

## Seltsame Attraktoren (*strange attractors*)

= weiterer Typ von Fraktalen, entsteht im Zusammenhang mit dynamischen Systemen / Chaostheorie

*dynamisches System:*

- *Phasenraum* = Menge aller möglichen Zustände des Systems
- *Regel* = Rechenvorschrift, die angibt, wie sich der Zustand des Systems zeitabhängig verändert (Dynamik des Systems)

als Regeln häufig verwendet: Differentialgleichungen (kontinuierliches Modell); Funktion, die iteriert angewandt wird (diskretes Modell: Zustände werden nur an abzählbar vielen Zeitpunkten betrachtet).

Beispiel:

Pendel. Zustand: beschrieben durch Position und Geschwindigkeit (2D-Phasenraum  $(x, v)$ ). Regel: Pendelgesetz aus der Mechanik.

implizite Annahme in der Theorie dynamischer Systeme:  
wenn ein beliebiger Anfangszustand *exakt* bekannt ist, lassen sich *prinzipiell* alle zukünftigen Zustände des Systems berechnen.

*Orbit* eines Punktes im Phasenraum: Menge aller Folgezustände, die sich durch Anwendung der Regel ergeben. (bei iterierter Funktion  $f$ , also diskretes dyn. System: Orbit = Iteriertenfolge  $x, f(x), f(f(x)), \dots$ )

man unterscheidet:

- Fixpunkte  $f(x) = x$
- periodische Orbits
- Punkte, deren Orbits gegen einen Fixpunkt oder gegen einen periodischen Orbit konvergieren
- Punkte, für die das nicht der Fall ist

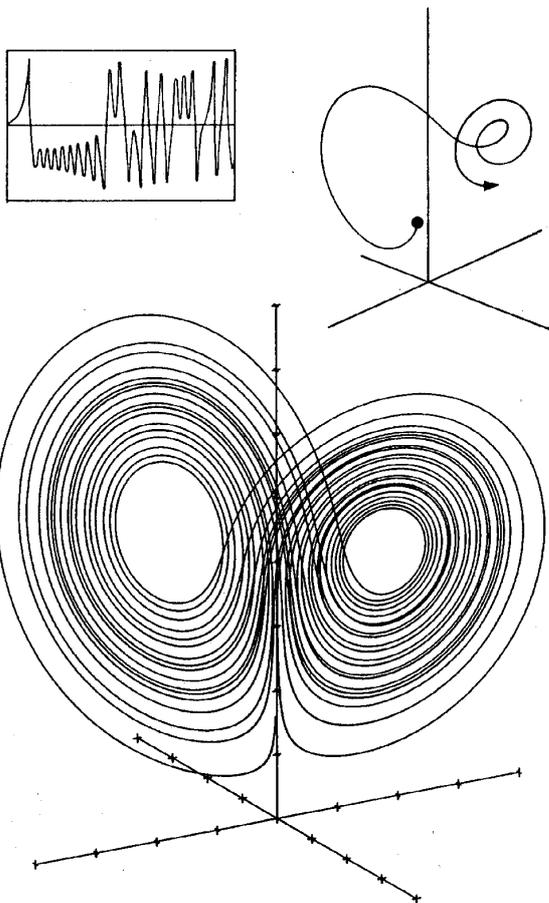
Ein *Attraktor* von  $f$  ist eine Teilmenge  $A$  des Phasenraums, für die gilt:

- $A$  ist abgeschlossen,
- $A$  ist invariant gegenüber  $f$ :  $f(A) = A$ ,
- für alle  $x$  aus einer offenen Menge, die  $A$  enthält, konvergiert der Abstand von  $f^k(x)$  zu  $A$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen 0. "Alle Punkte aus einer Umgebung von  $A$  werden von  $A$  angezogen."
- es gibt keine echte Teilmenge von  $A$ , die ebenfalls diese Bedingungen erfüllt.

Grobe Charakterisierung:

"ein Attraktor ist diejenige Menge, die man sieht, wenn Orbits mit dem Computer gezeichnet werden"

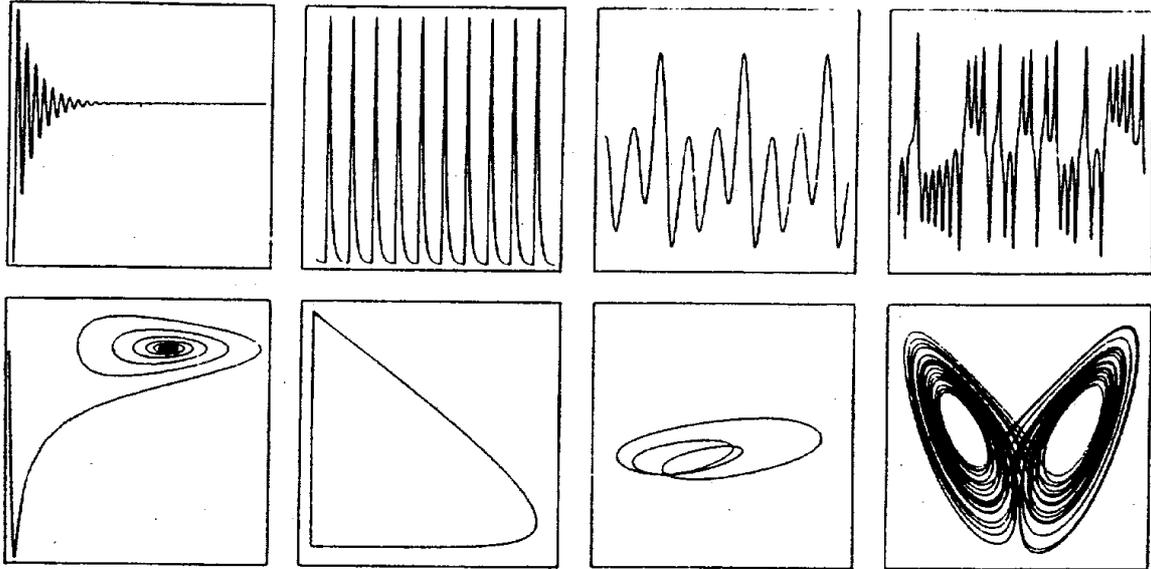
*aber:* die Verteilung der Iterierten über einen Attraktor kann sehr ungleichmäßig sein  $\Rightarrow$  bei Abbruch der Iteriertenfolge nach endlich vielen Schritten kann ein irreführendes Bild entstehen!



oben links:  
Diagramm des zeitlichen  
Verlaufs einer System-  
eigenschaft, z.B. der Ge-  
schwindigkeit

oben rechts:  
Orbit des entsprechenden  
Punktes im Phasenraum

unten: Attraktor, der den Punkt  
schließlich "einfängt"



*Abbildungen von Abläufen im Phasenraum:* Traditionelle Abläufe und Kurven (oben) und Kurven im Phasenraum (unten) sind zwei verschiedene graphische Darstellungen derselben Daten, um sich ein Bild vom Langzeitverhalten eines Systems zu machen. Das erste System (links) läuft auf einen stabilen Zustand zu, auf einen Punkt im Phasenraum. Das zweite wiederholt sich periodisch, es bildet einen zyklischen Kreislauf. Das dritte wiederholt sich einem komplexeren »Dreiviertelтакт«, also mit einem Zyklus mit der Periode »drei«. Das vierte System ist ein Chaos-System.

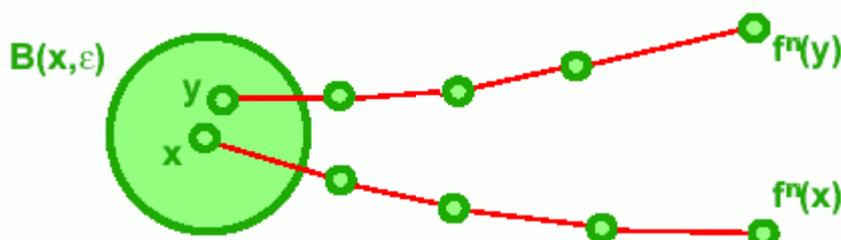
Chaotisches Verhalten dynamischer Systeme:  
entsteht durch "sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen"

präzise:

sei  $A$  der Attraktor

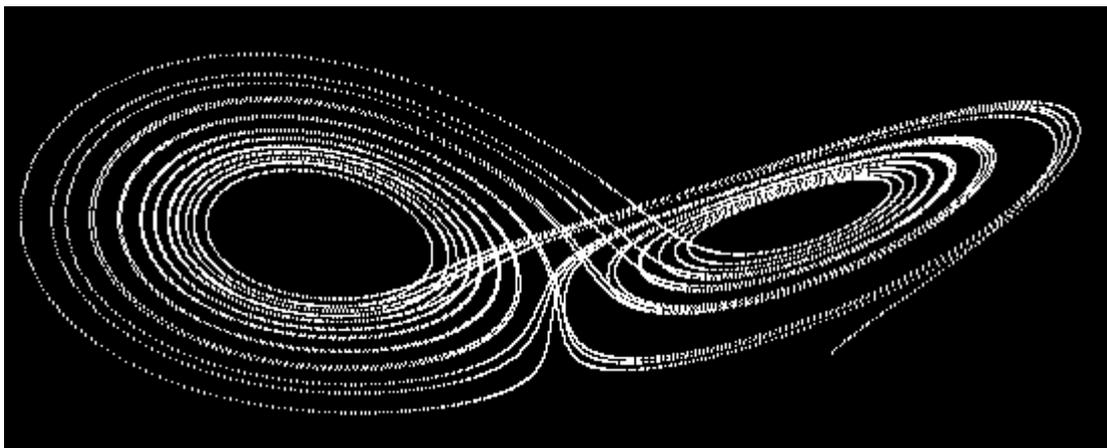
es ex.  $r > 0$ , so dass für alle  $x \in A$  und für alle  $\varepsilon > 0$  ein nahe benachbarter Punkt  $y \in A$  mit  $|x - y| < \varepsilon$  und ein  $k \in \mathbb{N}$  existieren, so dass  $|f^k(x) - f^k(y)| \geq r$  ist.

"Punkte, die anfangs nahe beieinander liegen, bleiben bzgl. der Iterierten von  $f$  nicht nahe beieinander."



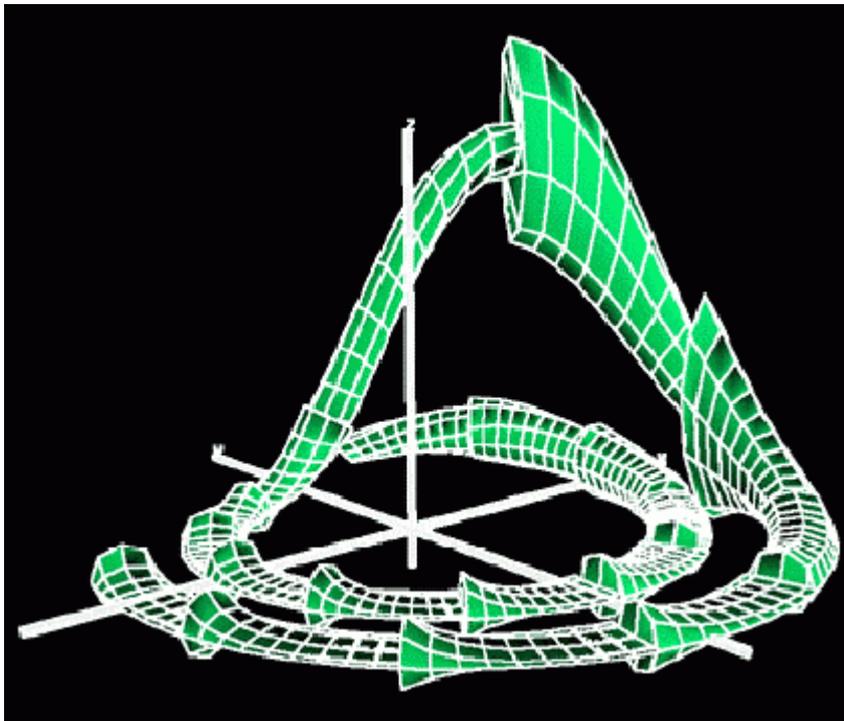
Chaos tritt häufig bei seltsamen Attraktoren auf.

Beispiel: Lorenz-Attraktor (hist. ältestes Beispiel – motiviert durch meteorologische Anwendung; Attraktor eines kontinuierlichen – durch DGL-System def. – dyn. Systems):

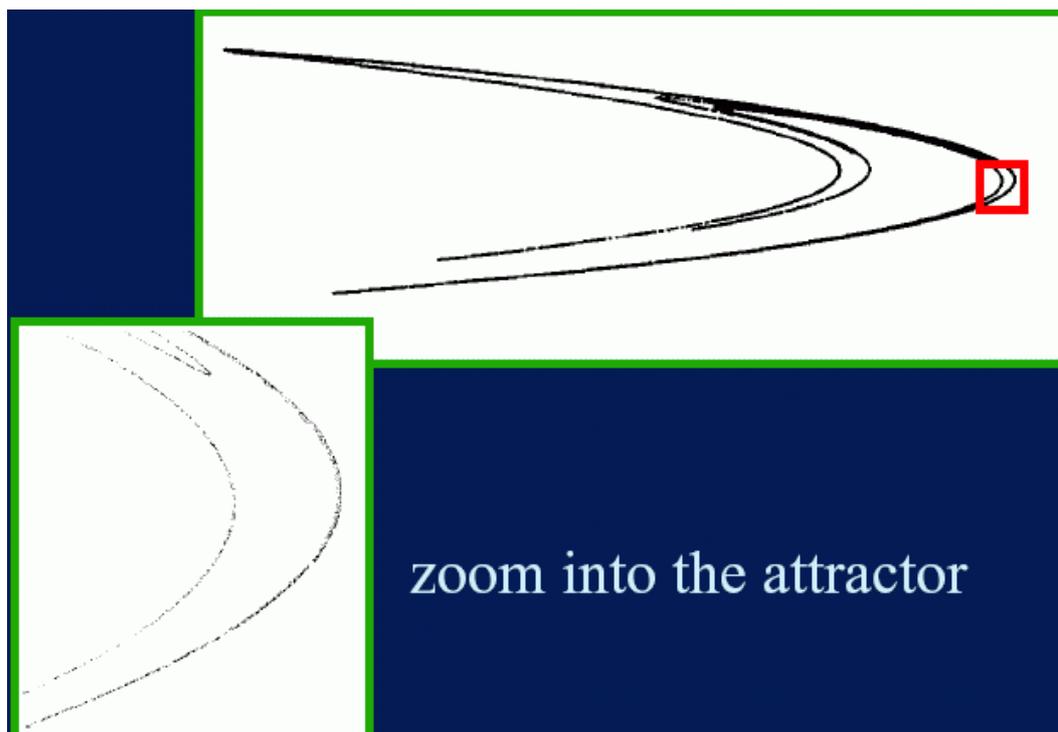


genaue numerische Langzeitvorhersage des Systemverhaltens ist unmöglich.

Visualisierung der Fehlerfortpflanzung entlang eines seltsamen Attraktors (Rössler-Attraktor):



anderes Beispiel: Hénon-Attraktor  
beschreibt das Verhalten von  $h(x, y) = (y+1-ax^2, bx)$



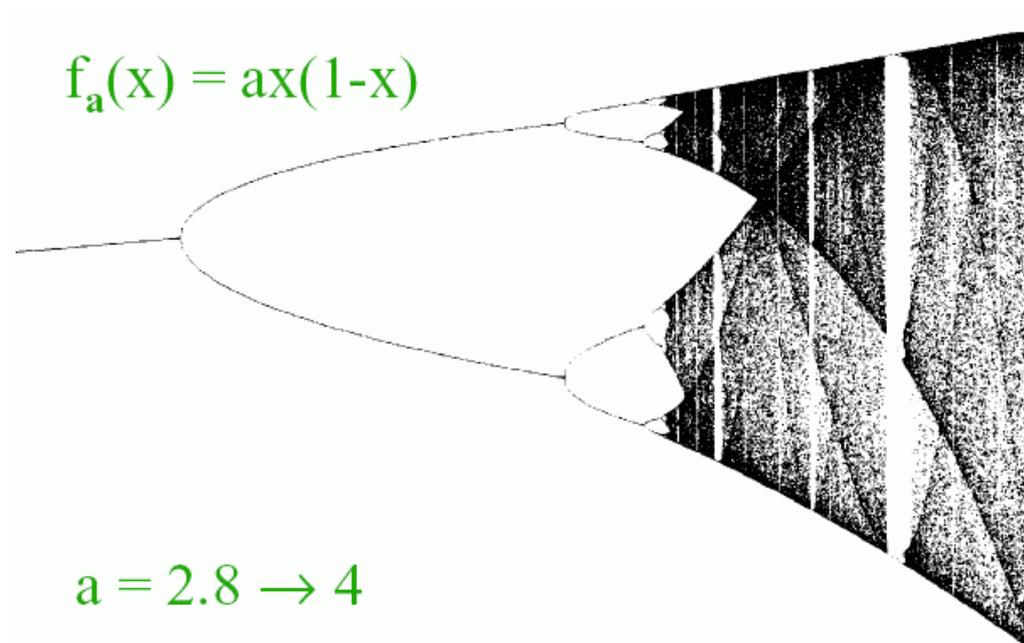
## Bifurkations-Diagramme

oft hängt es von einem Parameter ab, ob ein dynamisches System sich chaotisch verhält oder nicht

Beispiel: "logistische Gleichung"  $f(x) = a x (1-x)$   
(Bedeutung in der Wachstums- und Fortpflanzungsdynamik)

Auftragung des Attraktors in Abhängigkeit vom Parameter  $a$  zeigt, dass ein charakteristischer Übergang ins Chaos erfolgt ("Periodenverdopplungs-Szenario")

Visualisierung dieses Übergangs im "Bifurkations-Diagramm":



der Attraktor ist zunächst periodisch, Periode 1, 2, 4, ...  
dann chaotisch

dann erfolgen für bestimmte Parameterbereiche wieder Übergänge zu periodischem Verhalten (jetzt auch mit Perioden 3, 5 usw.)

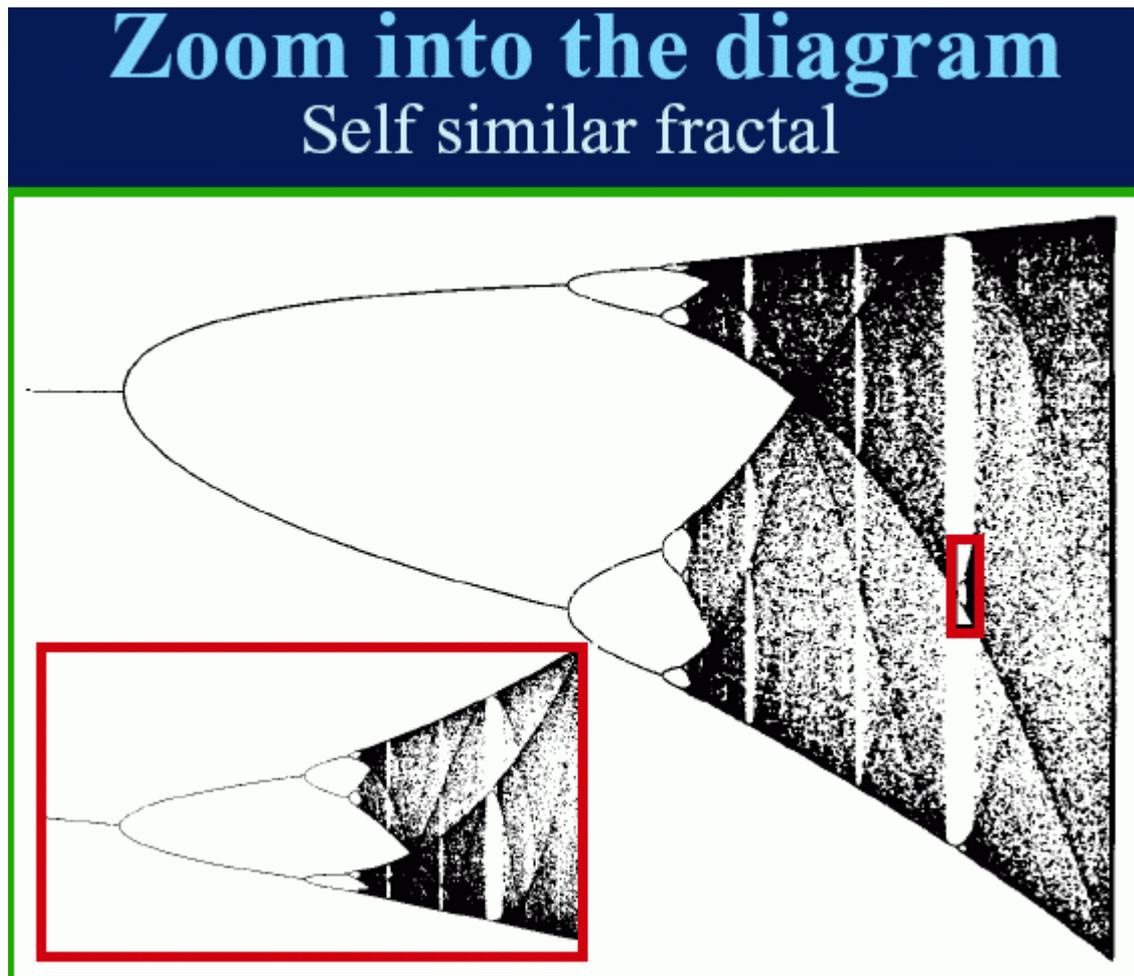
- Selbstähnlichkeit des Bifurkationsdiagramms
- ähnliche Szenarien und Diagramme gelten für andere Funktionen ("Universalität")
- Verhältnis der Abstände aufeinanderfolgender Periodenverdopplungen konstant:

$\delta = \text{const.} = 4,669\ 201\ 660\ 910\ 299\ 079\dots$

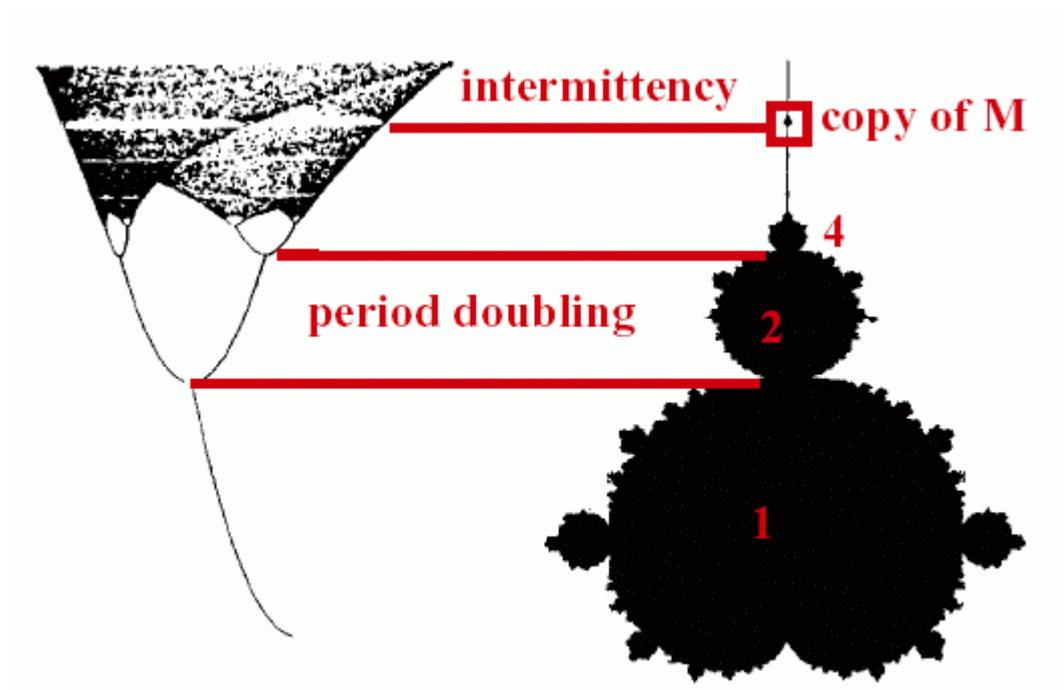
für eine große Klasse nichtlinearer Funktionen

"Feigenbaum-Konstante" (Mitchell Feigenbaum 1975)

Selbstähnlichkeit:



Beziehungen zwischen Mandelbrot-Menge und Bifurkationsdiagramm:

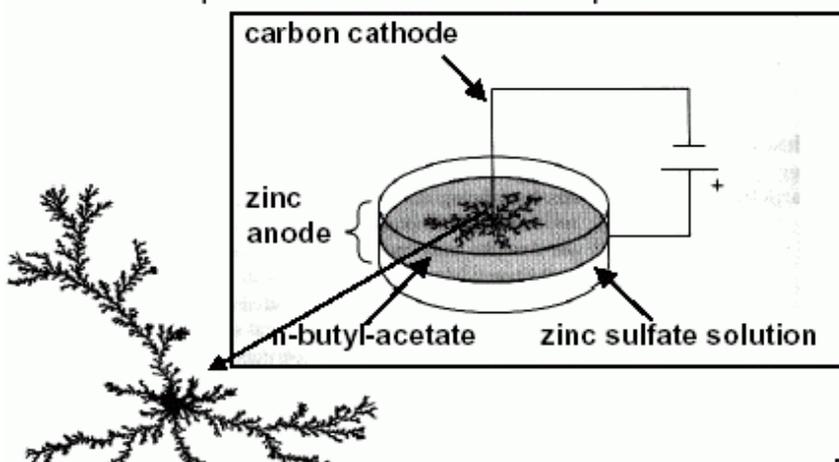


### Aggregations-Fraktale

physikalischer Hintergrund: *diffusionslimitierte Aggregation* kann dendritische Strukturen mit fraktaler Charakteristik erzeugen

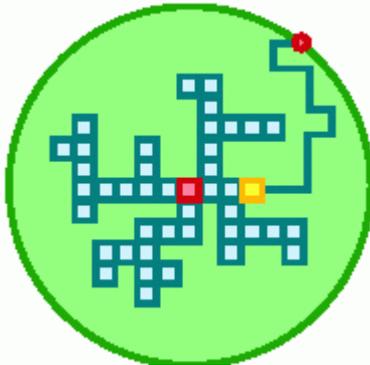
### Diffusion Limited Aggregation (DLA)

Electrodeposition of zinc sulfate particles



Simulation im Voxel-Modell:

Partikel (Voxel) bewegen sich zufällig im Gitter  
Anlagerung an bestehende Struktur, wenn bewegliches Voxel  
in die Nachbarschaft der bestehenden Struktur gerät  
Start: einzelne, unbewegliche Zelle ("Kathode")



Modifikationen / Verbesserungen:

- größere Schrittweite, solange Voxel weit entfernt von wachsender Struktur
- Veränderung der Haftwahrscheinlichkeit erzeugt unterschiedliche Fraktale
- Parallelisierung (mehrere Teilchen gleichzeitig betrachten)

*Fraktale Brownsche Bewegung und fraktale Landschaften*

Ausgangspunkt: Brownsche Molekularbewegung

ungeordnete thermische Bewegung kleinster Teilchen

Modellierung als *stochastischer Prozess*

(parametrisierte Zufallsvariable: jedem Zeitpunkt  $t$  ist eine Zufallsvariable  $x(t)$  zugeordnet, die Position des Teilchens)

Erwartungswert der Positionsverschiebung: 0 (unabh. von  $t$ )

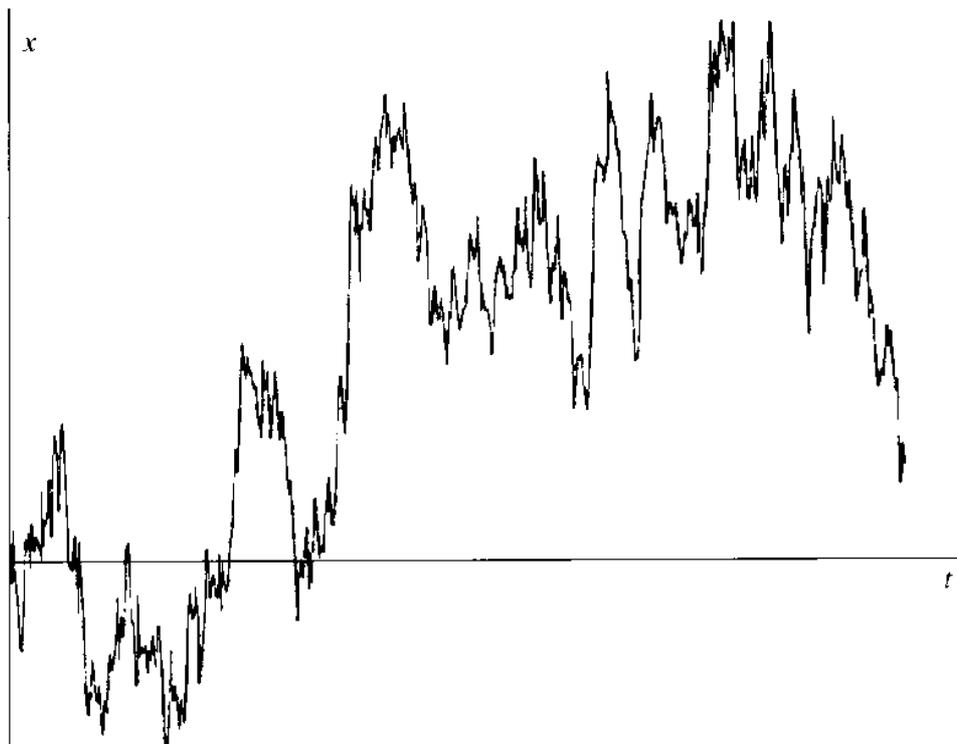
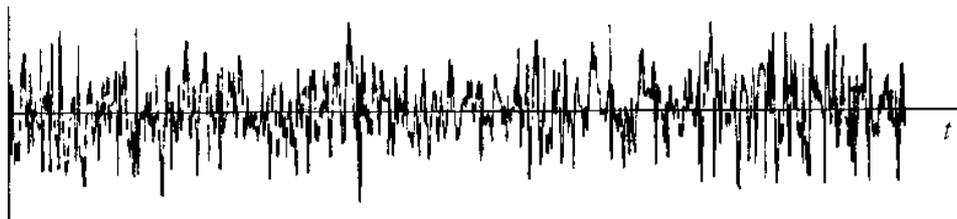
Erwartungswert des Verschiebungsquadrats: proportional zu  $t$

Simulation mittels gaußverteilter Zufallszahlen, die aufsummiert werden

Vereinfachung: 1-dim. Bewegung (nur vor und zurück entlang einer Achse), feste Schrittweite (entspr. der mittl. freien Weglänge der Moleküle)

*Weißes Rauschen*: stoch. Prozess aus lauter stoch. unabh. Gaußschen Zufallsvariablen (d.h. für jedes  $t$  ergibt sich eine Normalverteilung)

Modell der Brownschen 1D-Bewegung ergibt sich durch Aufintegrieren des Weißen Rauschens:



oben: Weißes Rauschen

unten: Brownsche Bewegung in 1D (Position  $x$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ )

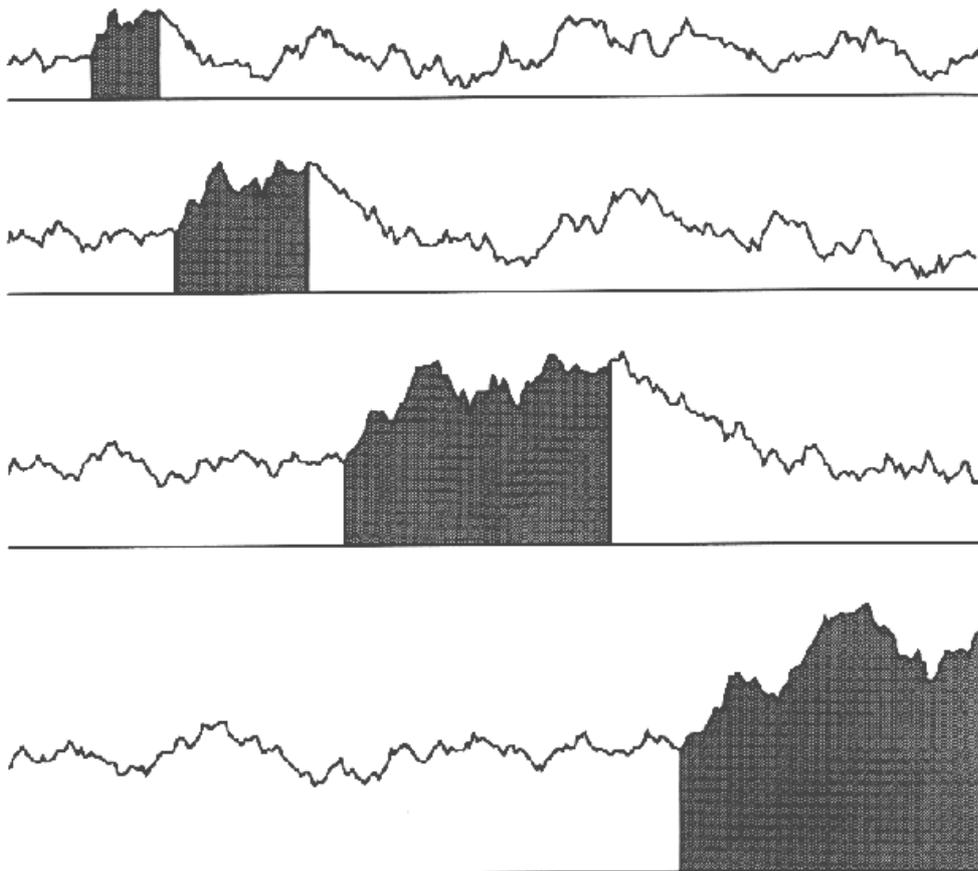
wir erwarten "stochastische Selbstähnlichkeit" für den Graphen der Brownschen Bewegung

– aber mit welchem Skalierungsgesetz?

Da sich das mittl. Verschiebungsquadrat bei Verdopplung der Zeitdifferenz verdoppelt:

Streckung von  $t$  mit Faktor 2

Streckung von  $x$  mit Faktor  $2^{0,5} = \sqrt{2}$ .



die Kurve behält ihr charakteristisches Aussehen (u. statistische Eigenschaften!) bei jeder Skalierungsstufe, sofern für die  $x$ -Richtung der korrekte Skalierungsfaktor benutzt wird

- gibt es Kurven mit anderen Skalierungsfaktoren in  $x$ -Richtung?
- wie ist die fraktale Dimension der Kurve?
- gibt es einfache Konstruktionsverfahren?

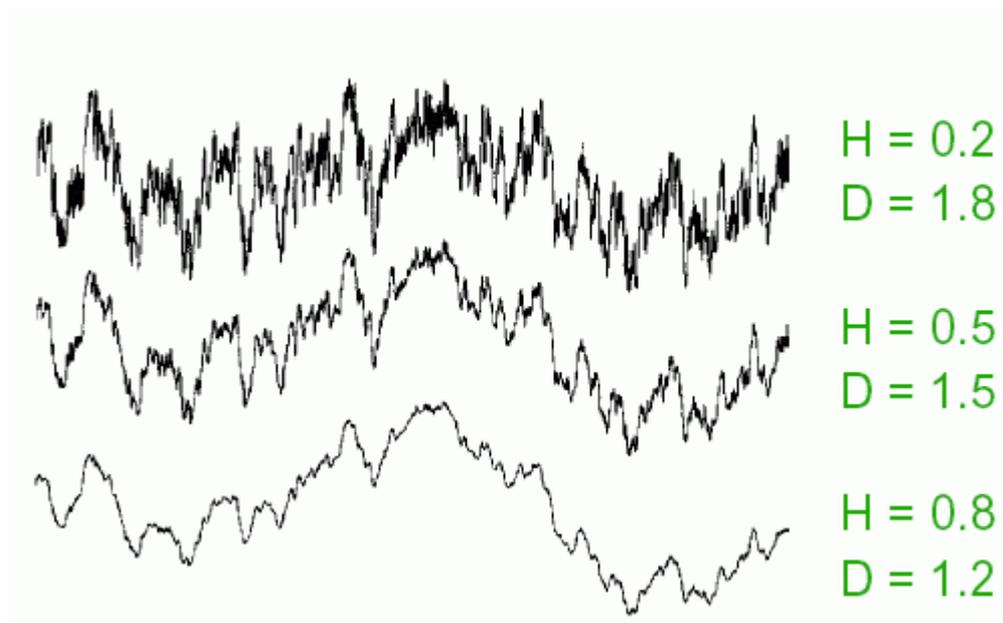
es gibt Kurven mit Skalierungsfaktoren (in x-Richtung)  $2^H$ ,  
 $0 \leq H \leq 1$

(im obigen Fall war  $H = 0,5$ )

$H$  heißt *Hurst-Exponent*

"gebrochene Brownsche Bewegung" (fractional Brownian motion), fraktale Zufallskurven

- $H = 0$ : stark zerklüftet
- $H = 1$ : glatt verlaufend
- für  $0,5 \leq H \leq 0,9$ : Graph ähnelt der Kontur einer (m.o.w. bergigen) Landschaft
- für  $H < 1/2$ : negative Autokorrelation der Differenzen
- für  $H > 1/2$ : positive Autokorrelation der Differenzen



Graph von  $x(t)$  *stochastisch selbstähnlich*:

die Zufallsvariablen  $x(t) - x(t_0)$  und  $(x(rt) - x(t_0))/r^H$  haben dieselben Verteilungsfunktionen für jedes  $t_0$  und jedes  $r > 0$ , d.h. sie sind statistisch ununterscheidbar.

Beziehung zwischen Hurst-Exponent und fraktaler (Box-) Dimension der Kurve:

$$D = 2 - H.$$

Aufsummieren des Weißen Rauschens nicht leicht  
verallgemeinerbar auf gebrochene Brownsche Bewegung

aber:

anderes Konstruktionsverfahren:

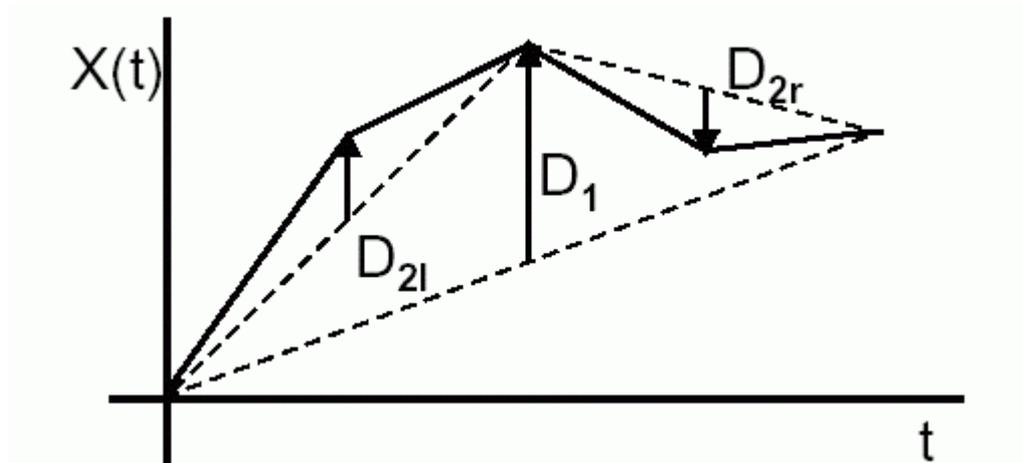
### *Mittelpunktsverschiebungsverfahren*

iterative Unterteilung der Sehne zwischen 2 bereits konstruierten Punkten auf dem Graphen und Verschiebung des Mittelpunkts der Sehne um eine Zufallszahl

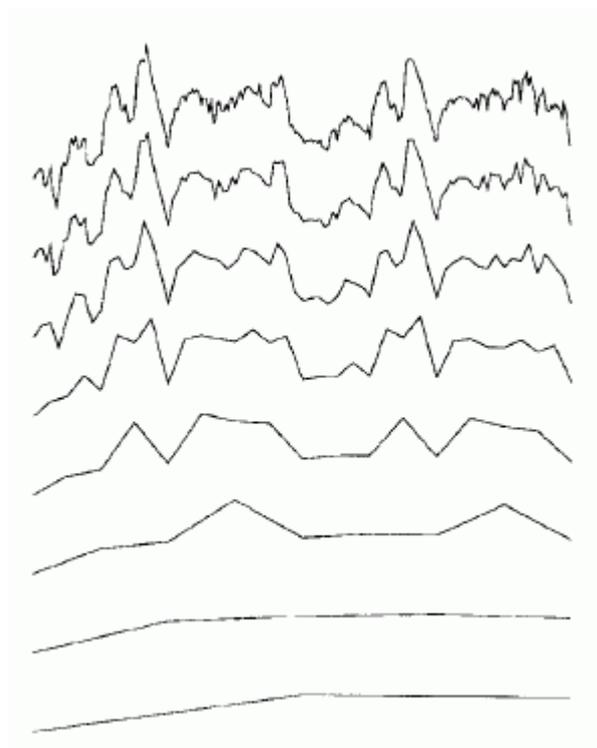
Schritt 1:  $x(1/2) = (x(0)+x(1))/2 + D_1$

Schritt  $n$ : lineare Interpolation und Verschiebung des Mittelpunktes zwischen 2 aufeinanderfolgenden Punkten um  $D_n$

Verschiebung  $D_n$  ist normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\text{Var}(D_n) = (1 - 2^{2H-2}) / 2^{2nH}$



Anwendung des Verfahrens (von unten nach oben) zur Erzeugung einer fraktalen Konturlinie:



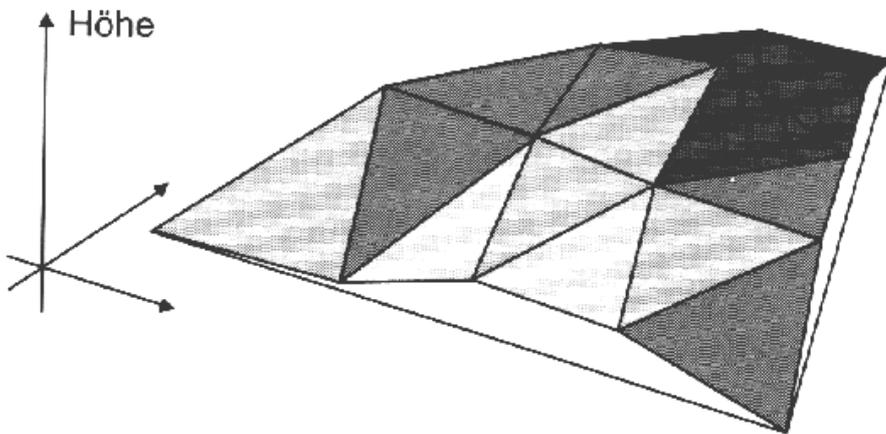
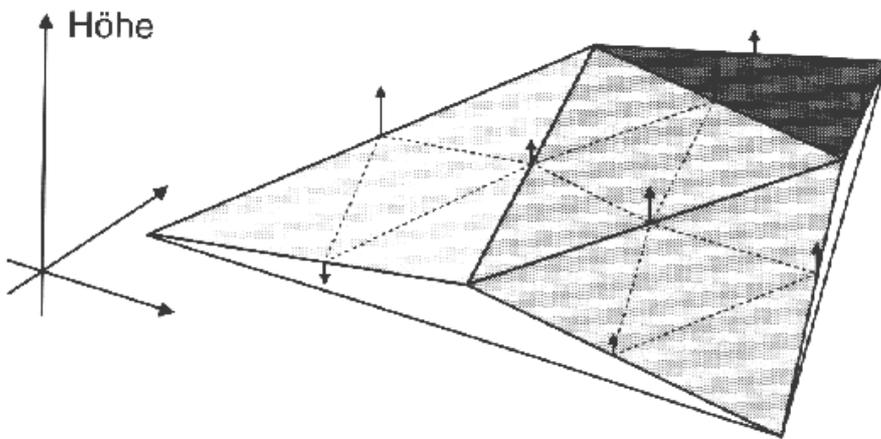
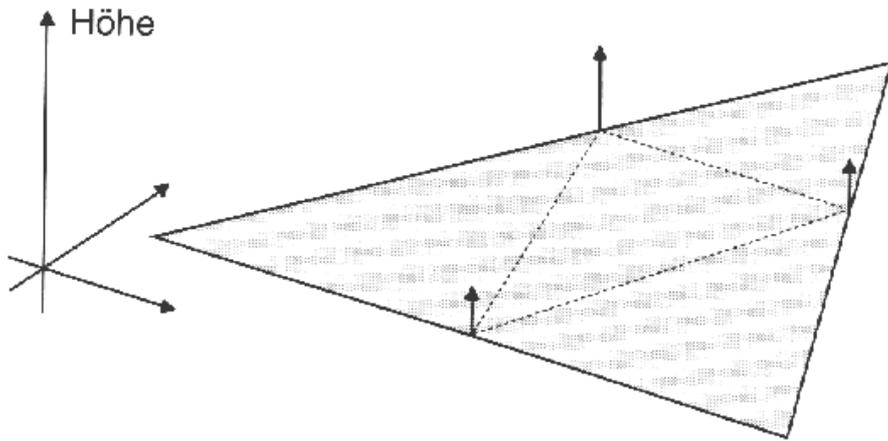
Eigenschaften des Mittelpunktsverschiebungsverfahrens:

- nur grobe Näherung für gebrochene Brownsche Bewegung
- Verschiebungen unkorreliert
- an den Teilungspunkten können sichtbare Artefakte auftreten
- effizienter Algorithmus
- Iterationstiefe kann leicht an die gewünschte Bildauflösung angepasst werden
- verallgemeinerbar auf 2D-Graphen (Terrain-Modelle):

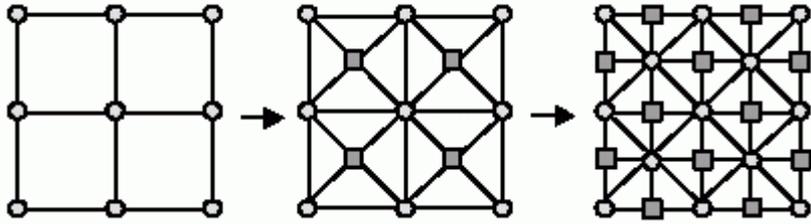
*Methode von Carpenter*

Einteilung von Dreiecken

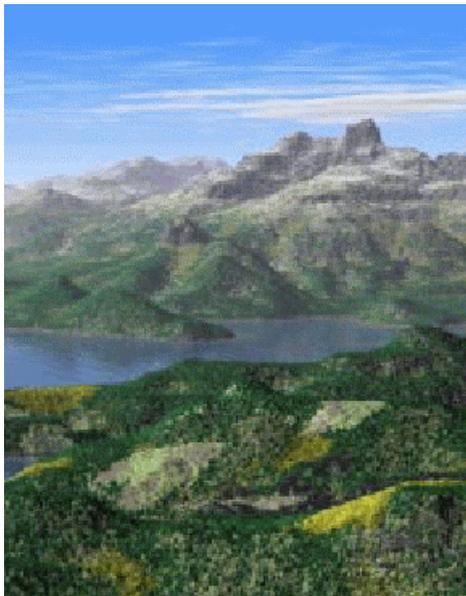
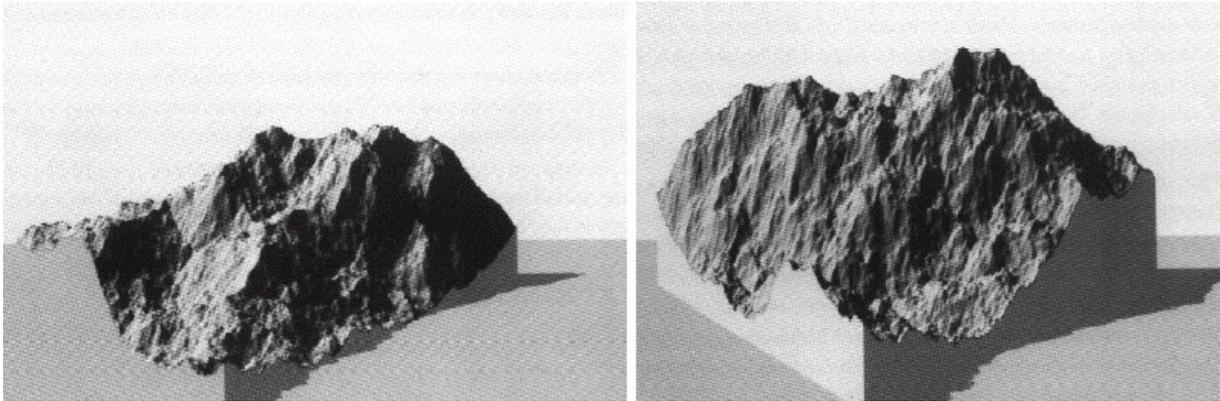
- 1D-Mittelpunktsverschiebung auf den Kanten
  - Verbinden der Mittelpunkte liefert 4 kleinere Dreiecke
  - iteriere diesen Schritt, bis die Dreiecke klein genug sind
- Nachteil: Artefakte an den Kanten (Dreiecksnetz kann sichtbar werden)



besser: mit Unterteilung von Quadraten arbeiten  
Vorteil: Nachbarquadrate haben Einfluss auf betrachtetes  
Quadrat  $\Rightarrow$  weniger Diskretisierungs-Artefakte



Tip von Mandelbrot: statt Normalverteilung schiefe Zufallsverteilungen nehmen  $\Rightarrow$  realistischere Landschaften!



Verfahren eignet sich auch zur Erzeugung von Wolken-Bildern: ersetze (Terrain-) Höhe durch Transparenz-Wert (ggf. unterhalb eines Schwellenwertes auf volle Transparenz gehen)

Verwendung gebrochener Brownscher Bewegung (FBM) in "procedural textures" von Grafik-Paketen wie Lightwave 6.5/7.0

## *Iterierte Funktionssysteme (IFS)*

zurück zum Ausgangspunkt: Selbstähnlichkeit

Idee: Verbesserung der Bilderzeugung mit iterierten Ähnlichkeitstransformationen durch "gleichzeitige" Verwendung mehrerer (ggf. unterschiedlich skalierender) Transformationen (evtl. viele: 100, 1000...)

### Mathematische Grundlagen:

*Metrik:* Abb.  $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit den Eigenschaften: positiv definit, symmetrisch, es gilt die Dreiecksungleichung

*Metrischer Raum:* Menge  $S$ , versehen mit einer Metrik  $d$  auf  $S$   
Beisp.:  $\mathbb{R}^2$  mit der euklidischen Metrik (Abstand zweier Punkte)

*vollständiger metrischer Raum:* jede Cauchy-Folge konvergiert gegen ein Element des Raumes (Reichhaltigkeitsforderung)  
Beisp.:  $\mathbb{R}^2$  mit  $d$  wie oben.

*kontrahierende Abb.:* Eine Selbstabbildung  $f: S \rightarrow S$  eines metrischen Raumes heißt *kontrahierend*, wenn es eine Konstante  $k$ ,  $0 \leq k < 1$ , gibt, derart, dass für alle Elemente  $x, y$  aus  $S$  gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Beisp.:  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(v) = 1/2 v$ . Wähle  $k = 0,5$ . ( $k = 0,9$  ginge auch!)

$k$  heißt *Kontraktionsfaktor*.

### *Banachscher Fixpunktsatz:*

Es sei  $f: S \rightarrow S$  eine kontrahierende Selbstabbildung des vollständigen metrischen Raumes  $S$ . Dann gibt es zu  $f$  genau einen Fixpunkt  $x_0 \in S$ :  $f(x_0) = x_0$ , und ganz  $S$  gehört zu seinem Attraktionsbereich, d.h. für jedes  $x \in S$  konvergiert die Folge der Iterierten  $x, f(x), f(f(x)), \dots$  gegen  $x_0$ .

Es sei  $(S, d)$  ein metrischer Raum, z.B.  $S = \mathbb{R}^2$  mit der gewöhnlichen, euklidischen Metrik.

$H(S)$  sei die Menge aller nichtleeren, kompakten Teilmengen von  $S$ . (*kompakt*: im  $\mathbb{R}^n$  gleichbedeutend mit "beschränkt und abgeschlossen").

("H" von "Hausdorff": Felix Hausdorff, 1868-1942.

Barnsley:  $H(S) =$  "the ideal space in which to study fractal geometry".)

Abstand eines Punktes  $x$  von einer kompakten Menge  $B$ :

$$d(x, B) = \min \{ d(x, y) \mid y \in B \}.$$

"Abstand" von einer kompakten Menge zu einer anderen:

$$g(A, B) = \max \{ d(x, B) \mid x \in A \}.$$

Beachte:  $g$  ist nicht symmetrisch.

*Hausdorff-Distanz* zwischen 2 kompakten Mengen:

$$h(A, B) = \max ( g(A, B), g(B, A) ).$$

Man kann beweisen:

- $h$  ist eine Metrik auf  $H(S)$ .
- Wenn  $(S, d)$  vollständig ist, ist auch  $(H(S), h)$  vollständig.

Insbesondere sind also  $(H(\mathbb{R}^2), h)$  und  $(H(\mathbb{R}^3), h)$  vollständige metrische Räume. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall  $\mathbb{R}^2$ .

Ein *iteriertes Funktionssystem* (auf  $\mathbb{R}^2$ ) ist eine endliche Menge kontrahierender Abbildungen  $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ).

Der Kontraktionsfaktor eines IFS ist das Maximum der Kontraktionsfaktoren der  $f_n$ .

Satz:

Es sei  $(f_1, \dots, f_N)$  ein IFS auf  $\mathbb{R}^2$  mit Kontraktionsfaktor  $k$ . Dann ist die Abbildung  $W: H(\mathbb{R}^2) \rightarrow H(\mathbb{R}^2)$ , die def. ist durch  $W(A) = f_1(A) \cup \dots \cup f_N(A)$ , eine kontrahierende Selbstabbildung des vollständigen metrischen Raumes  $(H(\mathbb{R}^2), h)$  mit Kontraktionsfaktor  $k$ .

( $W$  wird manchmal als "Hutchinson-Operator" bezeichnet.)

Folgerung:

Zu  $W$  existiert in  $H(\mathbb{R}^2)$  ein eindeutig bestimmter "Fixpunkt", d.h. eine kompakte, nichtleere Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  mit

$$A = W(A) = f_1(A) \cup \dots \cup f_N(A).$$

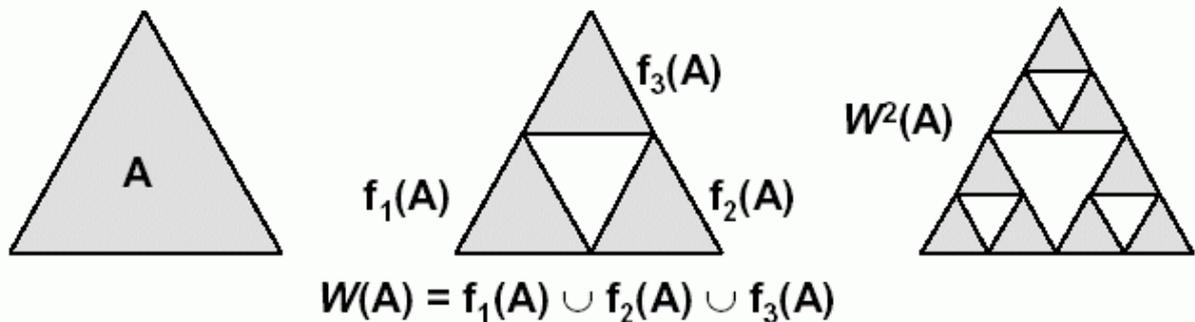
Diese kann iterativ aus jeder beliebigen kompakten Startmenge  $B \neq \emptyset$  gewonnen werden als Grenzwert der Folge

$$B, W(B), W(W(B)), \dots$$

Beweis: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes.

Die oben charakterisierte Menge  $A$  heißt die *Attraktormenge* (der Attraktor) des IFS.

Beispiel: der Hutchinson-Operator  $W$  zu den drei Ähnlichkeitsabbildungen, die das Sierpinski-Dreieck als Attraktor erzeugen:



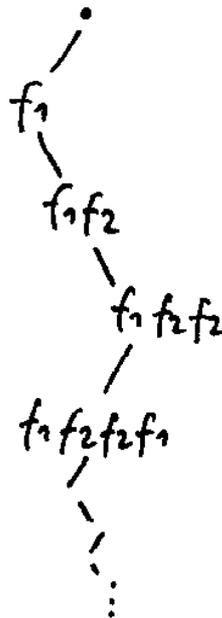
Wenn man für die  $f_n$  affine Abbildungen des  $\mathbb{R}^2$  nimmt, so sind diese durch ihren linearen Anteil ( $2 \times 2$ -Matrix) und ihren Translationsanteil (2-komponentiger Vektor), also durch je 6 Parameter komplett beschrieben:

*6-Parameter-IFS-Code.*

$$f_k(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$



Nachteil: exponentiell anwachsender Aufwand.  
 Genügt eventuell schon ein einzelner Pfad in diesem Baum?



→ "Zufalls-Iterations-Algorithmus":

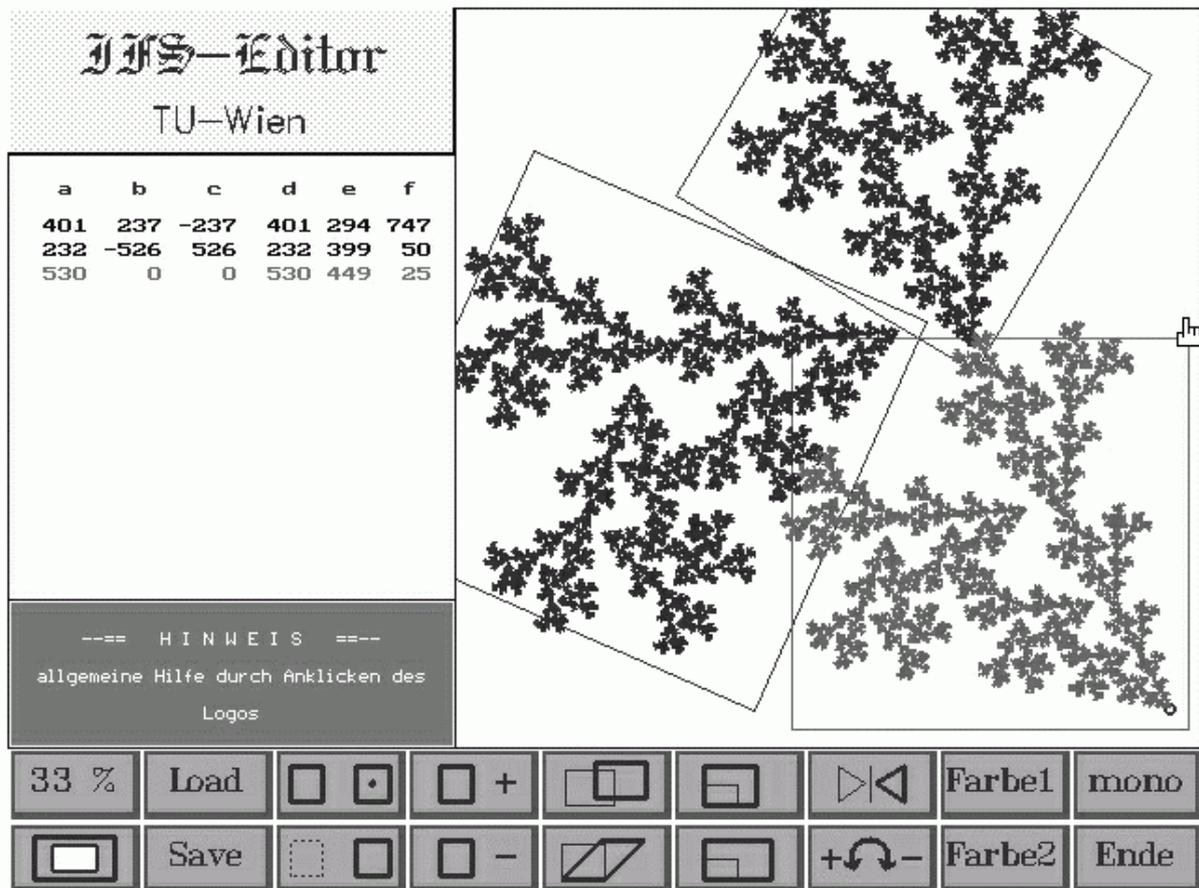
Starte mit beliebigem Punkt, wende wiederholt ein Element aus  $\{ f_1, f_2, \dots, f_N \}$  an, welches bei jedem Schritt *zufällig* ausgewählt wird.

Modifikation des Algorithmus: den  $f_n$  können Wahrscheinlichkeiten  $p_n$  zugeordnet werden.

"Günstige" Wahl:

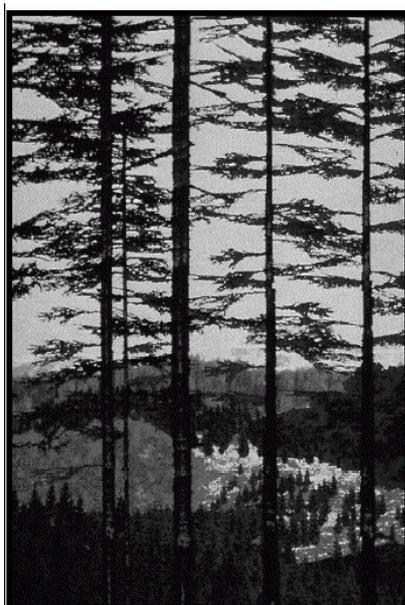
$$p_n = |a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}| \cdot \left( \sum_{i=1}^N a_{11,i} a_{22,i} - a_{12,i} a_{21,i} \right)^{-1}$$

## Interaktiver IFS-Editor:



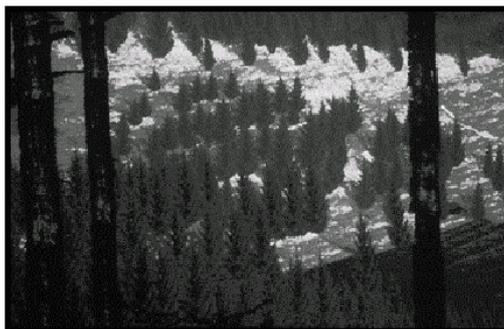
[http://www.cg.tuwien.ac.at/research/vis-dyn-syst/nifs/ifs\\_editor.jpg](http://www.cg.tuwien.ac.at/research/vis-dyn-syst/nifs/ifs_editor.jpg)

## Beispiele für IFS-erzeugte Bilder:

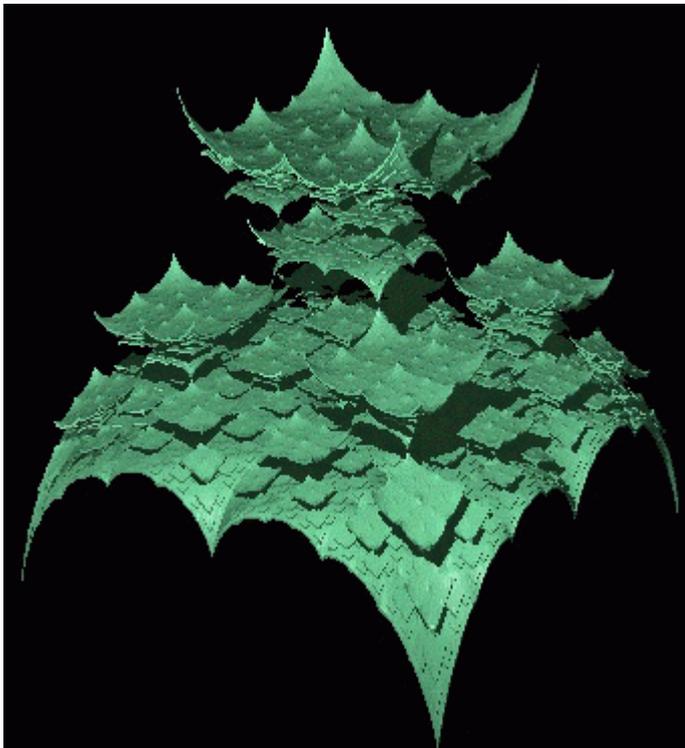


**Black forest, - composition of several IFS attractors**

**Zoom into black forest**



*klassisches Beispiel von M. F. Barnsley*



Quelle:

<http://ayoros.phear.org/~eka/tuto/tuto2.html>

## Fraktale Dimension von IFS-Attraktormengen:

Satz:

Es sei  $(r_1, \dots, r_n)$  ein  $n$ -Tupel reeller Zahlen mit  $0 < r_i < 1$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann existiert genau eine reelle Zahl  $\alpha \geq 0$  mit

$$r_1^\alpha + r_2^\alpha + \dots + r_n^\alpha = 1.$$

(Dabei ist  $\alpha = 0$  genau dann, wenn  $n = 1$ .)

$\alpha$  heißt die *arithmetische Dimension* des Tupels  $(r_1, \dots, r_n)$ :

$\alpha = \text{adi}(r_1, \dots, r_n)$ .

Definition:

Ein IFS  $(f_1, \dots, f_N)$  erfüllt *Moran's Bedingung*, wenn es eine offene Menge  $M \neq \emptyset$  gibt mit

$$f_i(M) \subseteq M \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N$$

und

$$f_i(M) \cap f_k(M) = \emptyset \quad \text{für alle } k \neq i \quad (i, k \in \{1, \dots, N\}).$$

(Trennungseigenschaft)

Satz:

Das IFS  $(f_1, \dots, f_N)$  habe die Kontraktionsfaktoren  $(k_1, \dots, k_N)$  und erfülle sogar

$$d(f_i(x), f_i(y)) = k_i \cdot d(x, y)$$

für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Dann gilt für die Hausdorff-Dimension seiner Attraktormenge  $A$ :

$$D(A) \leq \text{adi}(k_1, \dots, k_N).$$

Erfüllt das IFS sogar Moran's Bedingung, so gilt sogar

$$D(A) = \text{adi}(k_1, \dots, k_N).$$

Vor- und Nachteile der Bilderzeugung mit IFS:

- gute Bildqualitäten erreichbar
- ausgehend von kleinen Informationsmengen für die Spezifikation der Bilder (*database amplification*) – vgl. Bildkompression (s.u.)
- fraktale Dimension der Ergebnisse berechenbar
- IFS-Codes leicht editierbar
- aber: Codes unanschaulich (lange Listen von Matrizen)
- globales Verfahren: Änderungen im Code wirken sich überall im Bild aus
- keine Einbeziehung physikalischer oder organischer Strukturprinzipien in die Modellierung
- generell: semantische Ebene der Bildinhalte nur schwach gekoppelt mit dem Erzeugungsverfahren

### *Bildkompression mittels IFS*

inverses Problem zur Bildgenerierung:

Wie findet man zu einem gegebenen Bild ein IFS, das dieses Bild (approximativ) erzeugt?

Vorgehensweise:

zu gegebener Menge  $M$  ein IFS suchen derart, dass  $W(M)$  "nahe" an  $M$  liegt, in der Erwartung, dass dann auch die Attraktormenge  $A$  des IFS "nahe" an  $M$  liegt.

Rechtfertigung durch folg. Satz:

**Collage-Theorem** (Barnsley 1985):

Seien  $M \in H(\mathbb{R}^2)$  und  $\varepsilon \geq 0$  gegeben. Ist  $(f_1, f_2, \dots, f_N)$  ein IFS mit Kontraktionsfaktor  $0 \leq k < 1$  und mit

$$h\left(M, \bigcup_{n=1}^N f_n(M)\right) \leq \varepsilon,$$

dann gilt für die Attraktormenge  $A$  des IFS:

$$h(M, A) \leq \varepsilon / (1-k).$$

Ausführliches zur IFS-Bildkompression bei Ning Lu 1997.

## Fraktale Kunst:



(Sharon Webb)

## Technische Anwendung von Fraktalen:

### Application of Fractal Geometry

A fractal antenna is here used for a cellular phone because they are more efficient and need less space

