttriviale Werte (nämlich für $s = D_H(A)$).

Diese Zahl $D_H(A)$ ist die *Hausdorff-Dimension* von A .

Somit: $D_H(A) = \inf \{ s \mid h_s(A) = 0 \} = \sup \{ s \mid h_s(A) = \infty \}$.

Eigenschaften der Hausdorff-Dimension:

- Wenn $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist $D_H(A) \leq n$.
- Wenn $A \subseteq B$, dann ist $D_H(A) \leq D_H(B)$.
- Wenn A abzählbare Menge ist, dann ist $D_H(A) = 0$.
- Wenn $D_H(A) < 1$ ist, dann ist A total unzusammenhängend.
- Für klassische, strikt selbstähnliche Fraktale (z.B. Koch-Kurve, Sierpinski-Dreieck) ist D_H identisch mit der Selbstähnlichkeitsdimension.

Box-counting-Dimension (oder *Box-Dimension*):

Hausdorff-Dim. i. allg. schwierig zu bestimmen

⇒ man begnügt sich meist mit einer vereinfachten Dimensions-Def. für beschränkte Mengen A :

Sei $N_\delta'(A)$ die kleinste Anzahl von Mengen mit einem Durchmesser von höchstens δ , die A überdecken. Dann sei

$$D_b(A) = \lim_{(\delta \rightarrow 0)} (\log N_\delta'(A)) / \log(1/\delta)$$

die *Box-Dimension* von A , vorausgesetzt, der Grenzwert existiert.

Äquivalente Def., die leichter praktisch einzusetzen ist:

Sei A mit einem Gitter der Maschenweite δ überzogen und sei $N_\delta(A)$ die Anzahl der Gitterzellen (Würfel), die A schneiden.

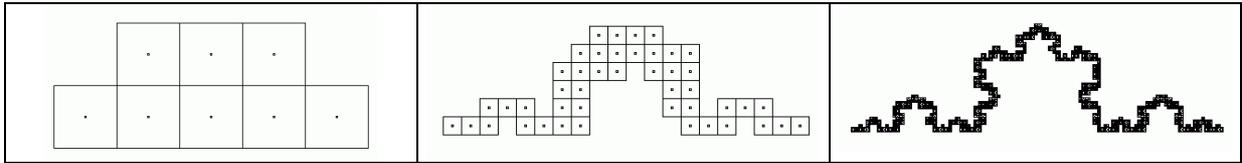
Dann ist

$$\begin{aligned} D_b(A) &= \lim_{(\delta \rightarrow 0)} (\log N_\delta(A)) / \log(1/\delta) \\ &= - \lim_{(\delta \rightarrow 0)} (\log N_\delta(A)) / \log \delta. \end{aligned}$$

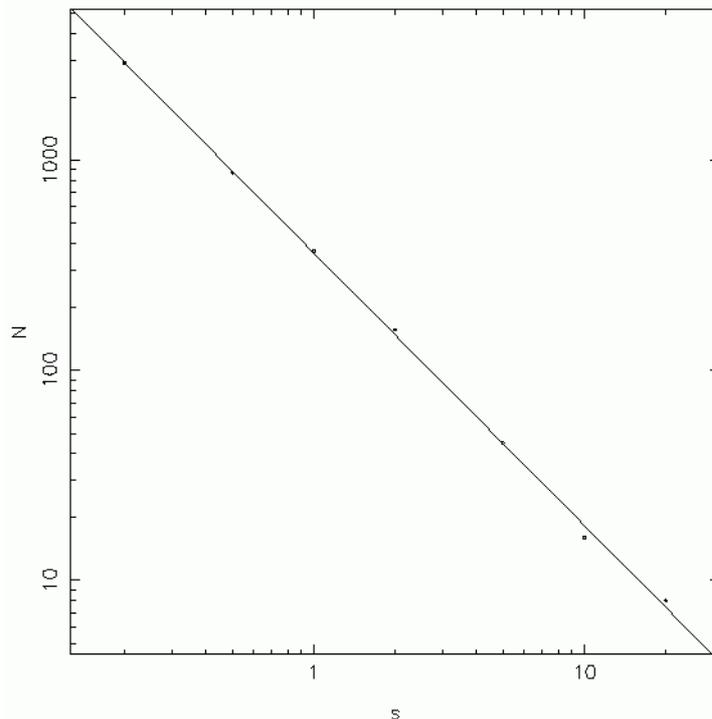
Empirische Ermittlung der Box-Dimension:

Man überzieht die Menge A mit Gittern abnehmender Maschenweite δ und zählt jedesmal die Gitterzellen, die geschnitten werden (Teile von A enthalten). Die resultierenden Anzahlen werden in einem doppelt-logarithmischen Diagramm gegen δ aufgetragen (im Beispiel unten: s statt δ und N statt $N_\delta(A)$.) Wenn A fraktale Struktur hat, sollte sich näherungsweise eine Gerade ergeben. Ihre Steigung, mit umgekehrtem Vorzeichen, ist dann die Box-Dimension von A .

Beispiel Koch-Kurve: Überdeckung mit verschiedenen Quadratgittern



Resultierendes Seitenlänge-Anzahl-Diagramm
(beachte: beide Achsen logarithmisch):



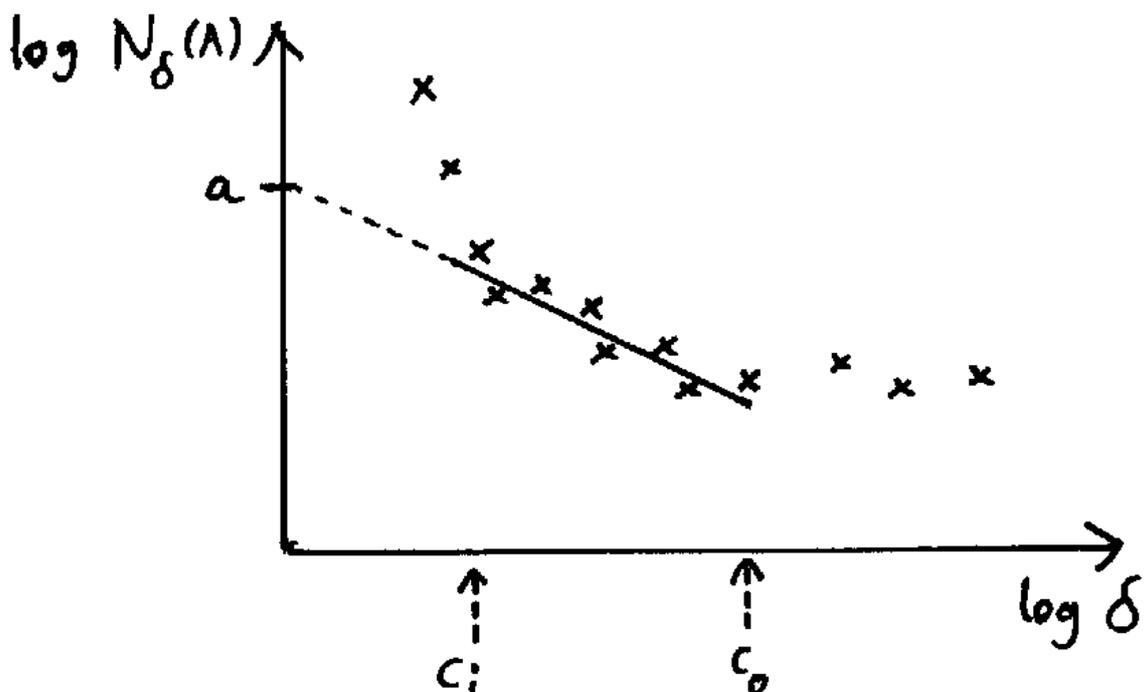
resultierende Steigung: ca. $-1,26$, entspricht der Selbstähnlichkeits-Dim. (s.o.) mit neg. Vorzeichen.

Eigenschaften der Box-Dimension:

- einfach zu ermitteln
- keine Voraussetzungen an die betrachtete Menge (außer Beschränktheit)
- Rasterungen mit verschiedenen Maschenweiten werden sowieso oft gebraucht
- stimmt meistens mit der Hausdorff-Dim. überein (aber nicht immer: z.B. Menge der rationalen Zahlen in $[0, 1]$ hat Hausdorff-Dim. 0, aber Box-Dim. 1).

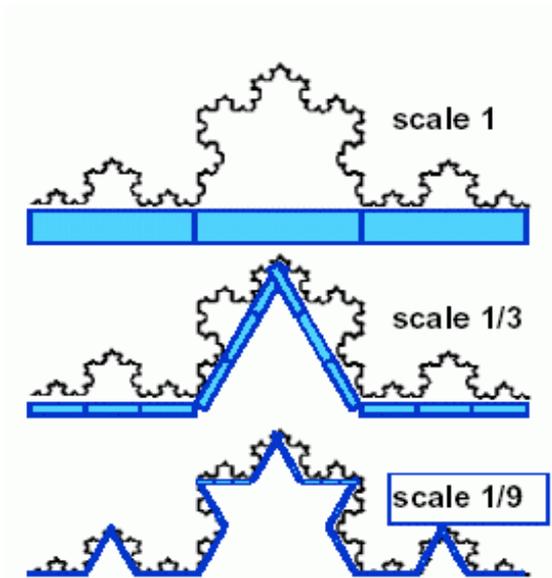
Probleme bei der Bestimmung der Box-Dimension "realer" Objekte (Wolken, Bäume, Landschaften, Kolloide...):

- es ergibt sich im log-log-Plot nicht immer eine Gerade (Vorschlag von Rigaut 1987: "Semifraktale" bei nichtlinearen, aber gesetzmäßigen Verläufen)
- es existieren obere und untere Skalengrenzen, wo sich das Raumfüllungsverhalten der Struktur ändert: "inner cutoff" c_i und "outer cutoff" c_o
- wie bestimmt man diese kritischen Schranken?
- bei Bestimmung der Box-Dim. als Geradensteigung kommt als weiterer Parameter noch ein Interzept a hinzu
- man kann N nur für endlich viele Gitter-Maschenweiten bestimmen: für welche?
 - statistische Probleme, da die Messungen für die einzelnen Maschenweiten nicht stochastisch unabhängig voneinander sind
- weiterer Parameter: Korrelationskoeffizient

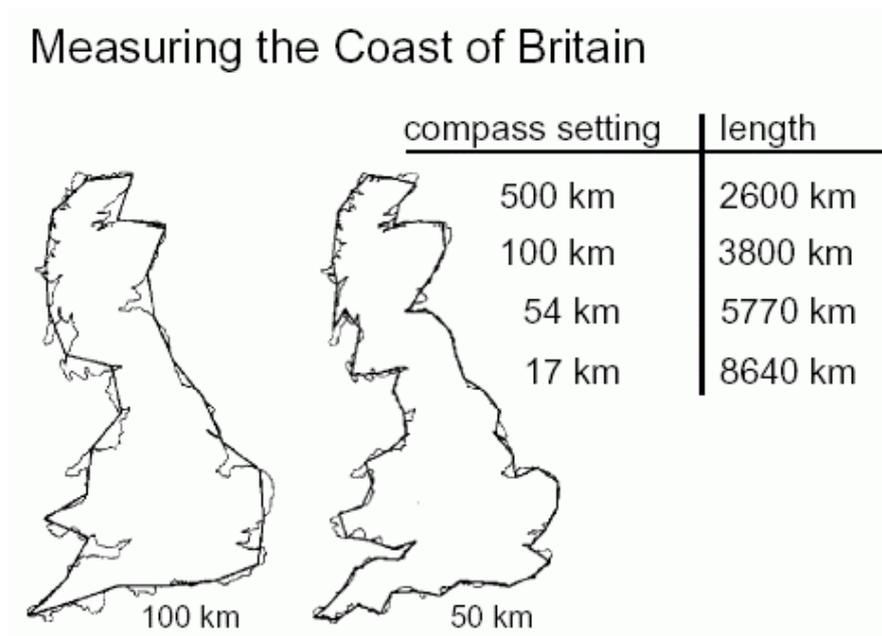


weitere Messmethoden zur Dimensionsbestimmung:

- Richardson Plot Method
Umfahren des (in die Ebene eingebetteten Objekts) mit einem Lineal vorgegebener Länge
Umfang des approximierenden Polygons ändert sich gesetzmäßig mit der Lineal-Länge
Steigung im log-log-Plot = Dimension



klassisches Beispiel: Länge der Küste von Großbritannien



- Auswertung einer Radius-Anzahl-Relation:

i. Ggs. zur Richardson-Plot-Methode ist die Länge der approximierenden Polygonkanten hier fest (z.B. die kleinstmögliche Auflösung der Messung)
 es wird (doppelt log.) aufgetragen, wieviele Bauelemente (Polygonkanten) in einem Kreis mit Radius r um ein festes Element liegen (Steigung = fraktale Dim.)

- indirekte Bestimmung aus dem Porenvolumen

$$V_p(r) = c \cdot ((D_f - D_t) / (D_e - D_t))^{(D_e - D_t)} \cdot r^{(D_e - D_f)}$$

darin ist r der Porenradius

D_f die gesuchte fraktale Dim.

D_e die Einbettungsdimension (3 oder 2)

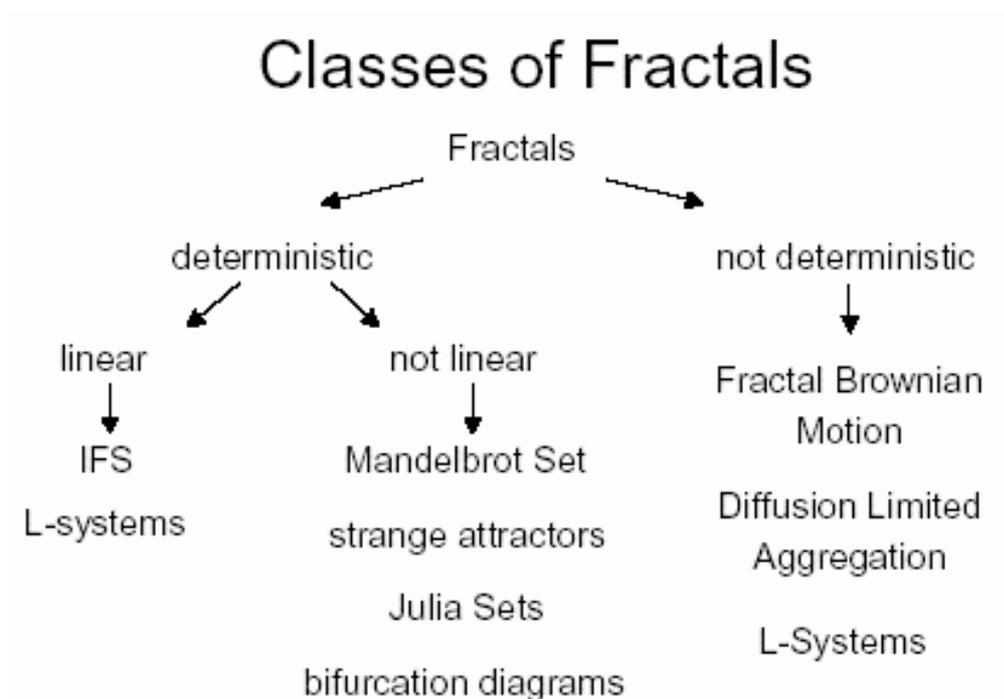
D_t die topologische Dim. des Objekts (2 oder 1)

(Anwendung in der Chemie heterogener Substanzen)

- und weitere indirekte Methoden

Typen von Fraktalen

häufige Klassifikation: nach der Art ihrer Erzeugung



klassische Beispiele für Fraktale aus der Mathematik:
Julia-Mengen und die Mandelbrot-Menge

Julia-Mengen schon in den 20er Jahren des 20. Jh. bekannt, aber erste korrekte Visualisierungen erst Ende der 70er Jahre ("Wiederentdeckung" durch Mandelbrot, gefeierte Grafik-Ausstellung von Peitgen et al.)

Julia-Mengen beruhen auf iterierten *nichtlinearen* Funktionen in der komplexen Zahlenebene

am häufigsten verwendet:

das quadratische Polynom $f(z) = z^2 + c$ ($c \in \mathbb{C}$)

Iteriertenfolge: $z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \dots$

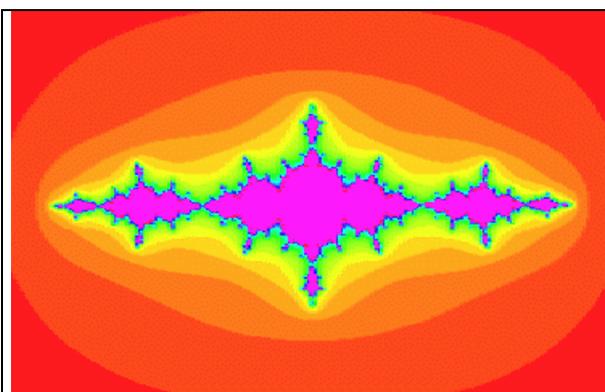
zu gegebenem $c \in \mathbb{C}$ def. man:

- Fluchtmenge von c : Menge aller Startwerte z , für die die Werte der Iteriertenfolge dem Betrage nach unbeschränkt wachsen (d.h. jeden Kreis um den Ursprung irgendwann verlassen)
- Gefangenenmenge J_G von c : Menge aller Startwerte z , für die die Iteriertenfolge beschränkt bleibt

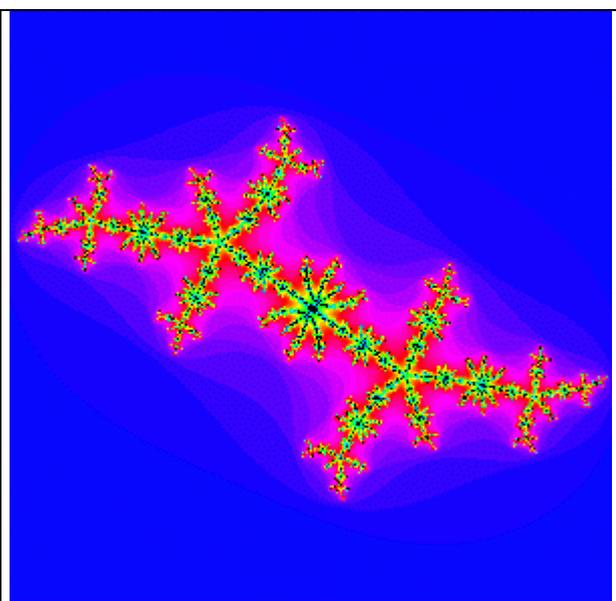
die Fluchtmenge kann zusätzlich gefärbt werden mit einem Maß für die Geschwindigkeit der Divergenz (etwa den Betrag nach 10 Iterationsschritten).

Julia-Menge von c : $\partial J_G = \text{Rand der Gefangenenmenge von } c$
= Rand der Fluchtmenge von c .

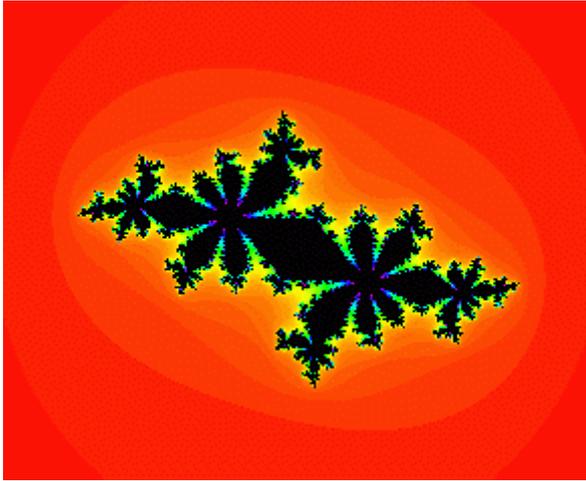
Beispiele:



(die Gefangenenmenge ist hier violett dargestellt)



(hier ist sie schwarz)



Julia-Mengen sind in einem schwächeren Sinn selbstähnlich als die bisher betrachteten Fraktale: Invarianz unter *nichtlinearen* Transformationen! (nämlich unter $f, f^{\circ}f, \dots$)

Visualisierung von Julia-Mengen:

Boundary-Scanning-Algorithmus

- wähle ein geeignetes quadratisches Gitter (z.B. in der Größenordnung der Bildschirmauflösung), überdecke damit einen Bereich, der alle z mit $|z| > \max(|c|, 2)$ umfasst enthält eine Gitterzelle Teile der Julia-Menge, so enthält sie sowohl Punkte mit beschränkter als auch Punkte mit unbeschränkter Iteriertenfolge
- zur Vereinfachung betrachtet man nur Eckpunkte von Gitterzellen G
- wenn für alle 4 Eckpunkte von G die Iteriertenfolge unbeschränkt ist:
 - nehme an, dass die ganze Zelle G zur Fluchtmenge (und nicht zur Julia-Menge) gehört
- sonst: G enthält Punkte der Gefangenenmenge, wird mit vorgegebener Farbe gefärbt

Unterprozedur: Prüfung der Beschränktheit der Iteriertenfolge:
iteriere f , bis maximale Iterationszahl N_{\max} erreicht ist oder der Betrag eines während der Iteration berechneten Punktes größer als $\max(|c|, 2)$ ist. (Im ersten Fall wird die Folge als beschränkt angenommen, im zweiten Fall ist sie unbeschränkt).

Level-Set-Methode

Die Gefangenenmenge liegt innerhalb eines Kreises S_0 mit Radius $\max(|c|, 2)$ um den Ursprung: S_0 als erste Approximation.

k -te Approximation: $S_k = \{ z \mid f^k(z) \in S_0 \}$, k -ter *level set*

Die Folge der Mengen S_k konvergiert gegen die Gefangenenmenge (ausgefüllte Julia-Menge).

Die Elemente von $S_k - S_{k-1}$ benötigen dieselbe Zahl von Iterationsschritten, um in das Komplement von S_0 zu gelangen.

Algorithmus: ordne jedem Pixel eines geeignet feinen Gitters einen ganzzahligen *level* zu:

$$L(z) = k, \text{ falls } f^k(z) \notin S_0 \text{ und } f_{k-1}(z) \in S_0; \quad 0 \text{ sonst.}$$

L heißt auch "escape time function".

Punkte mit unterschiedlichen *levels* werden unterschiedlich gefärbt; die schwarz bleibenden Punkte gehören zur Gefangenenmenge.

Die Mandelbrot-Menge ("Apfelmännchen")

"der komplexeste Gegenstand der Mathematik" (John Hubbard)

erstmalig beschrieben von Mandelbrot 1978

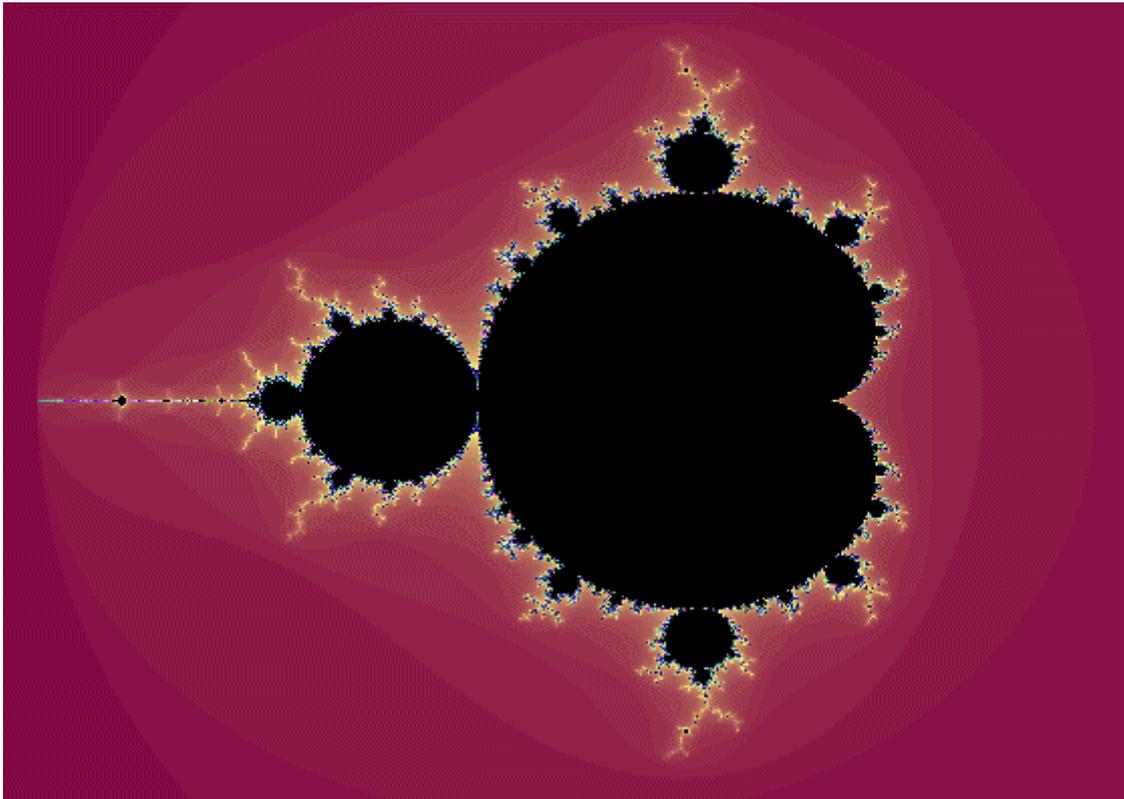
Def.: $M = \{ c \in \mathbb{C} \mid \text{die Folge } 0, f(0), f^2(0), \dots \text{ ist beschränkt} \}$.

Gleichwertige Def.:

$M = \{ c \in \mathbb{C} \mid \text{die Julia-Menge von } c \text{ ist zusammenhängend} \}$.

Eigenschaften von M :

- M ist symmetrisch zur reellen Achse (x -Achse)
- M ist beschränkt (durch $|c| \leq 2$) und abgeschlossen
- der reelle Anteil von M ist das Intervall $[-2; 1/4]$
- M ist zusammenhängend
- ∂M ist ein Fraktal mit Hausdorff-Dim. 2 (M. Shishikura)
- M enthält unendlich viele kleine "näherungsweise" Kopien von sich selbst
- in der Umgebung jedes Punktes c hat M "Ähnlichkeit" mit der Julia-Menge von c

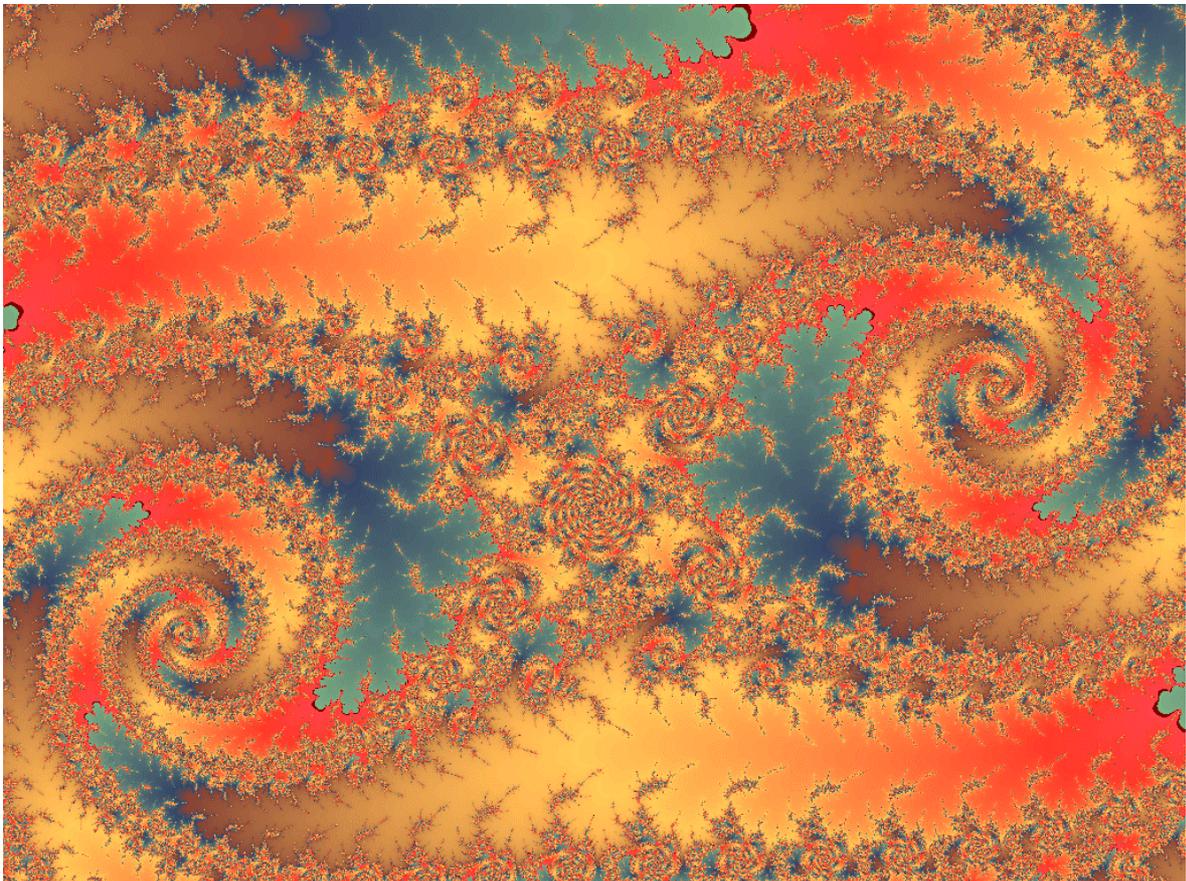
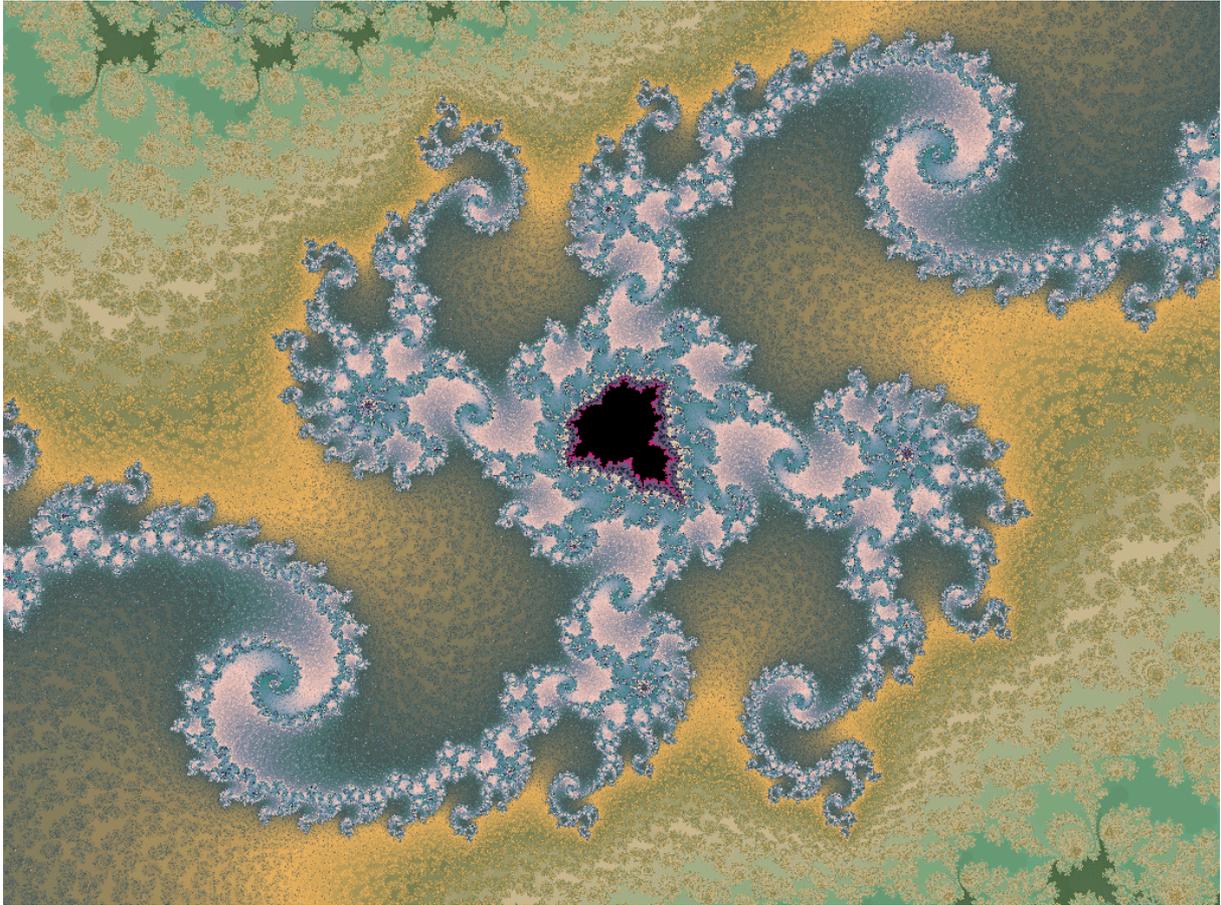


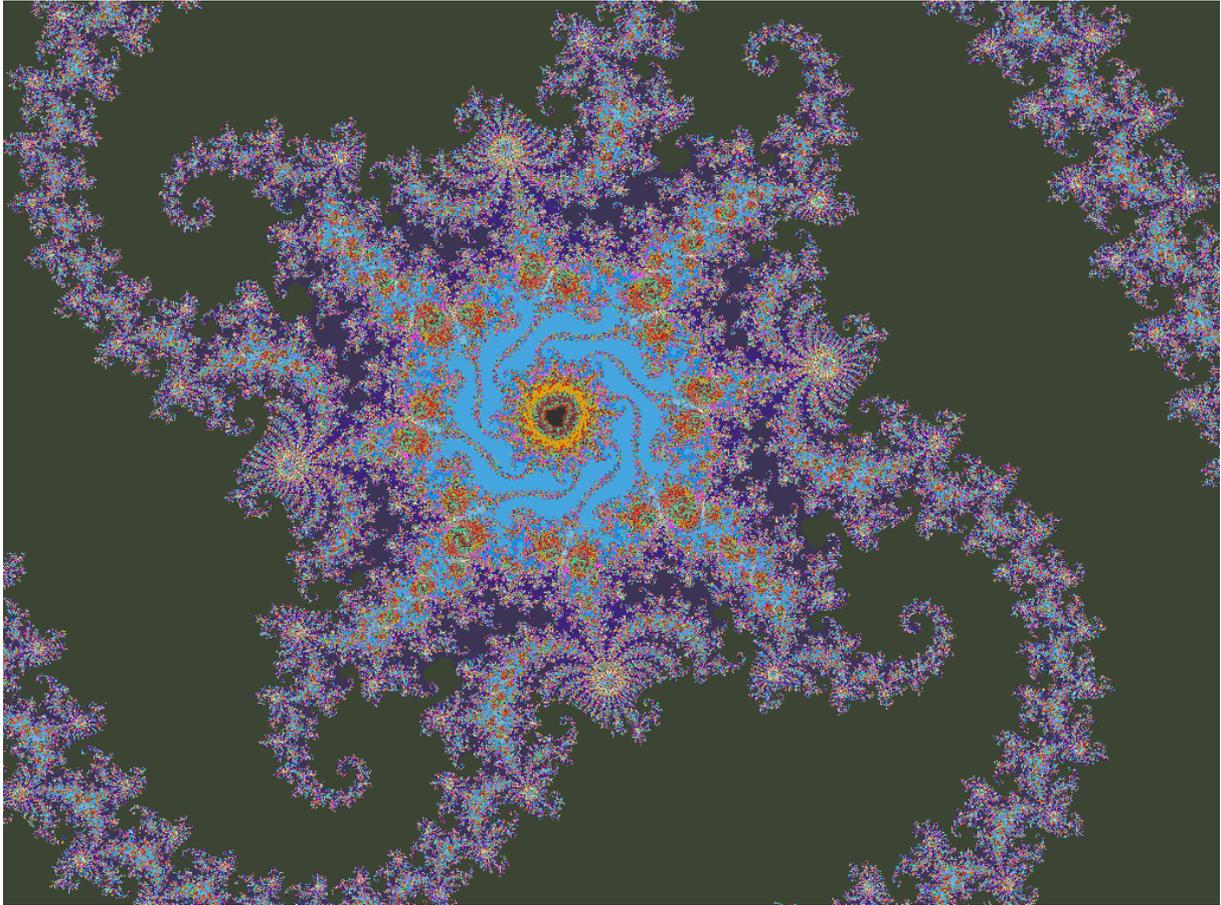
Level-Set-Methode zur Visualisierung der Mandelbrot-Menge
(analog zur Level-Set-Methode für Julia-Mengen):

man untersucht, für welche Werte von c die Iteriertenfolge der 0 beschränkt bleibt

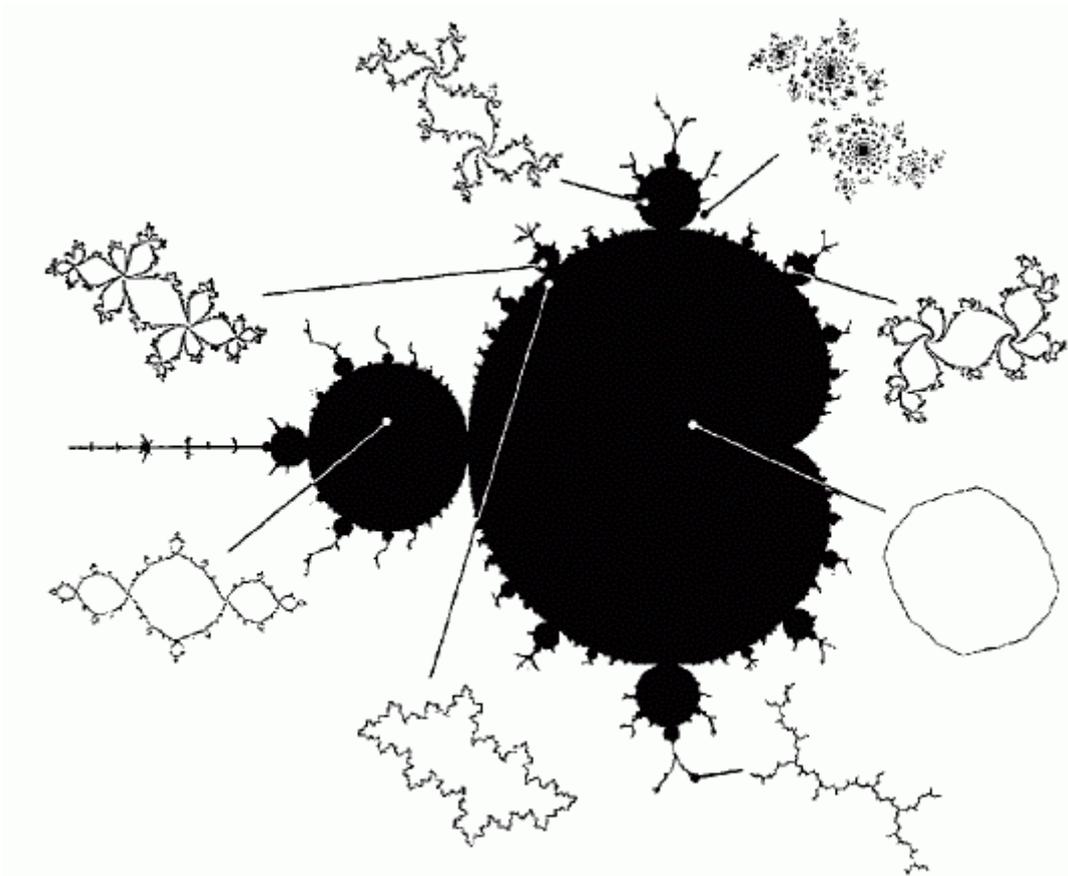
- bestimme Anzahl der Iterationen, die nötig sind, um eine bestimmte Zielmenge um ∞ zu erreichen
- für Werte in M ist diese Zahl unendlich groß, d.h. man bricht nach vorgegebener Höchstzahl von Schritten ab
- für Werte $c \notin M$ ist die Zahl der Iterationen endlich und kann zur Farbdefinition für das Außengebiet verwendet werden

die folgenden "Zooms" in die Mandelbrot-Menge beruhen i. wesentl. auf dieser Methode





Beziehungen zu den Julia-Mengen:

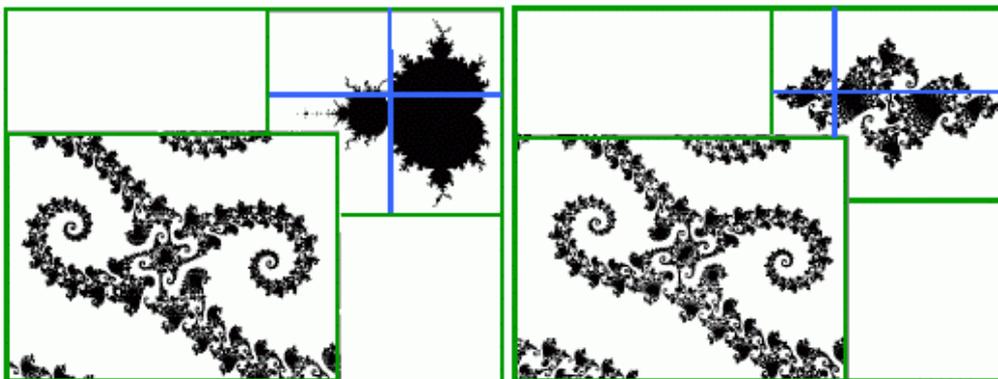


Mandelbrot und Julia Set Explorer (interaktiv):

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/julia/explorer.html>

<http://www.unca.edu/~mcmclur/java/Julia/>

lokale Ähnlichkeit zur Julia-Menge:



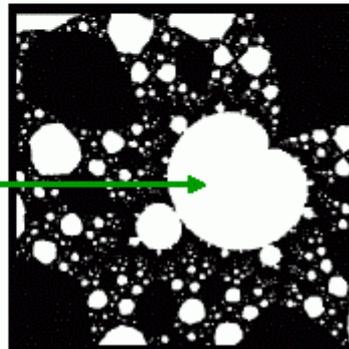
Die Mandelbrot-Menge taucht auch bei anderen Funktionen als $f(z) = z^2 + c$ auf:

Structural Stability of M

Example: $\{C, r_c\}$ $r_c = ((z^2 + c - 1) / (2z + c - 2))^2$

- r_c describes magnetic phase transitions
- Attractive fixpoints: $1, \infty$
- Examine the orbit $0 \rightarrow r_c(c) \rightarrow r_c^2(c) \rightarrow \dots$ for all c and draw a map

What does M there ?



Verschiedene Methoden zur effizienteren Visualisierung von M wurden vorgeschlagen, u.a. adaptive Quadtree-Partitionierung:

