

## 10. Nichtklassische Modelle / Fraktale

bisher:

Grafik-Modelle für klassische, euklidische geometrische Objekte  
(Polygonnetze, Würfel, Polyeder, Spline-Kurven und -Flächen...)

- gut für: Gebäude, Autos, Möbel, Maschinen...
- Mängel bei der Modellierung natürlicher Objekte

z.B.

Wolken



Flussläufe



## Wälder



## Galaxien



Gemeinsamkeiten dieser natürlichen Objekte:

- "nicht glatt"
- Koexistenz "großer und kleiner" Strukturen
- Koexistenz geordneter und ungeordneter, "chaotischer" Strukturen
- Beschreibung mit klassischen, geometrischen Standardkörpern sehr aufwändig
- geordnete Anteile (und "einfache" Zufalls-Anteile) legen nahe, dass es kompaktere Beschreibungen gibt

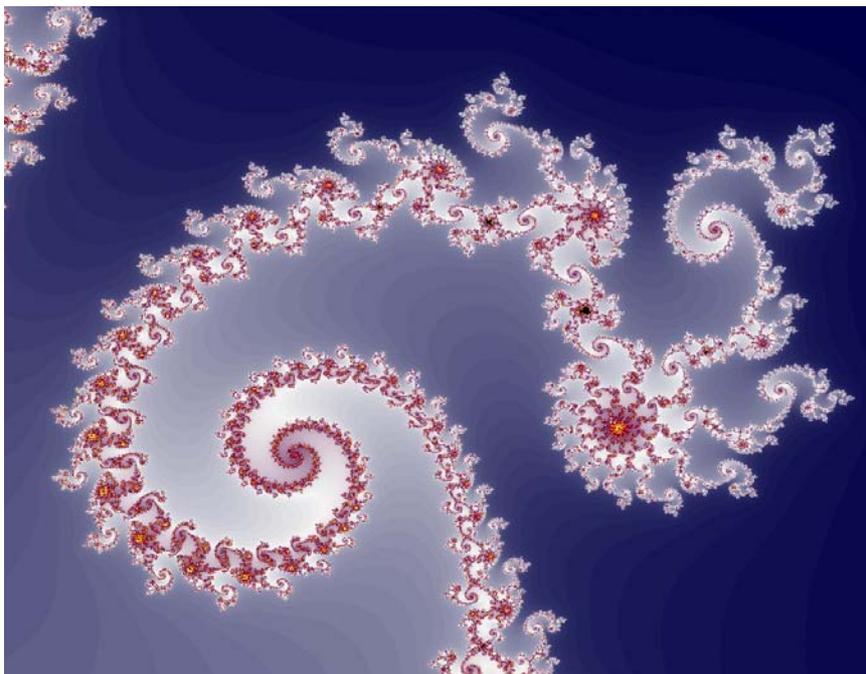
alternativer Modellansatz seit den 1970er Jahren:

**"Fraktale"** (Bezeichnung von Benoît B. Mandelbrot)

größeres Theorie-Umfeld:

- Topologie, Maß- und Dimensionstheorie
- Selbstähnlichkeit
- dynamische Systeme
- Chaostheorie
- Iteration von (geometrischen) Abbildungen
- Zeitreihenanalyse
- Informations- und Komplexitätstheorie

lieferte neue, populäre Metaphern ("Schmetterlingseffekt")  
und ästhetische Möglichkeiten





Erste Grundidee:  
*Selbstähnlichkeit*

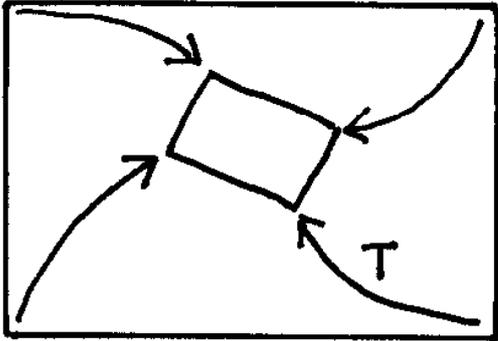
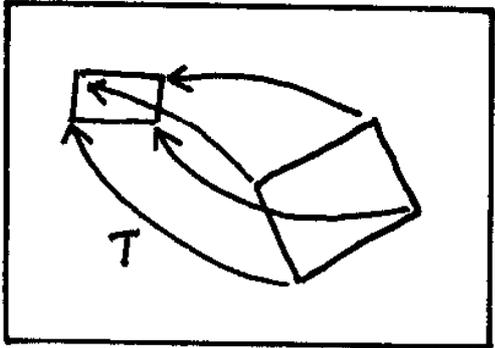
Analogie zum klassischen Symmetriebegriff

symmetrische Objekte (Rotations-, Spiegelsymmetrie, Periodizität...)	selbstähnliche Objekte
<i>invariant unter:</i> Kongruenzabbildungen	<i>invariant unter:</i> Ähnlichkeitsabbildungen ( <i>allgemeiner:</i> affinen Abbildungen) ( <i>noch allgemeiner:</i> nichtlinearen Abbildungen)



Prinzip der Selbstähnlichkeit:  
"Bild im Bild"

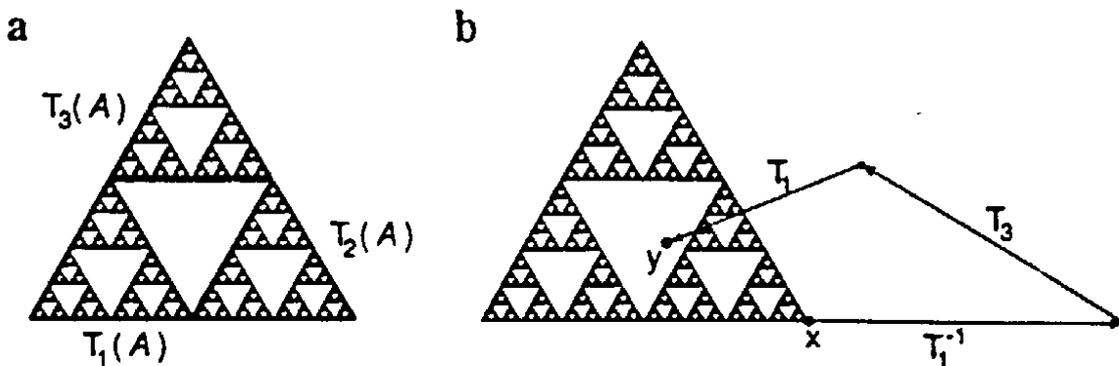
- geometrisches Analogon zur Rekursion

<p><i>vollständige Selbstähnlichkeit:</i> es existieren eine oder mehrere (endlich viele) Ähnlichkeitsabbildung(en) <math>T</math>, die das gesamte Bild auf (jeweils) einen Teil von sich selbst abbilden</p>	<p><i>partielle Selbstähnlichkeit:</i> es existieren eine oder mehrere (endlich viele) Ähnlichkeitsabbildung(en) <math>T</math>, die Teile des Bildes auf andere Teile abbilden</p>
	

Abschwächung:

lasse affine Abb. statt Ähnlichkeitsabb. zu –  
"Selbstaffinität"

Im Gegensatz zur klassischen Symmetrie bilden die Selbstähnlichkeiten eines Objektes i. allg. keine Gruppe, sondern eine Halbgruppe:  
die inversen Transformationen führen aus dem Objekt heraus

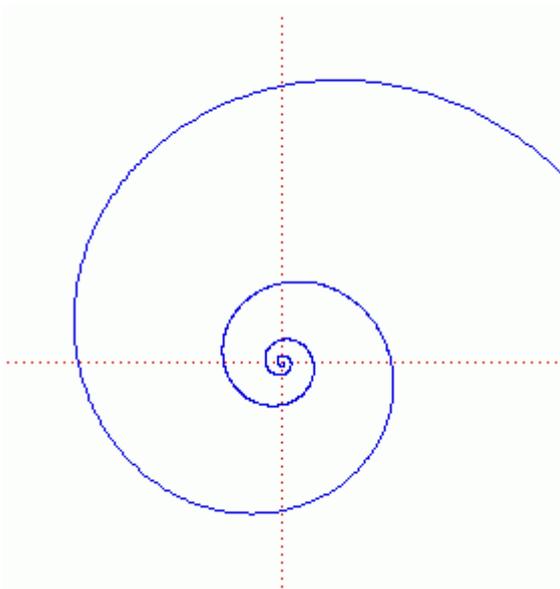


Grade der Selbstähnlichkeit:

Selbstähnlichkeit	vs.	Selbstaffinität
vollst. Selbstähnlichkeit	vs.	partielle Selbstähnlichkeit
exakte Selbstähnlichkeit	vs.	stochastische Selbstähnl.

Beispiele selbstähnlicher Objekte:

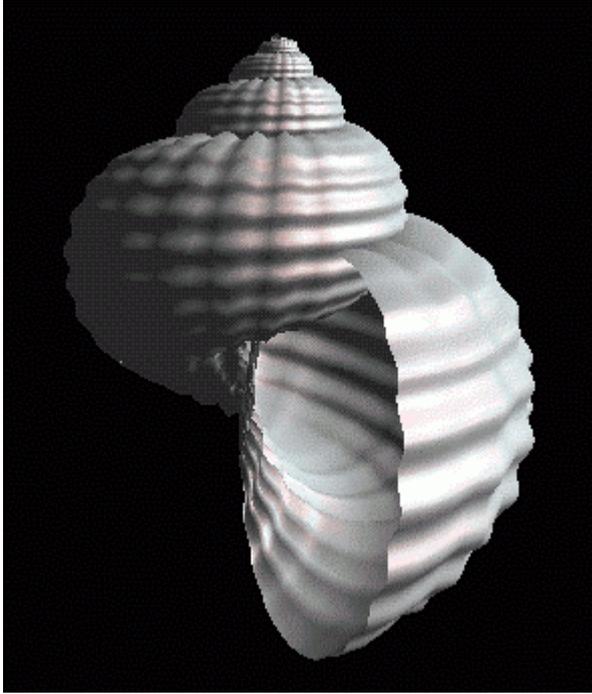
- die logarithmische Spirale



$r = a \cdot e^{k\varphi}$  in Polarkoordinaten

Vorkommen in der Natur





(Simulation)

- Schneeflocken
- pflanzliche Verzweigungsstrukturen
- Höhenmuster von Landschaften (stochastische Selbstähnlichkeit)

*Beachte:* Selbstähnlichkeit  $\neq$  Fraktalität,  
obgleich enge Beziehungen bestehen!  
(log. Spirale hat Dimension 1, kein Fraktal)

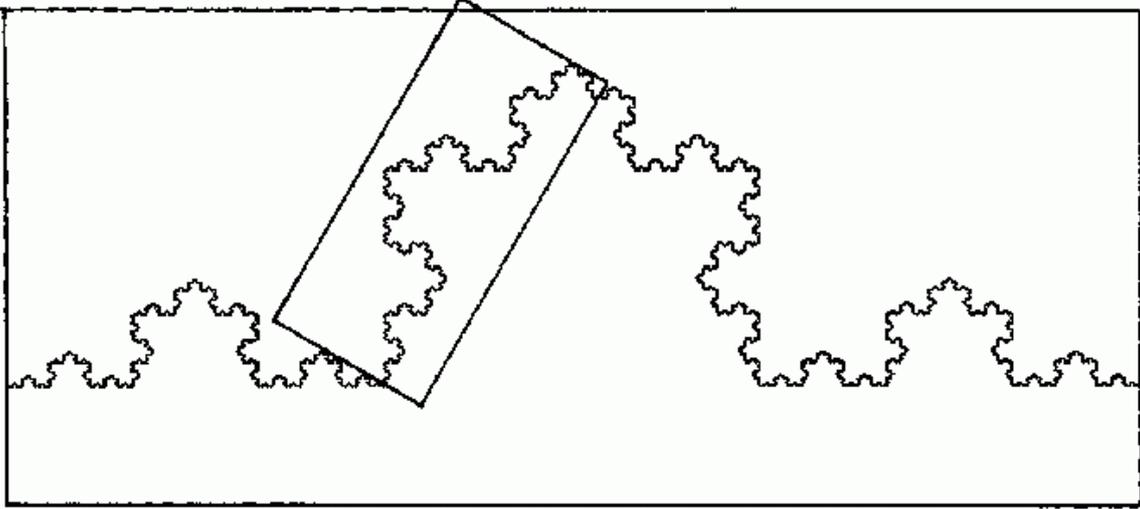
Konstruktion selbstähnlicher Strukturen:  
einfachster Ansatz ergibt sich aus der Definition

iterierte Anwendung der Selbstähnlichkeitstransformation(en)  
auf ein Grundobjekt ("Initiator")

Prinzip der "*Mehrfach-Verkleinerungs-Kopiermaschine*"  
(Peitgen et al.)

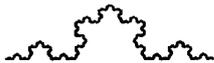
→ "iteriertes Funktionensystem" (iterated function system, *IFS*),  
siehe unten

Beispiel Koch-Kurve (vgl. PostScript-Übung):



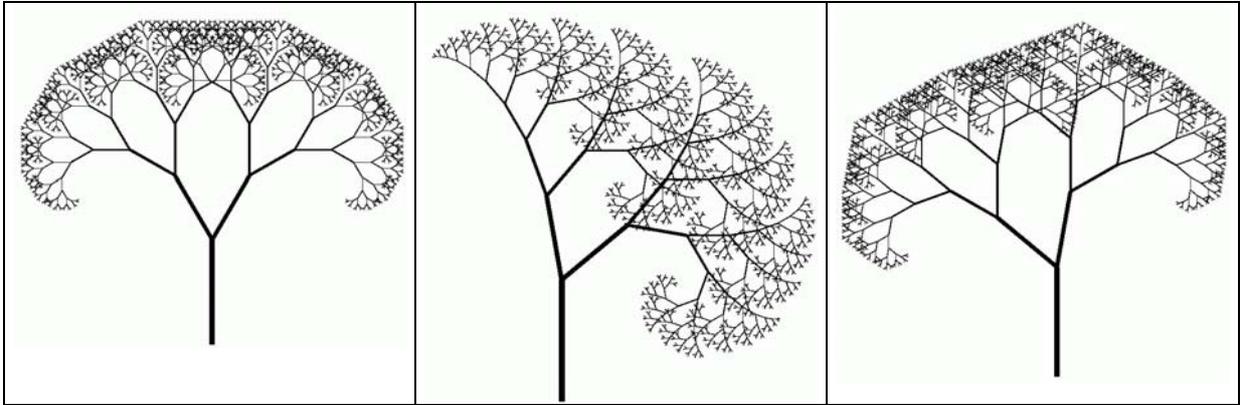
hier 4 Selbstähnlichkeits-Transformationen

bei genügender Iterationstiefe kommt es auf das Initiator-Objekt nicht an:



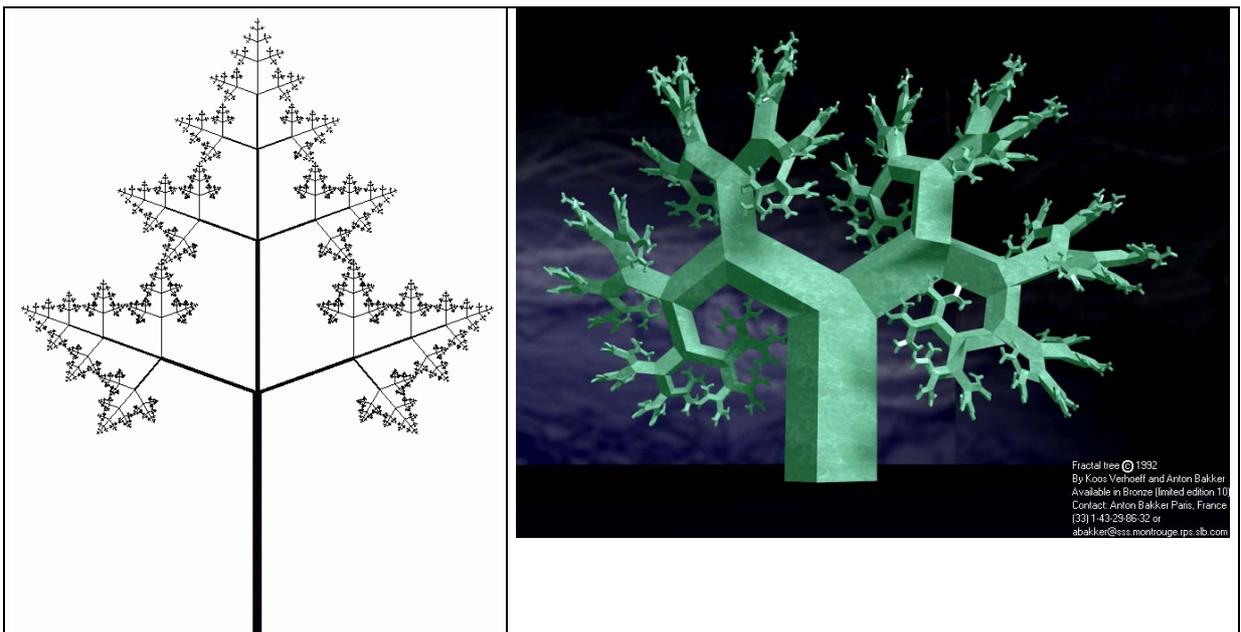
einfache selbstähnliche / selbstaffine Konstruktionen:

binäre Bäume



ternärer Baum

gerenderter binärer Baum

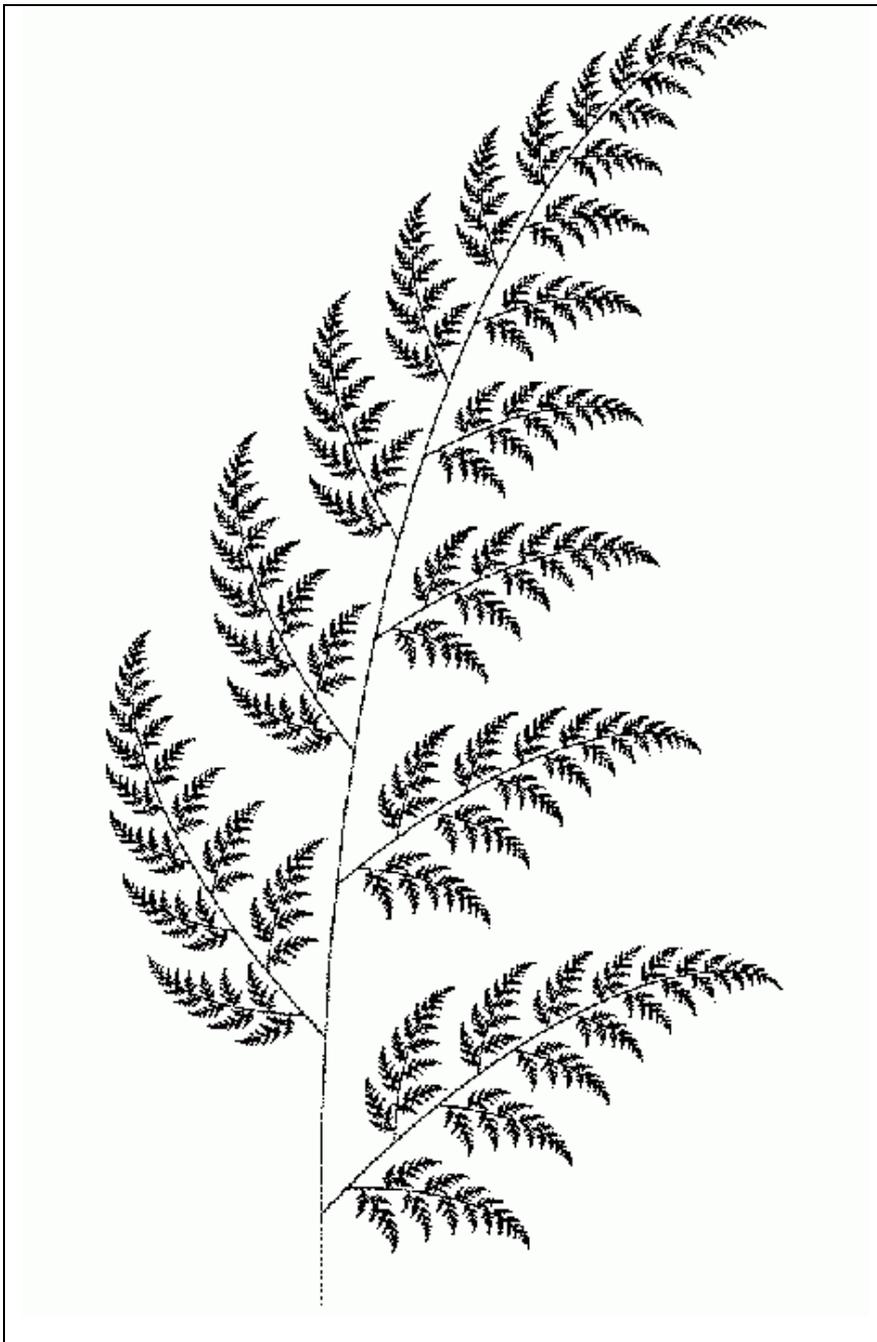


→ Konstruktionen mit strikter Selbstähnlichkeit wirken oft "künstlich"

*Gründe:*

- stets gleiche Winkel
- gleiche Längenverhältnisse beim Übergang von einer Iterationsordnung zur nächsten
- fehlende Zufallseffekte (Varianzen)
- Konstruktionsprinzip wird zu offensichtlich

nur in Spezialfällen wirken solche Objekte "natürlich":  
Beisp. Barnsley-Farn



## *Fraktalität*

Ursprung des Begriffs aus der Dimensionstheorie

Fraktale als geometrische Objekte, denen gemäß ihrer Flächen- bzw. Raumauffüllung eine "gebrochene Dimension" zugeordnet werden kann

"fraktale Dimension" als Eigenschaft, die analysiert (gemessen) werden kann

⇒ impliziert *kein* bestimmtes Syntheseverfahren für Objekte!

Vorsicht:

manchmal "Fraktal" einfach als Synonym für "verzweigte Struktur" gebraucht – Missbrauch der Terminologie!

Anwendungen der fraktalen Analyse:

Physik, Chemie, Geografie, Meteorologie, Physiologie

Präzisierung des fraktalen Dimensionsbegriffs:

nicht trivial

ca. 10 verschiedene Dimensionsbegriffe in der math. Literatur

wichtigste davon:

- "Selbstähnlichkeits-Dimension" – nur für strikt selbstähnliche Objekte
- Hausdorff-Dim.: math. allgemeinste Version
- Box-counting-Dim.: häufig praktisch angewandt

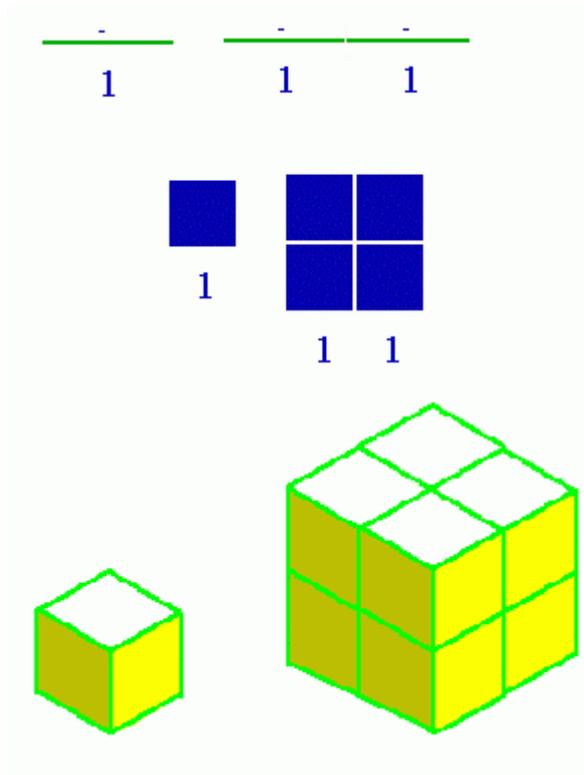
*Selbstähnlichkeits-Dimension:*

beschreibt Beziehung zwischen Anzahl der Teile, in die ein Objekt zerlegt werden kann, und dem Skalierungsfaktor der entsprechenden Selbstähnlichkeits-Transformationen

Beispiel: klassische, euklidische Objekte:

auch diese lassen Selbstähnlichkeiten zu

z.B. beim Quadrat Einteilung in 4 Unter-Quadrate



Strecke:

$$\begin{aligned} \text{Anzahl der Teile} = N &= 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \\ \text{Skalierungsfaktor} = r &= 1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \dots \\ \Rightarrow (\log N) / \log (1/r) &= 1 \end{aligned}$$

Quadrat:

$$\begin{aligned} N &= 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad \dots \\ r &= 1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \dots \\ \Rightarrow (\log N) / \log (1/r) &= 2 \end{aligned}$$

Würfel:

$$\begin{aligned} N &= 1 \quad 8 \quad 27 \quad 64 \quad \dots \\ r &= 1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \dots \\ \Rightarrow (\log N) / \log (1/r) &= 3 \end{aligned}$$

Koch-Kurve:

$$\begin{aligned} N &= 1 \quad 4 \quad 16 \quad 64 \quad \dots \\ r &= 1 \quad 1/3 \quad 1/9 \quad 1/27 \quad \dots \\ \Rightarrow (\log N) / \log (1/r) &= (\log 4) / \log 3 = 1,2619\dots \end{aligned}$$

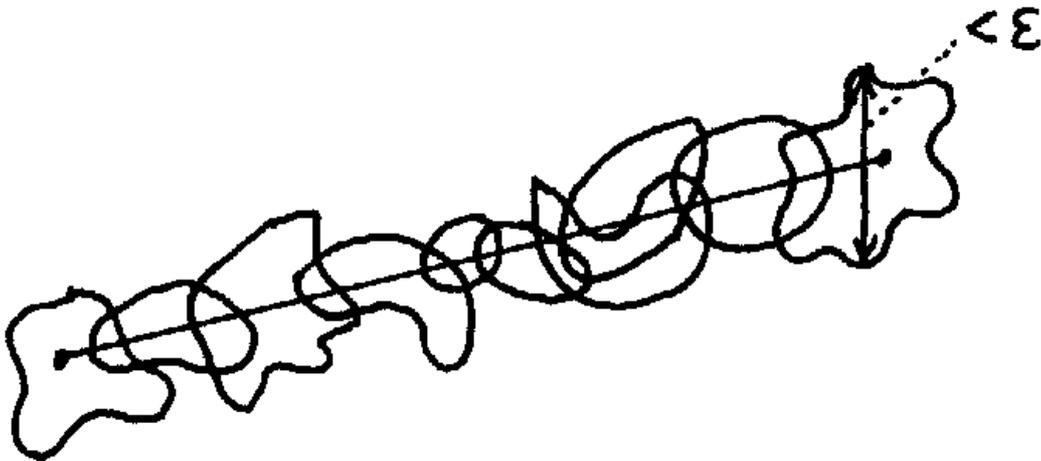
Selbstähnlichkeits-Dim.  $D = (\log N) / \log (1/r)$ .

Selbstähnlichkeits-Dim. nur unter sehr einschränkenden Bedingungen definiert

zur Hausdorff-Dim.:  
Hilfsbegriffe

- $d(x, y)$  bezeichne den (euklidischen) Abstand zweier Punkte im  $\mathbb{R}^n$
- für eine Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{R}^n$  sei  $\text{diam}(U) = \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in U \}$  der "Durchmesser von  $U$ " (kleinste obere Schranke aller Abstände in  $U$ )
- eine offene, abzählbare Überdeckung von  $U$  ist eine Menge nichtleerer, offener Teilmengen  $\{U_1, U_2, \dots\}$  von  $\mathbb{R}^n$  derart, dass  $U$  ganz in der Vereinigung aller  $U_i$  enthalten ist.

Beisp.: Überdeckung einer Strecke im  $\mathbb{R}^2$  mit Mengen, deren Durchmesser  $< \varepsilon$  sind:



Man def. zu gegebenen Zahlen  $s$  und  $\varepsilon > 0$  und zu  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$h_{s,\varepsilon}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s \mid \left. \begin{array}{l} \{U_1; U_2; \dots\} \text{ offene, abzählbare Überdeckung} \\ \text{von } A \text{ mit } \text{diam}(U_i) < \varepsilon \end{array} \right\} \right\}$$

Die Reihen können endlichen oder unendlichen Wert haben.

Je kleiner  $\varepsilon$  gewählt wird, desto kleiner wird die Gesamtheit der betrachteten Überdeckungen, desto größer also das Infimum

$\Rightarrow$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  strebt  $h_{s,\varepsilon}(A)$  gegen einen Grenzwert (dieser kann auch  $\infty$  sein):

$$h_s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{s,\varepsilon}(A)$$

$h_s(A)$  heißt "s-dimensionales Hausdorff-Maß" der Menge  $A$ .

Spezialfälle:

- $h_1(A)$  = Länge einer glatten Kurve  $A$
- $h_2(A)$  = (bis auf konstanten Faktor) Flächeninhalt einer glatten Fläche  $A$
- $h_3(A)$  = (bis auf konst. Faktor) Volumen einer glatten 3D-Mannigfaltigkeit.
- Aber:  $h_s(A)$  ist auch für nicht-ganzzahliges  $s$  definiert!

Es gilt:

Für jede Menge  $A$  gibt es eine Zahl  $D_H(A)$ , so dass

$$\begin{aligned} h_s(A) &= \infty && \text{für } s < D_H(A), \\ h_s(A) &= 0 && \text{für } s > D_H(A). \end{aligned}$$

Das s-dim. Maß liefert also nur für ein einziges  $s$  "sinnvolle", nichttriviale Werte (nämlich für  $s = D_H(A)$ ).

Diese Zahl  $D_H(A)$  ist die *Hausdorff-Dimension* von  $A$ .

Somit:  $D_H(A) = \inf \{ s \mid h_s(A) = 0 \} = \sup \{ s \mid h_s(A) = \infty \}$ .

Eigenschaften der Hausdorff-Dimension:

- Wenn  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , dann ist  $D_H(A) \leq n$ .
- Wenn  $A \subseteq B$ , dann ist  $D_H(A) \leq D_H(B)$ .
- Wenn  $A$  abzählbare Menge ist, dann ist  $D_H(A) = 0$ .
- Wenn  $D_H(A) < 1$  ist, dann ist  $A$  total unzusammenhängend.
- Für klassische, strikt selbstähnliche Fraktale (z.B. Koch-Kurve, Sierpinski-Dreieck) ist  $D_H$  identisch mit der Selbstähnlichkeitsdimension.

*Box-counting-Dimension* (oder *Box-Dimension*):

Hausdorff-Dim. i. allg. schwierig zu bestimmen

⇒ man begnügt sich meist mit einer vereinfachten Dimensions-Def. für beschränkte Mengen  $A$ :

Sei  $N_\delta'(A)$  die kleinste Anzahl von Mengen mit einem Durchmesser von höchstens  $\delta$ , die  $A$  überdecken. Dann sei

$$D_b(A) = \lim_{(\delta \rightarrow 0)} (\log N_\delta'(A)) / \log(1/\delta)$$

die *Box-Dimension* von  $A$ , vorausgesetzt, der Grenzwert existiert.

Äquivalente Def., die leichter praktisch einzusetzen ist:

Sei  $A$  mit einem Gitter der Maschenweite  $\delta$  überzogen und sei  $N_\delta(A)$  die Anzahl der Gitterzellen (Würfel), die  $A$  schneiden.

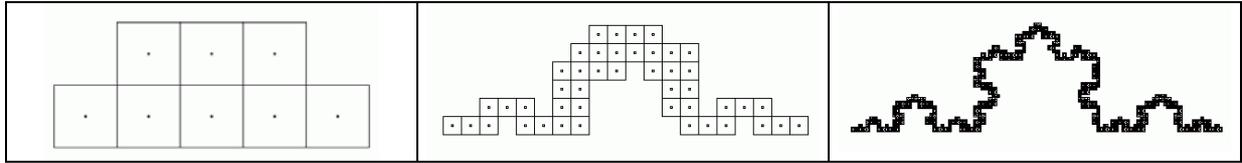
Dann ist

$$\begin{aligned} D_b(A) &= \lim_{(\delta \rightarrow 0)} (\log N_\delta(A)) / \log(1/\delta) \\ &= - \lim_{(\delta \rightarrow 0)} (\log N_\delta(A)) / \log \delta. \end{aligned}$$

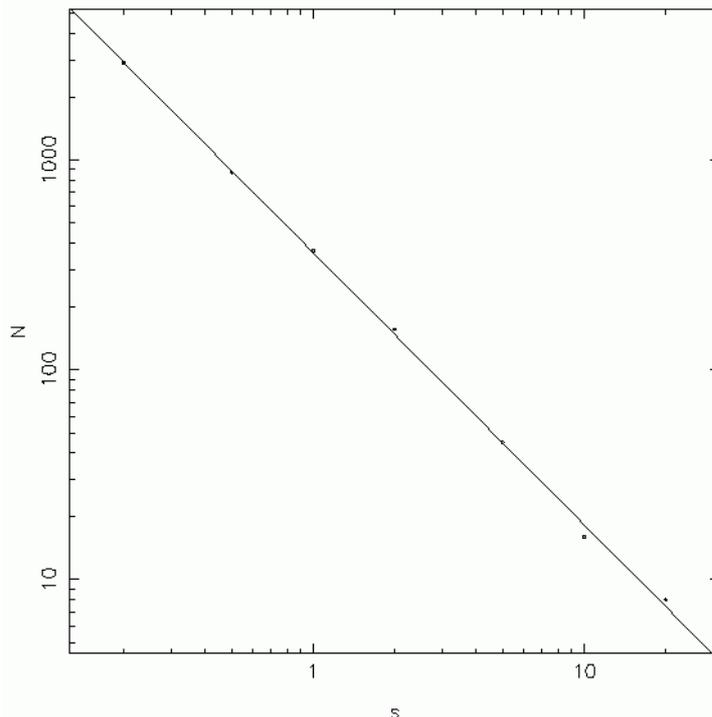
*Empirische Ermittlung der Box-Dimension:*

Man überzieht die Menge  $A$  mit Gittern abnehmender Maschenweite  $\delta$  und zählt jedesmal die Gitterzellen, die geschnitten werden (Teile von  $A$  enthalten). Die resultierenden Anzahlen werden in einem doppelt-logarithmischen Diagramm gegen  $\delta$  aufgetragen (im Beispiel unten:  $s$  statt  $\delta$  und  $N$  statt  $N_\delta(A)$ .) Wenn  $A$  fraktale Struktur hat, sollte sich näherungsweise eine Gerade ergeben. Ihre Steigung, mit umgekehrtem Vorzeichen, ist dann die Box-Dimension von  $A$ .

## Beispiel Koch-Kurve: Überdeckung mit verschiedenen Quadratgittern



Resultierendes Seitenlänge-Anzahl-Diagramm  
(beachte: beide Achsen logarithmisch):



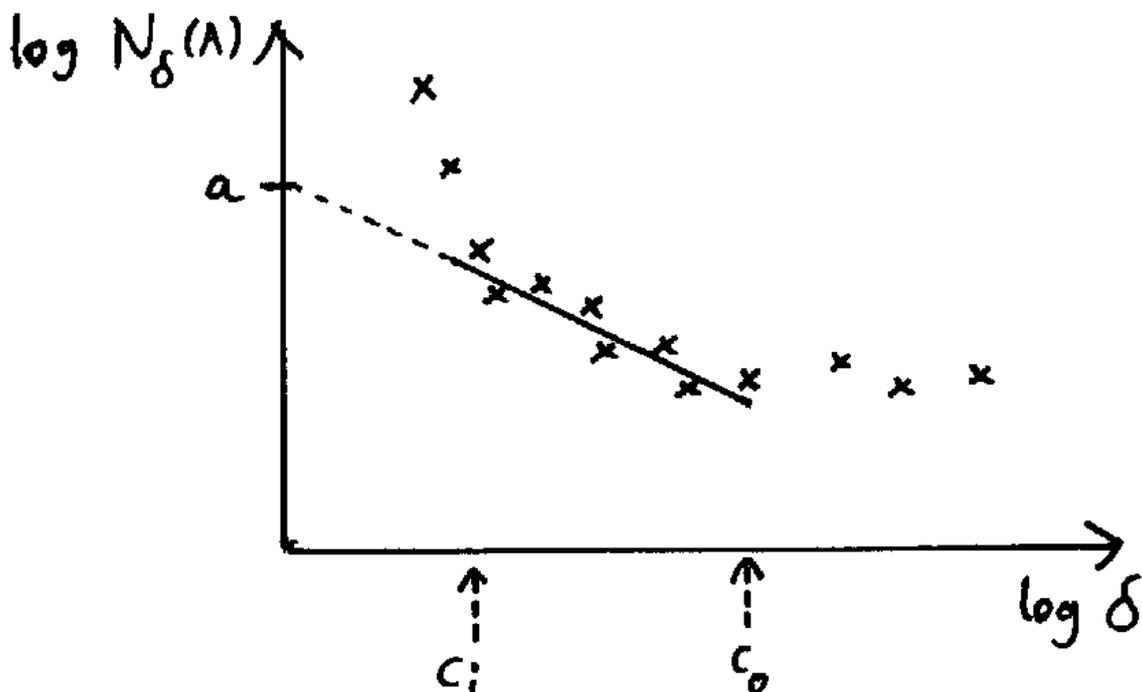
resultierende Steigung: ca.  $-1,26$ , entspricht der Selbstähnlichkeits-Dim. (s.o.) mit neg. Vorzeichen.

Eigenschaften der Box-Dimension:

- einfach zu ermitteln
- keine Voraussetzungen an die betrachtete Menge (außer Beschränktheit)
- Rasterungen mit verschiedenen Maschenweiten werden sowieso oft gebraucht
- stimmt meistens mit der Hausdorff-Dim. überein (aber nicht immer: z.B. Menge der rationalen Zahlen in  $[0, 1]$  hat Hausdorff-Dim. 0, aber Box-Dim. 1).

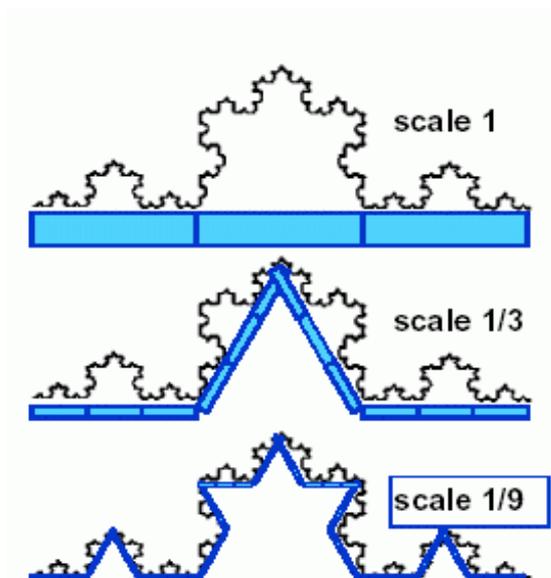
Probleme bei der Bestimmung der Box-Dimension "realer" Objekte (Wolken, Bäume, Landschaften, Kolloide...):

- es ergibt sich im log-log-Plot nicht immer eine Gerade (Vorschlag von Rigaut 1987: "Semifraktale" bei nichtlinearen, aber gesetzmäßigen Verläufen)
- es existieren obere und untere Skalengrenzen, wo sich das Raumfüllungsverhalten der Struktur ändert: "inner cutoff"  $c_i$  und "outer cutoff"  $c_o$
- wie bestimmt man diese kritischen Schranken?
- bei Bestimmung der Box-Dim. als Geradensteigung kommt als weiterer Parameter noch ein Interzept  $a$  hinzu
- man kann  $N$  nur für endlich viele Gitter-Maschenweiten bestimmen: für welche?
  - statistische Probleme, da die Messungen für die einzelnen Maschenweiten nicht stochastisch unabhängig voneinander sind
- weiterer Parameter: Korrelationskoeffizient



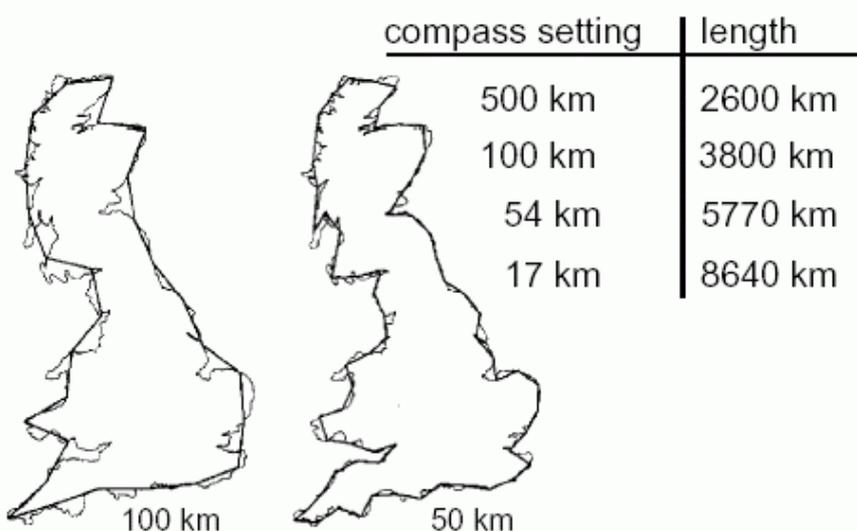
*weitere Messmethoden zur Dimensionsbestimmung:*

- Richardson Plot Method  
Umfahren des (in die Ebene eingebetteten Objekts) mit einem Lineal vorgegebener Länge  
Umfang des approximierenden Polygons ändert sich gesetzmäßig mit der Lineal-Länge  
Steigung im log-log-Plot = Dimension



klassisches Beispiel: Länge der Küste von Großbritannien

Measuring the Coast of Britain



- Auswertung einer Radius-Anzahl-Relation:

i. Ggs. zur Richardson-Plot-Methode ist die Länge der approximierenden Polygonkanten hier fest (z.B. die kleinstmögliche Auflösung der Messung)  
 es wird (doppelt log.) aufgetragen, wieviele Bauelemente (Polygonkanten) in einem Kreis mit Radius  $r$  um ein festes Element liegen (Steigung = fraktale Dim.)

- indirekte Bestimmung aus dem Porenvolumen

$$V_p(r) = c \cdot ((D_f - D_t) / (D_e - D_t))^{(D_e - D_t)} \cdot r^{(D_e - D_f)}$$

darin ist  $r$  der Porenradius

$D_f$  die gesuchte fraktale Dim.

$D_e$  die Einbettungsdimension (3 oder 2)

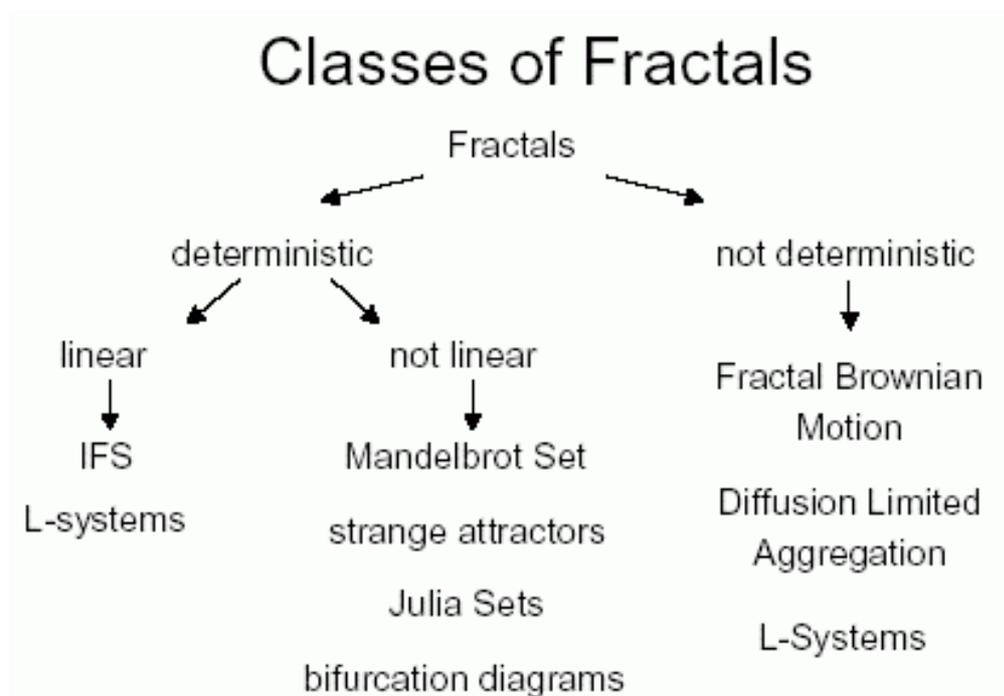
$D_t$  die topologische Dim. des Objekts (2 oder 1)

(Anwendung in der Chemie heterogener Substanzen)

- und weitere indirekte Methoden

## Typen von Fraktalen

häufige Klassifikation: nach der Art ihrer Erzeugung



klassische Beispiele für Fraktale aus der Mathematik:  
Julia-Mengen und die Mandelbrot-Menge

Julia-Mengen schon in den 20er Jahren des 20. Jh. bekannt, aber erste korrekte Visualisierungen erst Ende der 70er Jahre ("Wiederentdeckung" durch Mandelbrot, gefeierte Grafik-Ausstellung von Peitgen et al.)

Julia-Mengen beruhen auf iterierten *nichtlinearen* Funktionen in der komplexen Zahlenebene

am häufigsten verwendet:

das quadratische Polynom  $f(z) = z^2 + c$  ( $c \in \mathbb{C}$ )

Iteriertenfolge:  $z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \dots$

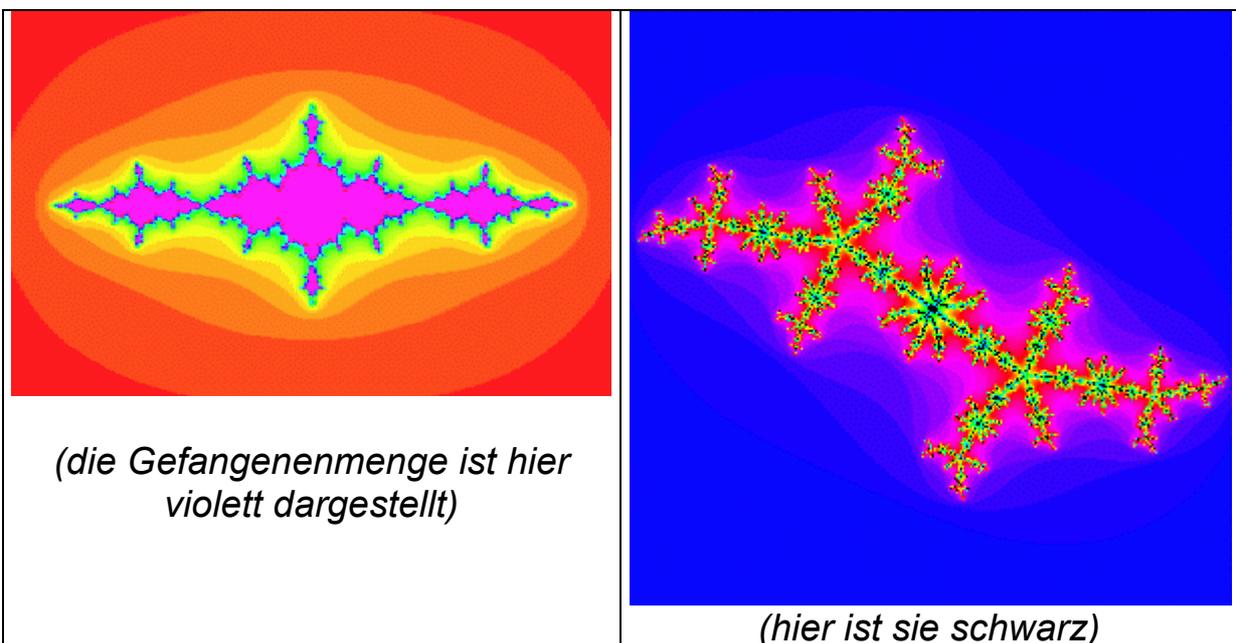
zu gegebenem  $c \in \mathbb{C}$  def. man:

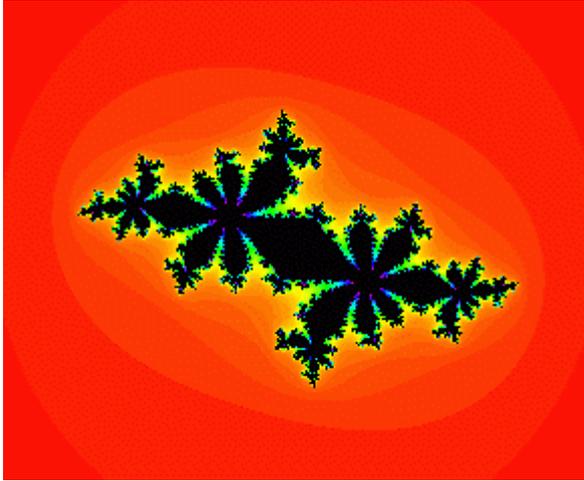
- Fluchtmenge von  $c$ : Menge aller Startwerte  $z$ , für die die Werte der Iteriertenfolge dem Betrage nach unbeschränkt wachsen (d.h. jeden Kreis um den Ursprung irgendwann verlassen)
- Gefangenenmenge  $J_G$  von  $c$ : Menge aller Startwerte  $z$ , für die die Iteriertenfolge beschränkt bleibt

die Fluchtmenge kann zusätzlich gefärbt werden mit einem Maß für die Geschwindigkeit der Divergenz (etwa den Betrag nach 10 Iterationsschritten).

**Julia-Menge** von  $c$ :  $\partial J_G = \text{Rand der Gefangenenmenge von } c$   
= Rand der Fluchtmenge von  $c$ .

Beispiele:





Julia-Mengen sind in einem schwächeren Sinn selbstähnlich als die bisher betrachteten Fraktale: Invarianz unter *nichtlinearen* Transformationen! (nämlich unter  $f, f^{\circ}f, \dots$ )

Visualisierung von Julia-Mengen:

### *Boundary-Scanning-Algorithmus*

- wähle ein geeignetes quadratisches Gitter (z.B. in der Größenordnung der Bildschirmauflösung), überdecke damit einen Bereich, der alle  $z$  mit  $|z| > \max(|c|, 2)$  umfasst enthält eine Gitterzelle Teile der Julia-Menge, so enthält sie sowohl Punkte mit beschränkter als auch Punkte mit unbeschränkter Iteriertenfolge
- zur Vereinfachung betrachtet man nur Eckpunkte von Gitterzellen  $G$
- wenn für alle 4 Eckpunkte von  $G$  die Iteriertenfolge unbeschränkt ist:
  - nehme an, dass die ganze Zelle  $G$  zur Fluchtmenge (und nicht zur Julia-Menge) gehört
- sonst:  $G$  enthält Punkte der Gefangenenmenge, wird mit vorgegebener Farbe gefärbt

Unterprozedur: Prüfung der Beschränktheit der Iteriertenfolge:  
iteriere  $f$ , bis maximale Iterationszahl  $N_{\max}$  erreicht ist oder der Betrag eines während der Iteration berechneten Punktes größer als  $\max(|c|, 2)$  ist. (Im ersten Fall wird die Folge als beschränkt angenommen, im zweiten Fall ist sie unbeschränkt).

## Level-Set-Methode

Die Gefangenenmenge liegt innerhalb eines Kreises  $S_0$  mit Radius  $\max(|c|, 2)$  um den Ursprung:  $S_0$  als erste Approximation.

$k$ -te Approximation:  $S_k = \{ z \mid f^k(z) \in S_0 \}$ ,  $k$ -ter *level set*

Die Folge der Mengen  $S_k$  konvergiert gegen die Gefangenenmenge (ausgefüllte Julia-Menge).

Die Elemente von  $S_k - S_{k-1}$  benötigen dieselbe Zahl von Iterationsschritten, um in das Komplement von  $S_0$  zu gelangen.

Algorithmus: ordne jedem Pixel eines geeignet feinen Gitters einen ganzzahligen *level* zu:

$$L(z) = k, \text{ falls } f^k(z) \notin S_0 \text{ und } f_{k-1}(z) \in S_0; \quad 0 \text{ sonst.}$$

$L$  heißt auch "escape time function".

Punkte mit unterschiedlichen *levels* werden unterschiedlich gefärbt; die schwarz bleibenden Punkte gehören zur Gefangenenmenge.

## Die Mandelbrot-Menge ("Apfelmännchen")

"der komplexeste Gegenstand der Mathematik" (John Hubbard)

erstmalig beschrieben von Mandelbrot 1978

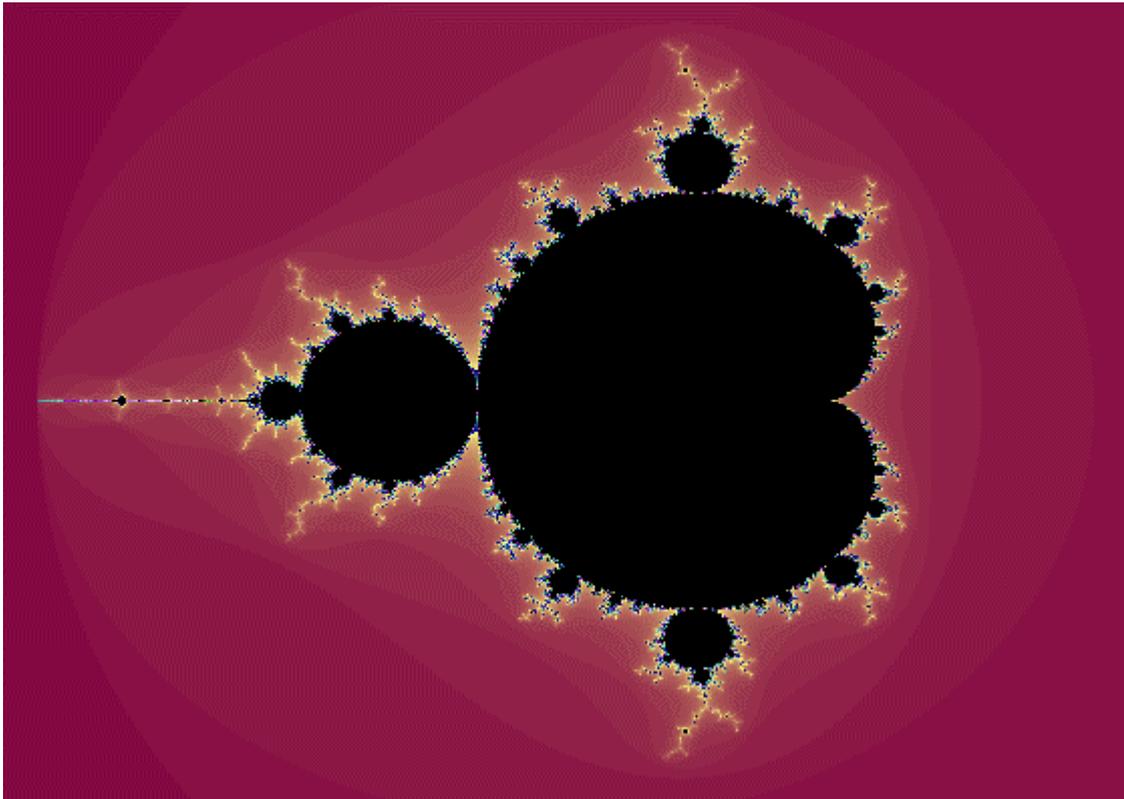
Def.:  $M = \{ c \in \mathbb{C} \mid \text{die Folge } 0, f(0), f^2(0), \dots \text{ ist beschränkt} \}$ .

Gleichwertige Def.:

$M = \{ c \in \mathbb{C} \mid \text{die Julia-Menge von } c \text{ ist zusammenhängend} \}$ .

Eigenschaften von  $M$ :

- $M$  ist symmetrisch zur reellen Achse ( $x$ -Achse)
- $M$  ist beschränkt (durch  $|c| \leq 2$ ) und abgeschlossen
- der reelle Anteil von  $M$  ist das Intervall  $[-2; 1/4]$
- $M$  ist zusammenhängend
- $\partial M$  ist ein Fraktal mit Hausdorff-Dim. 2 (M. Shishikura)
- $M$  enthält unendlich viele kleine "näherungsweise" Kopien von sich selbst
- in der Umgebung jedes Punktes  $c$  hat  $M$  "Ähnlichkeit" mit der Julia-Menge von  $c$

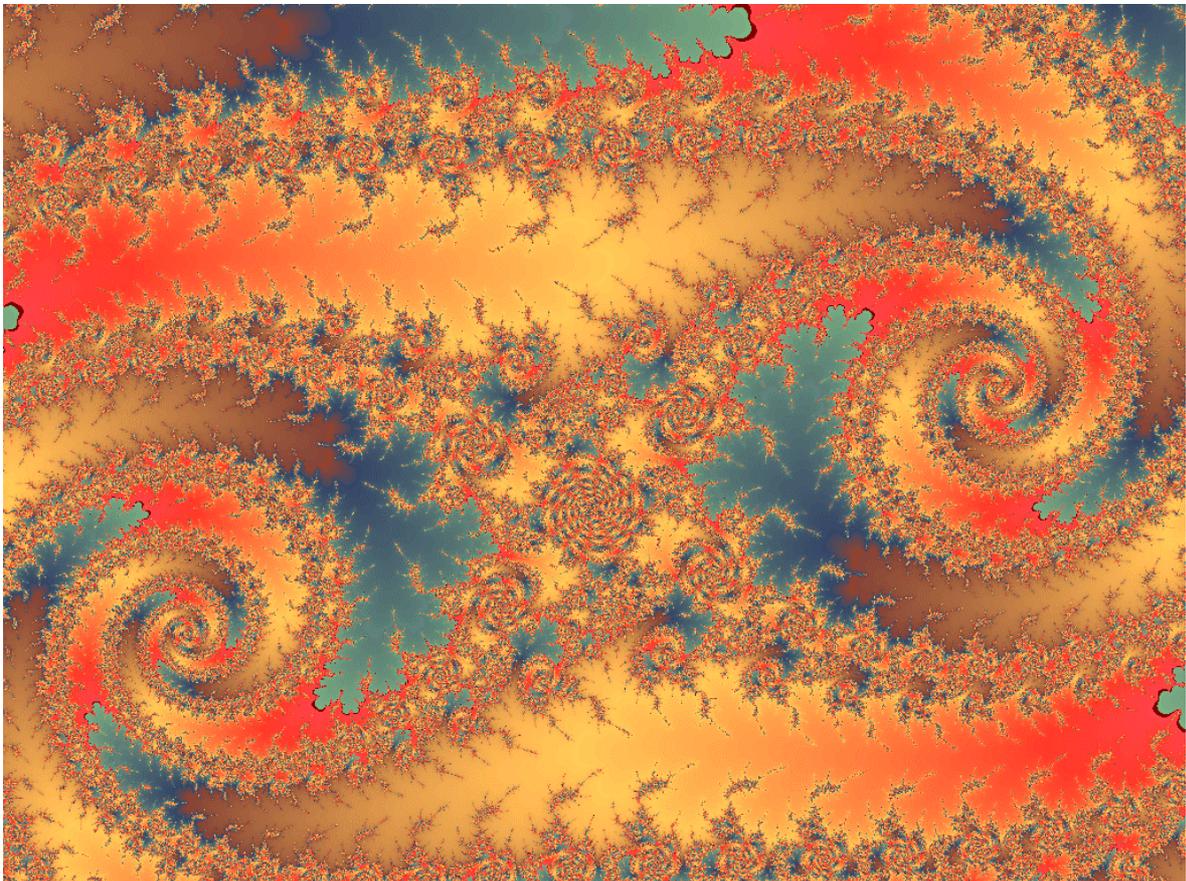
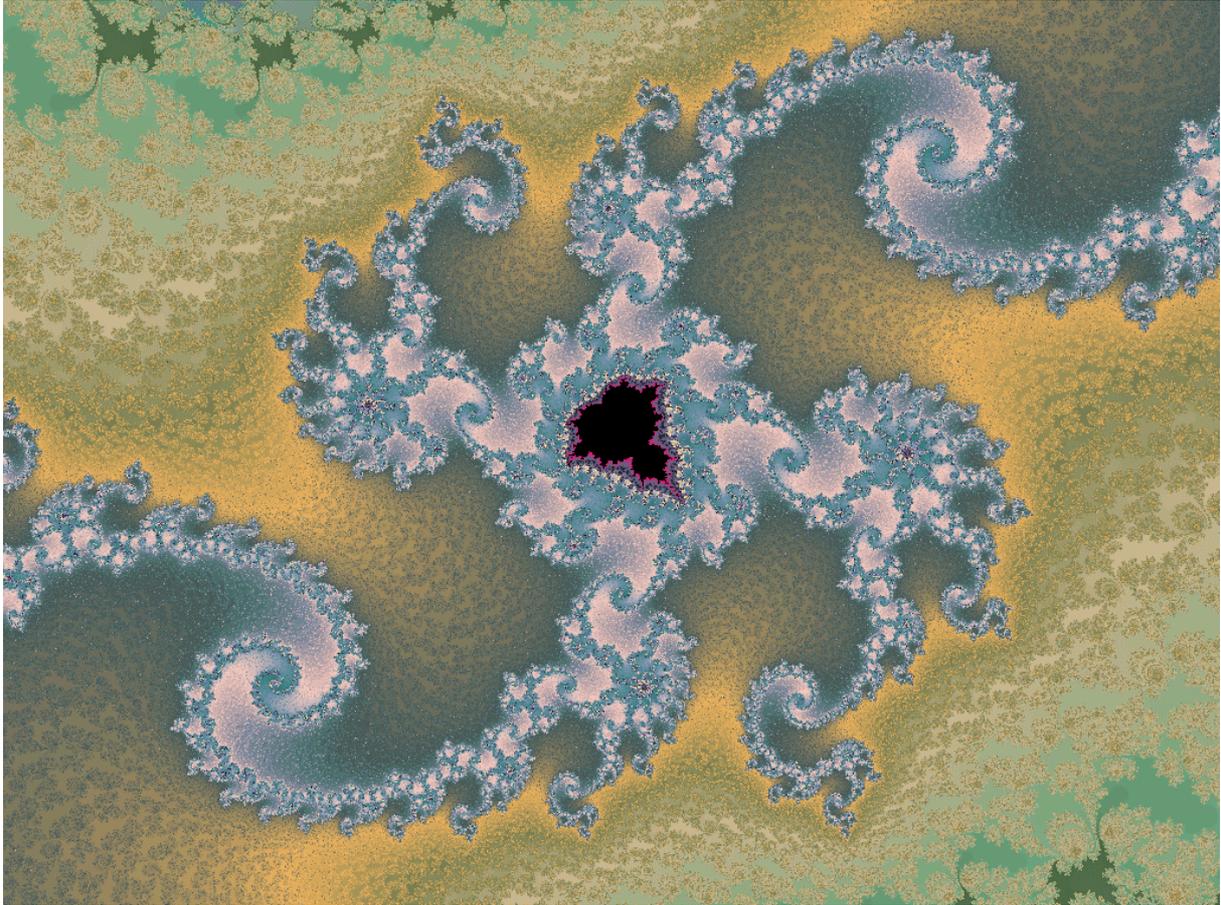


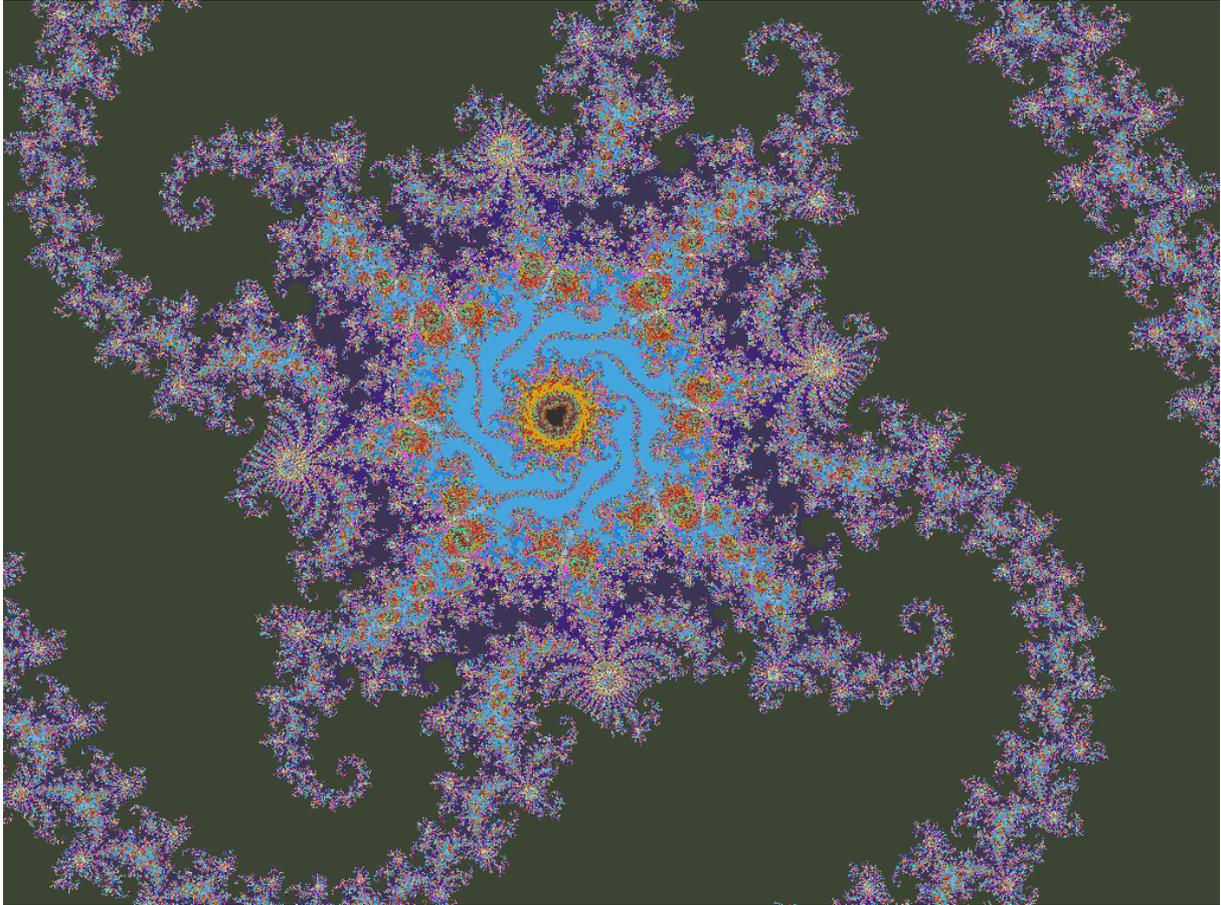
*Level-Set-Methode zur Visualisierung der Mandelbrot-Menge*  
(analog zur Level-Set-Methode für Julia-Mengen):

man untersucht, für welche Werte von  $c$  die Iteriertenfolge der 0 beschränkt bleibt

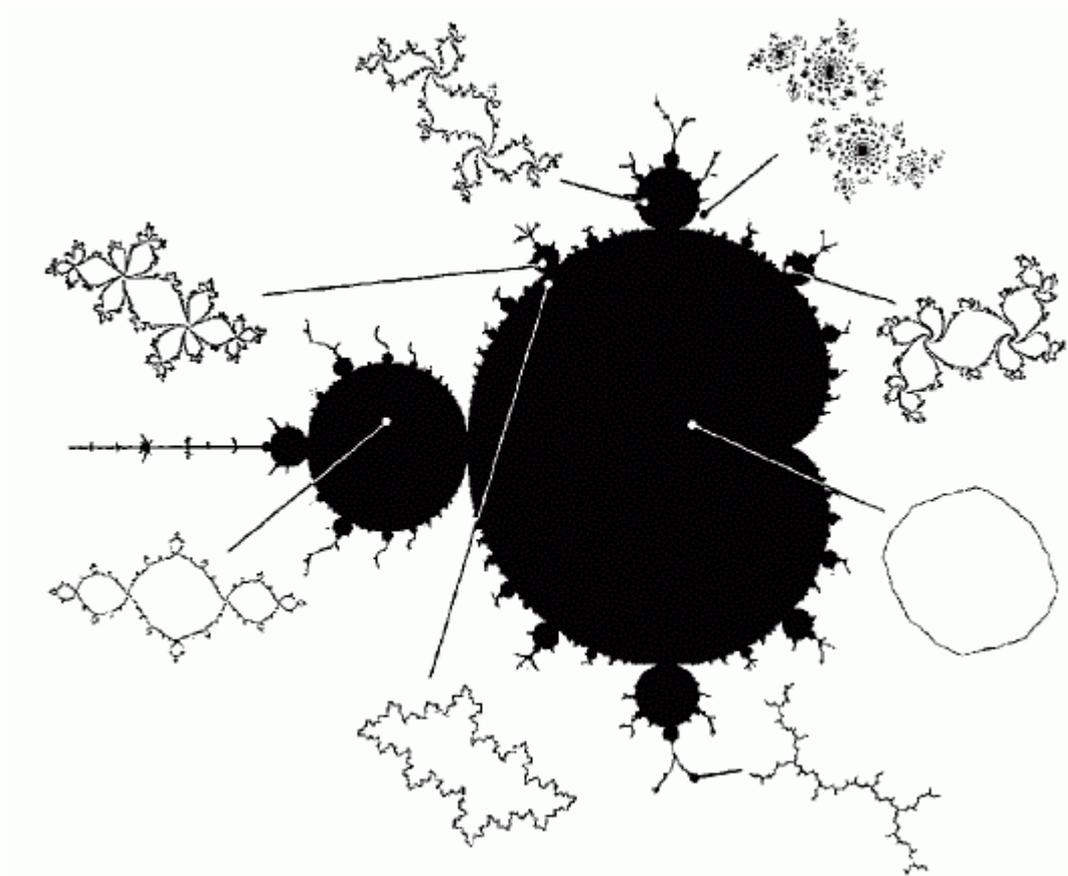
- bestimme Anzahl der Iterationen, die nötig sind, um eine bestimmte Zielmenge um  $\infty$  zu erreichen
- für Werte in  $M$  ist diese Zahl unendlich groß, d.h. man bricht nach vorgegebener Höchstzahl von Schritten ab
- für Werte  $c \notin M$  ist die Zahl der Iterationen endlich und kann zur Farbdefinition für das Außengebiet verwendet werden

die folgenden "Zooms" in die Mandelbrot-Menge beruhen i. wesentl. auf dieser Methode





Beziehungen zu den Julia-Mengen:

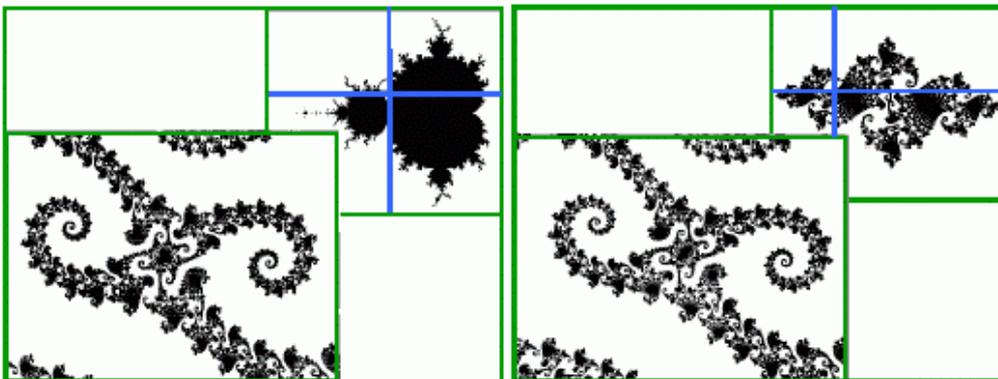


Mandelbrot und Julia Set Explorer (interaktiv):

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/julia/explorer.html>

<http://www.unca.edu/~mcmclur/java/Julia/>

lokale Ähnlichkeit zur Julia-Menge:



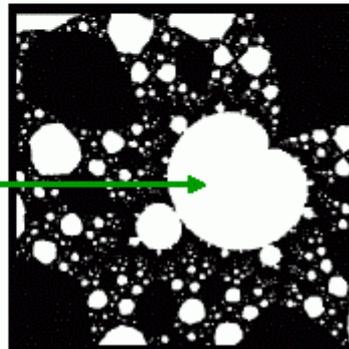
Die Mandelbrot-Menge taucht auch bei anderen Funktionen als  $f(z) = z^2+c$  auf:

## Structural Stability of M

**Example:**  $\{C, r_c\}$   $r_c = ((z^2+c-1) / (2z+c-2))^2$

- $r_c$  describes magnetic phase transitions
- Attractive fixpoints:  $1, \infty$
- Examine the orbit  $0 \rightarrow r_c(c) \rightarrow r_c^2(c) \rightarrow \dots$  for all  $c$  and draw a map

What does M there ?



Verschiedene Methoden zur effizienteren Visualisierung von  $M$  wurden vorgeschlagen, u.a. adaptive Quadtree-Partitionierung:

