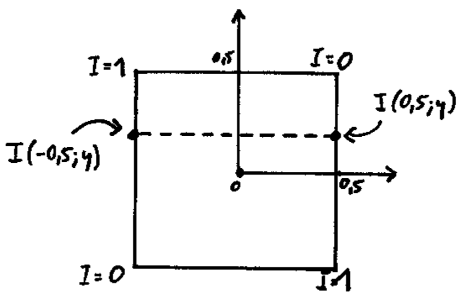
Aufgabe 4

(a) linke Lage (achsenparalleles Quadrat):



Lineare Interpolation der Intensitätswerte entlang der horizontalen Scanlinie liefert

$I(x, y) = (0{,}5-x)\cdot I(-0{,}5;\, y) + (0{,}5+x)\cdot I(0{,}5;\, y)$

$\quad = (0{,}5-x)\cdot(0{,}5+y) + (0{,}5+x)\cdot(0{,}5-y)$

$\quad = 0{,}5 - 2xy \;=\; -2xy + 1/2.$

$I(x, y) = c \;\Leftrightarrow\; xy = \frac{1}{4} - \frac{c}{2}$, für $x \neq 0$ also: $y = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{c}{2}}{x}$ (nullpunktsymmetrische Hyperbel, wenn Zähler $\neq 0$).

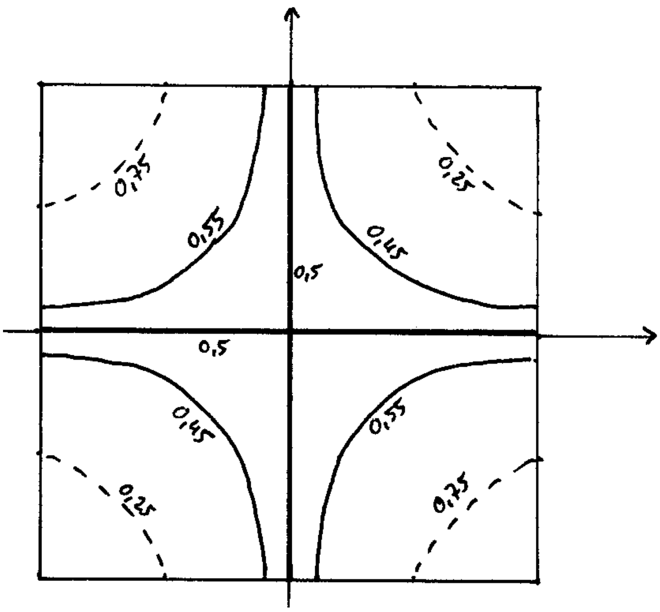
$c = 0{,}25$: $y = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}}{x} = \dfrac{1}{8x}$ (gestrichelt, 1. und 3. Quadrant)

$c = 0{,}45$: $y = \dfrac{0{,}025}{x} = \dfrac{1}{40x}$ (durchgezogen, 1. und 3. Quadrant)

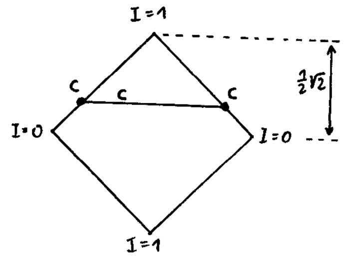
$c = 0{,}55$: $y = -\dfrac{0{,}025}{x} = -\dfrac{1}{40x}$ (durchgezogen, 2. und 4. Quadrant)

$c = 0{,}75$: $y = -\dfrac{1}{8x}$ (gestrichelt, 2. und 4. Quadrant)

$c = 0{,}5$: $xy = 0$, also $x = 0$ oder $y = 0$: die beiden Koordinatenachsen.

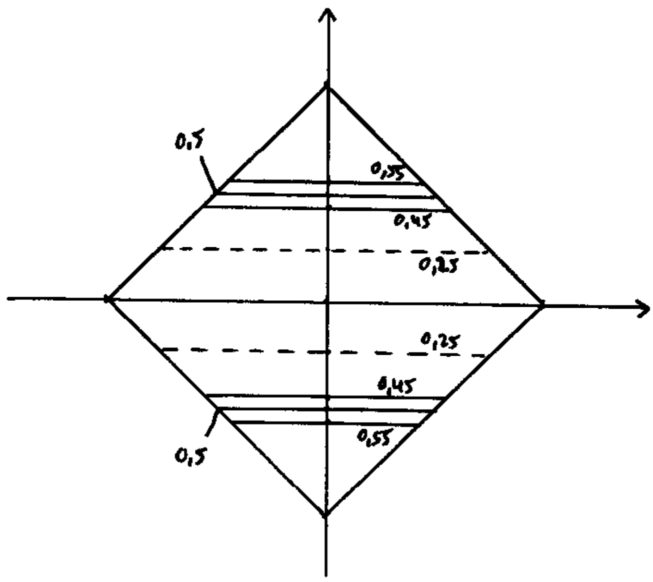


rechte Lage (um 45° gedrehtes Quadrat):
an den Enden der Scanlinien gelten dieselben Intensitäten $\Rightarrow$ die interpolierten Intensitäten auf den Scanlinien sind konstant; die Scanlinien sind auch die Isolinien.

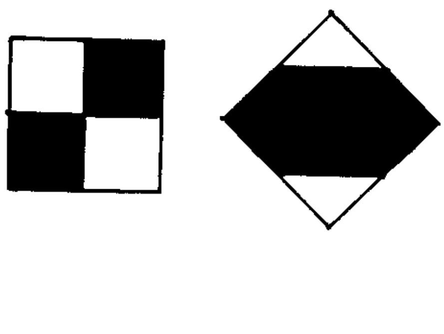


Gleichung der Scan- (Iso-) Linien: $y = \pm c \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$.

Zeichnung:



(b)



Prozentualer schwarzer Flächenanteil: links 50 %, rechts 75 %.

Aufgabe 5

(a) Parametergleichung des Strahls Q:

$$P + ta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 6-2t \end{pmatrix} \quad , t \geq 0.$$

Gleichung der Kugel K: $(x–4)^2 + (y–2)^2 + z^2 = r^2 = 4$.
Einsetzen von Q in die Gleichung von K liefert:

$(2t – 4)^2 + (t – 2)^2 + (6 – 2t)^2 = 4$

$\Leftrightarrow\ 9t^2 – 44t + 52 = 0$

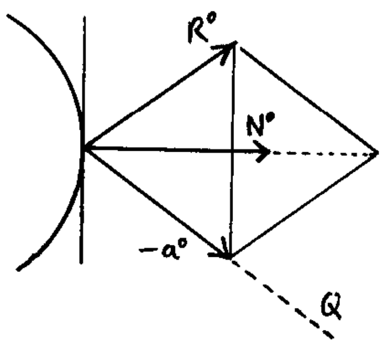
$\Leftrightarrow\ t^2 - \frac{44}{9}t + \frac{52}{9} = 0$

$\Leftrightarrow\ t_{1,2} = \frac{22}{9} \pm \sqrt{\frac{484}{81} - \frac{52}{9}} = \frac{22}{9} \pm \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{22}{9} \pm \frac{4}{9}$

$t_1 = 22/9 – 4/9 = 18/9 = 2$ liefert den zu P nähergelegenen Schnittpunkt:

$$S = P + 2a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) $N = S - M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist der nach außen weisende Normalenvektor an die Kugel K im Punkt S.



Übergang zu normierten Vektoren (es bezeichne $x^0 = \frac{x}{\|x\|}$):

$$R^0 = 2\left(N^0 \bullet (-a^0)\right)N^0 - (-a^0)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung des reflektierten Strahls an.

(Anschaulich: der Strahl wird reflektiert an einer Tangentialebene, die senkrecht zur z-Achse steht, also parallel zur xy-Ebene verläuft $\Rightarrow$ die Richtung in der xy-Komponente ändert sich nicht, die z-Komponente kehrt sich um.)