

## 9. Parametrische Kurven und Flächen

Polylinien bzw. Polygone sind stückweise *lineare* Approximationen für Kurven bzw. Flächen

Nachteile:

- hohe Zahl von Eckpunkten für genaue Repräsentation erforderlich
- interaktive Manipulation schwierig

Suche nach kompakteren und einfacher manipulierbaren Repräsentationen

⇒ "Freiformflächen", -kurven

insbesondere:

stückweise *polynomiale* Kurven bzw. Flächen

Geschichtlicher Hintergrund:

- ab ca. 1958 Anwendungen von Freiformflächen im CAD-Bereich, insbes. im Automobil-Karosseriebau
- **Pierre Bézier** (Renault): parametrische Repräsentation auf der Basis von Bernstein-Polynomen: System UNISURF
- **P. de Casteljau** (Citroen)

Welche Repräsentationen von Kurven und Flächen gibt es?

Formen der Darstellung von Kurven oder Flächen:

- **explizit**
- **implizit**
- **Parametrisch**

Kurze Diskussion am Beispiel der Kurven:

## Explizite Darstellung

◆  $y = f(x)$

◆ Bsp.:  $y = \sqrt{x^3} - \sqrt{x}$

◆ Probleme:

- Für ein  $x$  darf es nur einen  $y$  Wert geben (Probleme z.B. ist ein Kreis nicht geschlossen darstellbar)
- Beschreibung nicht invariant gegenüber Rotationen
- Keine Kurven mit (echt) vertikalen Tangenten möglich (impliziert unendliche Steigung)

## Implizite Darstellung

◆  $f(x,y) = 0$

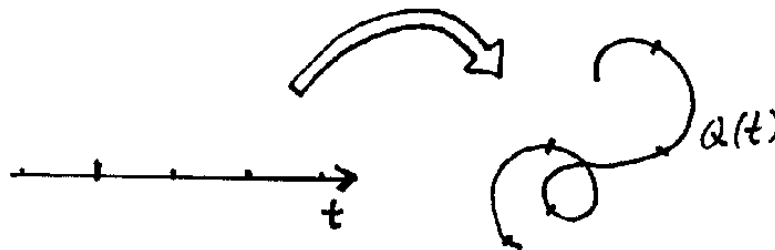
◆ Bsp.:  $x^3 - 2x^2 + x - y^2 = 0$

◆ Probleme:

- Gleichung kann mehr Lösungen als gewollt haben, was zur Notwendigkeit von Randbedingungen führt
- Richtung der Tangente ist schwer zu ermitteln

## Parametrische Darstellung

- ◆  $Q(t) = (x(t), y(t))$
- ◆ Bsp.:  $Q(t) = (t^2, t^3 - t)$
  
- ◆ Vorteile:
  - Keine Mehrdeutigkeiten
  - Geometrische Steigungen (potentiell unendlich) werden durch Tangentenvektoren (niemals unendlich) ersetzt
  - Invarianz gegenüber Rotationen
- ◆ Wir verwenden daher im folgenden nur die **parametrische Darstellung**



Parametrische Kurven sind i.d.R.

- (ganz rationale) Polynome
- gebrochen rationale Polynome

n-ten Grades (n: höchster auftretender Exponent),  
z.B.

$$Q(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + \dots + p_k u^k$$

In der CG werden ganz überwiegend kubische  
(also  $k=3$ ) Repräsentationen genutzt:

Definition einer 3D-Kurve durch stückweise Spezifikation dreier kubischer Polynome  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  mit dem Parameter  $t$ .

- Definition eines Kurvensegmentes  $Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$  durch ( $t \in [0, 1]$ ):

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

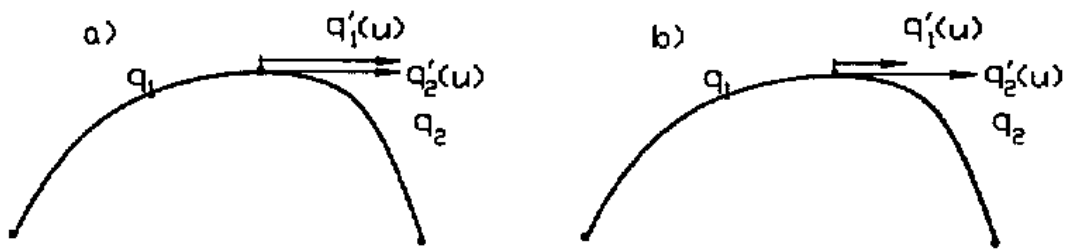
- andere Repräsentation:  $Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = T \cdot C$  mit:

$$C = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]$$

## Übergangsstellen

zwei aneinander hängende Kurvensegmente sind:

- $G^0$  stetig  $\Leftrightarrow$  verbunden
- $G^1$  stetig  $\Leftrightarrow$  Steigungen stimmen überein (Tangentenvektoren),  
 $TV_1 = k TV_2$
- $G^n$  stetig  $\Leftrightarrow$   $n$ -ten Ableitungen stimmen in Richtung überein
- $C^n$  stetig (parametrische Stetigkeit)  $\Leftrightarrow$   $n$ -te Ableitungen stimmen in Richtung und Länge überein



links:  $C^1$ -stetiger Übergang, Richtung und Länge der Tangentenvektoren von 2 aufeinanderfolgenden Kurvensegmenten stimmen überein.

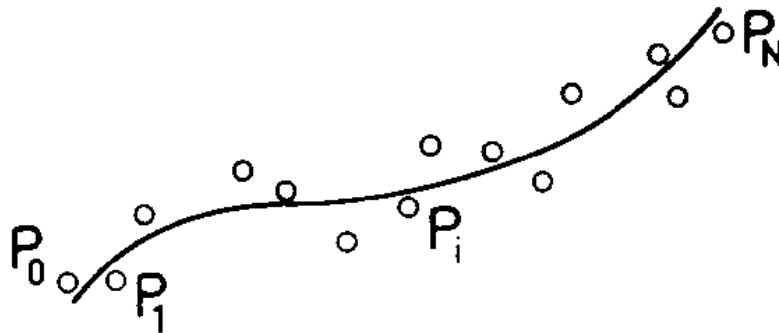
rechts:  $G^1$ -stetiger Übergang, nur die Tangentenrichtungen stimmen überein (in der Praxis meist ausreichend, da kein Unterschied im Aussehen der Kurve).

$G^2$ -Stetigkeit bedeutet: die Kurve ist stetig, die Tangenten besitzen an den Übergangsstellen dieselbe Richtung und die Krümmungsvektoren stimmen dort überein.

## Typen der Darstellung von Kurven (und Flächen)

- ◆ Exakte Darstellung
  - Jeder Punkt ist durch eine Formel definiert
  - Problem: Formel ist meist nicht bekannt oder zu komplex
- ◆ Interpolatorische Darstellung
  - Kurve ist durch Stützstellenbedingungen beschrieben
  - Kurve ist an den Stützstellen determiniert
- ◆ Approximative Darstellung
  - Kurve ist durch Stützstellenbedingungen beschrieben
  - Kurve ist an den Stützstellen nicht determiniert

Prinzip der Approximation:



- Gesucht sind die Koeffizienten eines Polynoms  $P(t)$  derart, daß  $P(t_i) = P_i$  für alle Stützpunkte  $P_i$  gilt
- Für  $n+1$  paarweise verschiedene Stützpunkte gibt es genau ein Polynom vom Grad  $n$ , das die obige Bedingung erfüllt
- Nachteil: Berechnung der Koeffizienten ist aufwendig
- Nachteil: Änderung eines Stützpunktes bedingt Neuberechnung aller Koeffizienten

**Interpolation** mit Polynomen:

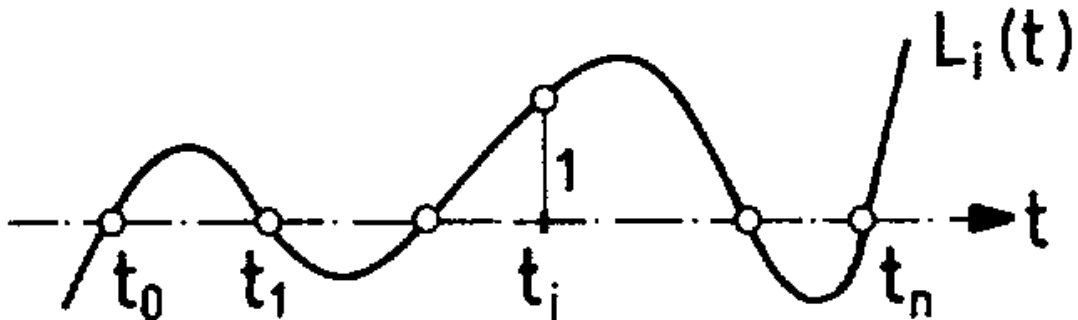
Eine mittels der Stützpunkte gewichtete Summe von sog. *Lagrange-Polynomen* liefert genau das Polynom, das durch alle  $P_i$  verläuft (**Lagrange-Interpolation**):

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot L_{n,i}(t)$$

( $P_i$  : gegebene Punkte,  $t_i$  : entspr. Stützstellen,  $i = 0, 1, \dots, n$ )

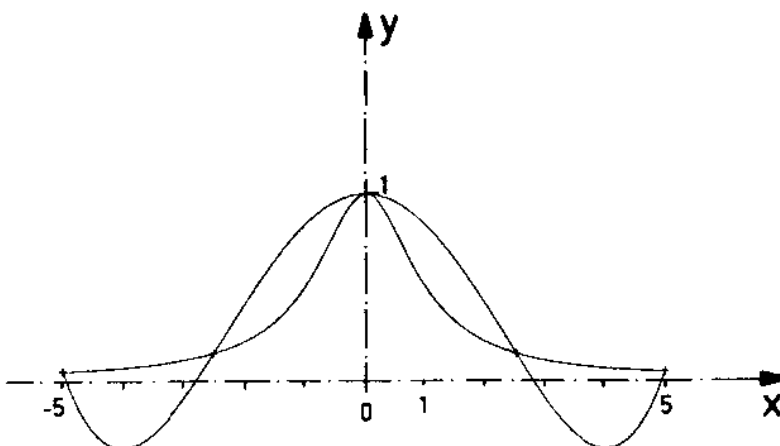
$$\text{mit } L_{n,i}(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Die Lagrange-Polynome  $L_{n,i}(t)$  haben die Eigenschaft, an der Stützstelle  $t_i$  den Wert 1 zu liefern und an allen anderen Stützstellen 0:

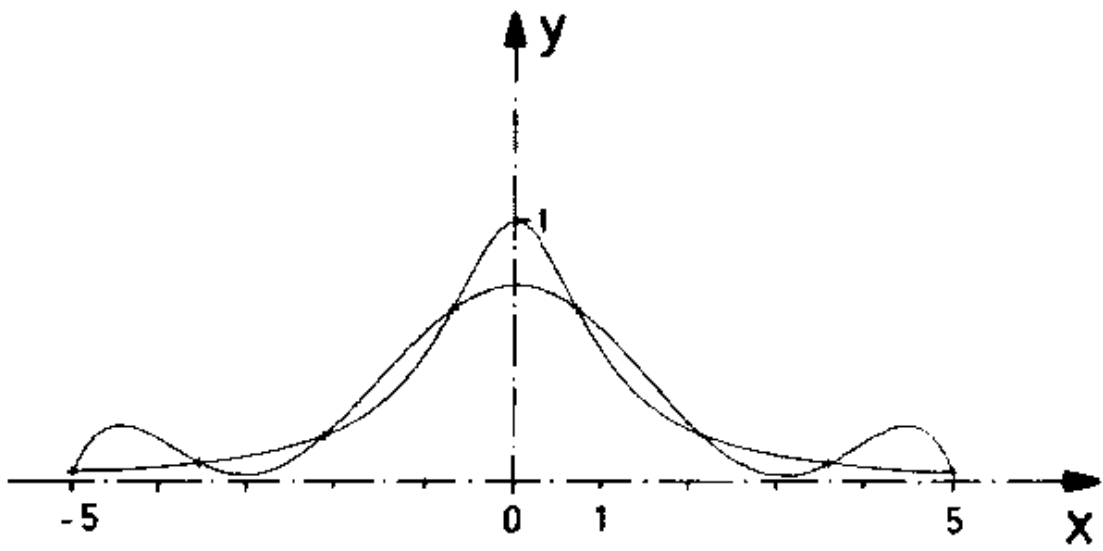


- bei Hinzufügen eines weiteren Stützpunktes müssen alle Koeffizienten neu berechnet werden
- "globales Verfahren": bei einer lokalen Änderung, z.B. eines einzelnen Stützpunktes, kann sich die Gestalt der ganzen Kurve ändern
- genereller Nachteil der Interpolation mit Polynomen höheren Grades: **Oszillationen**

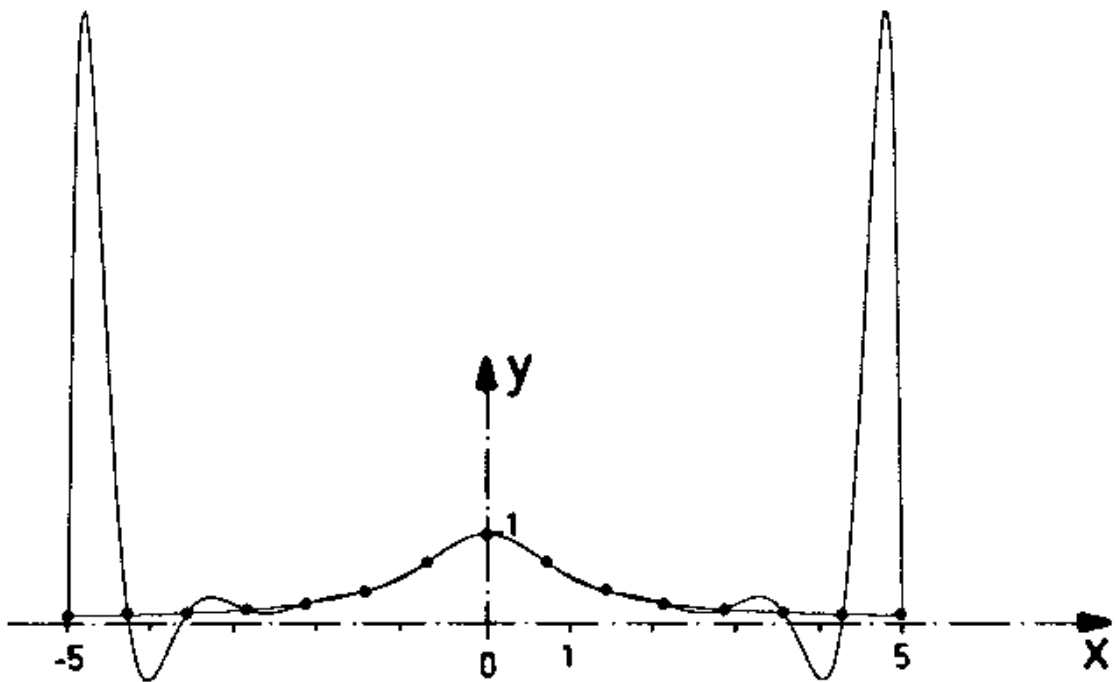
Beispiel: Interpolation des Funktionsgraphen von  $y = 1/(1+x^2)$  zwischen  $-5$  und  $5$



*Polynom 4. Grades*



*Polynom 7. Grades*



*Polynom 14. Grades*



- weiterer Nachteil: bei der Interpolation durch ein Polynom  $n$ -ten Grades weicht die Tangente stellenweise stark von der Tangente der darzustellenden Kurve ab

Abhilfe für den letzten Punkt:

man gibt neben den Stützpunkten auch die ersten  $m$  Ableitungen an den Stützpunkten vor und wählt das Polynom so, dass auch diese übereinstimmen.

für einzelnes Kurvensegment:

gegeben:  $P_0^{(k)}, P_1^{(k)}$  ( $k = 0; 1; \dots; m$ ) (Werte der Ableitungen an den beiden Stützstellen).

Der Parameterbereich sei  $[t_0, t_1]$  ( $t_0 < t_1$ ).

Ansatz für dieses Segment:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^1 \sum_{k=0}^m P_i^{(k)} \cdot H_{i,k}(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

darin sind die  $H_{i,k}(t)$  die sog. *Hermite-Interpolationspolynome* vom Grad  $2m+1$ .

Für diese gilt (in Analogie zu den Lagrange-Polynomen) die

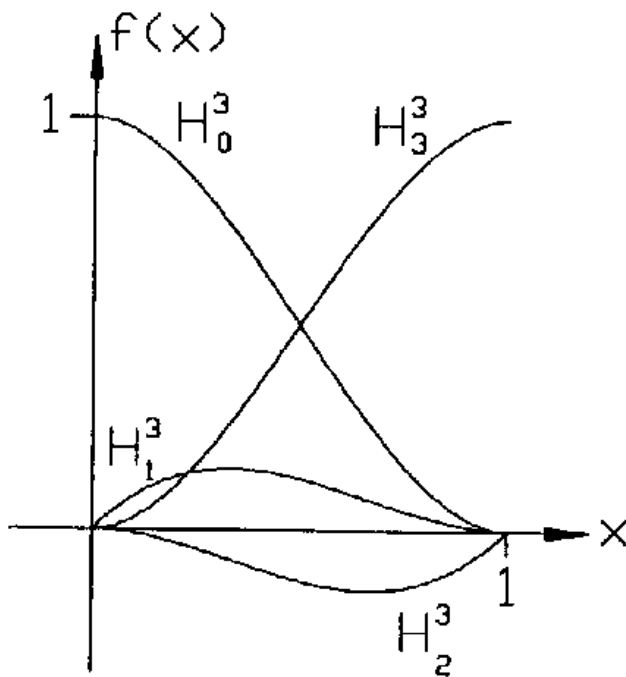
$$\forall i, j \in \{0; 1\}, \quad k, r \in \{0; 1; \dots; m\}: \quad \left. \frac{d^r}{dt^r} H_{i,k}(t) \right|_{t=t_j} = \delta_{i,j} \cdot \delta_{k,r}$$

$$(\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases})$$

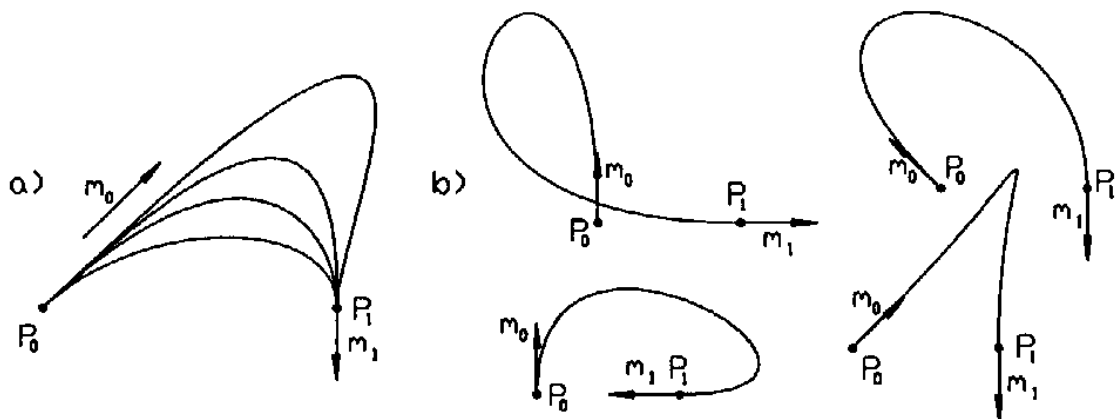
Eigenschaft:

Durch diese Gleichungen sind die  $H_{i,k}$  als Polynome  $2m+1$ -ten Grades eindeutig bestimmt.

Das folgende Diagramm zeigt die Hermite-Polynome vom Grad 3 über dem Intervall  $[0; 1]$  (hier mit 0; 1; 2; 3 indiziert, entspr.  $H_{0,0}, H_{0,1}, H_{1,1}, H_{1,0}$ ):



Durch die Vorgabe der Ableitungen, insbes. der ersten Ableitung (Tangentenvektor), kann der Kurvenverlauf besser gesteuert werden als allein durch die Positionen an den Stützstellen:



a) Variation der Länge des Tangentenvektors im Anfangspunkt des Kurvensegments

b) die Richtungen der beiden Tangenten in den Endpunkten werden variiert

zur Vermeidung von Oszillationen und globalen Auswirkungen bei lokalen Änderungen:

Zerlegung in Teilintervalle mit *verschiedenen*, nur begrenzt voneinander abhängigen Interpolationskurven

→ Idee der *Spline-Kurven*

## Splines

*spline* (engl.): dünner Stab, von Schiffsbauern benutzt, um die richtige Form der "stringer" zu konstruieren (Planken, die in Schiffs-Längsrichtung quer zu den Spanten angebracht werden und die Außenwand des Rumpfes bilden)

Entspr. deutsches Wort: "Straklatte",

daher in der älteren dt. Lit. für Splinefunktionen z.T. auch "Strakfunktionen".

Seien  $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , Funktion  $S$  def. auf  $[t_0, t_n]$ .

### Def.:

$S$  heißt *Splinefunktion* der Ordnung  $k$  (oder vom Grad  $k-1$ ), wenn gilt:

(1)  $S$  ist in jedem Teilintervall  $[t_r, t_{r+1}]$  ein Polynom vom Grad  $k-1$ .

(2)  $S$  und die Ableitungen  $S^{(m)}$ ,  $m = 1; \dots; k-2$ , sind stetig auf  $[t_0, t_n]$ .

$S$  heißt *Sub-Splinefunktion*, wenn (1) gilt,  $S$  stetig ist, (2) aber nicht gilt.

## Kubische Splines

$k = 4$ , also Polynomsegmente vom Grad 3, zweimal stetig differenzierbar.

Eine kubische Splinefunktion beschreibt näherungsweise die Biegelinie eines dünnen Stabes durch eine vorgegebene Reihe von festen Stützhaken.

(Lösung d. Euler-Lagrange-Gleichung, Variationsrechnung, s. Hoschek & Lasser 1992)

Kubische Splines benutzen auf den Teilintervallen Hermite-Interpolationspolynome vom Grad  $3 = 2m+1$  ( $m = 1$ ).

Gegeben:  $n+1$  Punkte  $P_r^{(0)}$ ,  $r = 0; \dots; n$  ( $n > 0$ );  
 Stützstellen  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ .

Auf dem Teilintervall  $[t_r, t_{r+1}]$ : Hermite-Interpolation 3. Grades

$$Q_r(t) = \sum_{i=r}^{r+1} \sum_{k=0}^1 P_i^{(k)} \cdot H_{i,k}(t) = (t^3; t^2; t; 1) \cdot M_H \quad (t \in [t_r, t_{r+1}])$$

darin ist  $M_H$  die sog. Hermite-Matrix (4,3-Matrix)  
 (beachte: die  $P_i^{(k)}$  werden hier als Zeilenvektoren interpretiert!)  
 $M_H$  ist unabhängig von  $t$ .

Die Berechnung von  $M_H$  erfolgt durch Einsetzen von  $t_r$  und  $t_{r+1}$  in die obige Gleichung und in die einmal differenzierte Version der obigen Gleichung. Diese 4 Einsetzungsoperationen zusammengefasst liefern:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_r^{(0)} \\ P_{r+1}^{(0)} \\ P_r^{(1)} \\ P_{r+1}^{(1)} \end{bmatrix}}_K = \begin{bmatrix} t_r^3 & t_r^2 & t_r & 1 \\ t_{r+1}^3 & t_{r+1}^2 & t_{r+1} & 1 \\ 3t_r^2 & 2t_r & 1 & 0 \\ 3t_{r+1}^2 & 2t_{r+1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot M_H \Rightarrow M_H = K^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_r^{(0)} \\ P_{r+1}^{(0)} \\ P_r^{(1)} \\ P_{r+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Zur Vereinfachung nehmen wir an:  $t_r = 0$ ,  $t_{r+1} = 1$   
 (dies lässt sich ggf. durch lineare Transformation des Parameterbereichs erreichen). Dann vereinfacht sich  $K$ :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daraus lassen sich die Hermite-Polynome, und damit die Splinefunktion, berechnen:

$$Q(t) = [t^3; t^2; t; 1] \cdot K^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_r^{(0)} \\ P_{r+1}^{(0)} \\ P_r^{(1)} \\ P_{r+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$H_{r,0}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_{r+1,0}(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_{r,1}(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_{r+1,1}(t) = t^3 - t^2$$

$$Q_r(t) = A_r \cdot t^3 + B_r \cdot t^2 + C_r \cdot t + D_r$$

mit  $A_r = 2(P_r^{(0)} - P_{r+1}^{(0)}) + P_r^{(1)} + P_{r+1}^{(1)}$

$$B_r = 3(P_{r+1}^{(0)} - P_r^{(0)}) - 2P_r^{(1)} - P_{r+1}^{(1)}$$

$$C_r = P_r^{(1)}$$

$$D_r = P_r^{(0)}$$

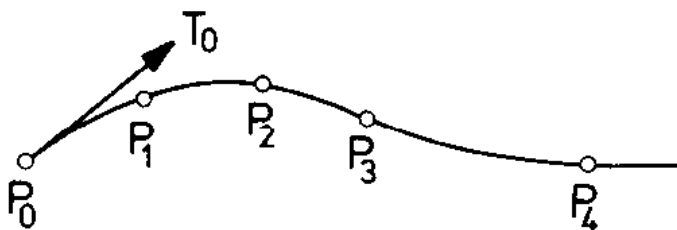
Eine explizite Vorgabe der 1. Ableitungen auch in den inneren Stützstellen ist i. allg. nicht sinnvoll

- fordere stattdessen: Stetigkeit der 1. Ableitung (siehe Def. der Spline-Funktionen)

$2n$  Werte bislang unbestimmt (für jedes Segment die 1. Ableitungen in den beiden Endpunkten)  
Stetigkeitsforderung liefert  $n-1$  weitere Bedingungen  
 $\Rightarrow n+1$  Koeffizienten immer noch unbestimmt

fordere zusätzlich die Stetigkeit der 2. Ableitung  
liefert  $n-1$  weitere Bedingungen  
 $\Rightarrow 2$  Koeffizienten immer noch unbestimmt

man gibt die 1. Ableitung in den Endpunkten vor



$\Rightarrow$  liefert Bestimmungsgleichungen für die restlichen 2 Koeffizienten

Berechnung der Koeffizienten für die kubischen Polynome in den Teilintervallen läuft auf Lösen eines lin. Gleichungssystems heraus!

*Zusammenfassung zur stückweisen Polynom-Interpolation*  
 (gilt entsprechend auch für Approximationsansätze):

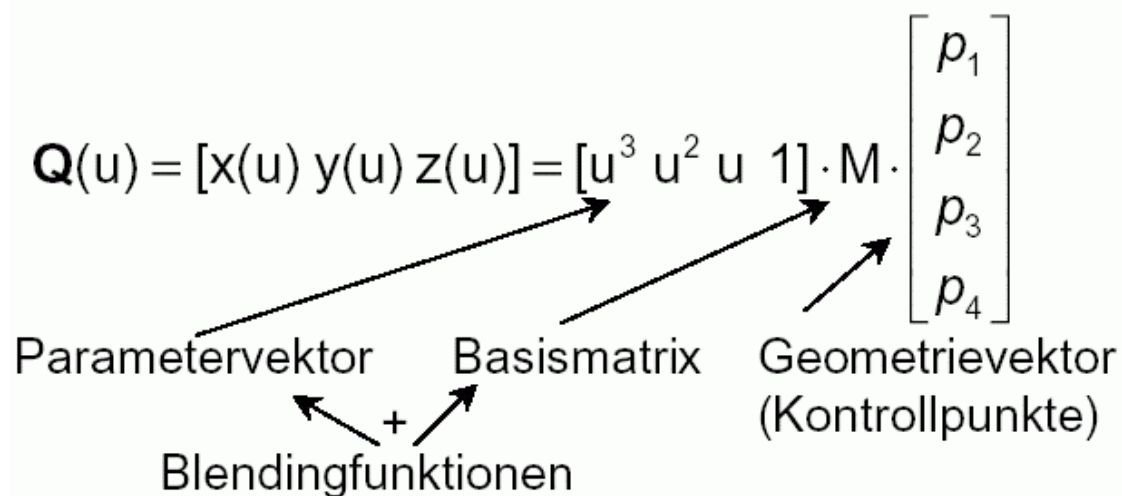
- Grad  $n = 1$ :  
 Polygonzug, unstetige Steigungen an den Eckpunkten
- Grad  $n = 2$ :  
 In 3D können nur planare Kurven erhalten werden  
 (d.h. Kurve liegt immer in einer Ebene)
- **Grad  $n = 3$  (übliche Wahl)**  
 Die vier Koeffizienten können z.B. durch Startpunkt,  
 Endpunkt, Tangente am Startpunkt, Tangente am  
 Endpunkt gegeben werden
- Grad  $n > 3$ :  
 Rechenaufwendig, nur in speziellen Anwendungen  
 — benutzt

## Allgemeine Darstellung für $k=3$

$$Q(u) = \sum_{i=0}^k p_i b_i(u)$$

mit  $b_i(u)$ : Basisfunktionen

$p_i$ : Kontrollpunkte



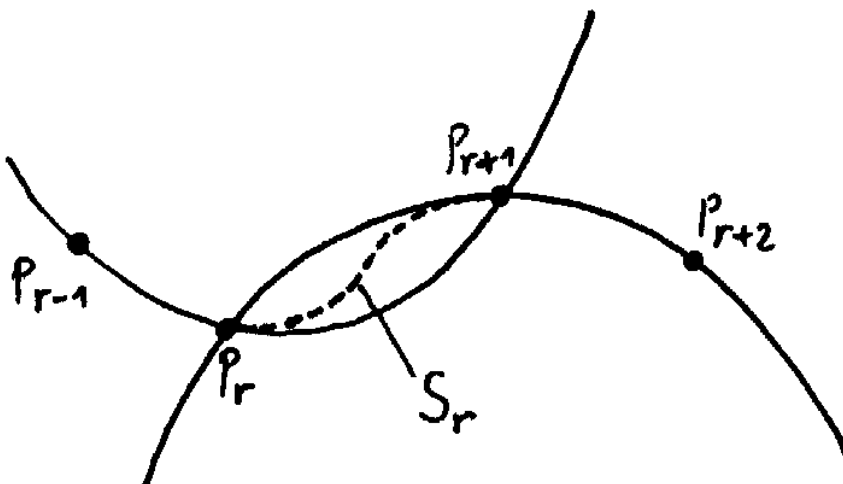
- ◆ Der erste Faktor ist der Parametervektor  $U$
- ◆ Der zweite Faktor, die  $4 \times 4$  Matrix  $M$  heißt **Basismatrix**
- ◆ Der dritte Faktor heißt **Geometrievektor  $G$** , die  $G_i$  sind geometrische Nebenbedingungen (z.B. Punkte oder Tangentenvektoren)
- ◆ Das Produkt aus  $U$  und  $M$  ergibt die *Blendingfunktionen* (diese gewichten die geometrischen Nebenbedingungen  $G_i$ )

*Ergänzung:*

Einfaches Interpolationsverfahren für 2D-Anwendungen:  
*Parabolic Blending*

Es seien  $n+1$  Punkte  $P_0, P_1, \dots, P_n$  im  $\mathbb{R}^2$  gegeben ( $n > 2$ ).

Idee: Man bestimmt für je 3 aufeinanderfolgende Punkte das Lagrange-Polynom 2. Grades (Parabel) und bildet zwischen je 2 Punkten eine gewichtete "Mittel-Kurve"  $S_r$  aus den beiden überlappenden Parabeln:





Parabeln  $Q_r$  :

$$Q_r(0) = P_r$$

$$Q_r(1) = P_{r+1}$$

$$Q_{r+1}(0) = P_r$$

$$Q_{r+1}(1) = P_{r+1}$$

die gesuchte Kurve  $S_r$  als gewichtetes Mittel der Parabeln:

$$S_r(t) = (1 - t) Q_r(t) + t Q_{r+1}(t) \quad (t \in [0; 1].)$$

Damit: Stetigkeit der aus den  $S_r$  zusammengesetzten Kurve und der 1. Ableitung.

Randfälle: Kurvenstücke zwischen  $P_0$  und  $P_1$  sowie zwischen  $P_{n-1}$  und  $P_n$ , dort kein Blending, man behält die Parabelstücke bei.

Man erhält:

$$S_0^{(t)} = P_0 \cdot \frac{(t-1)(t-2)}{2} - P_1 \cdot t(t-2) + P_2 \cdot \frac{t(t-1)}{2}$$

$$S_r^{(t)} = (1-t) \cdot (P_{r-1} \cdot \frac{t(t-1)}{2} - P_r \cdot (t+1)(t-1) + P_{r+1} \cdot \frac{t(t+1)}{2}) \\ + t \cdot (P_r \cdot \frac{(t-1)(t-2)}{2} - P_{r+1} \cdot t(t-2) + P_{r+2} \cdot \frac{t(t-1)}{2})$$

und  $S_{n-1}(t)$  analog zu  $S_0(t)$ .

$$\Rightarrow \forall r \in \{0; 1; \dots; n-1\}: S_r(0) = P_r, S_r(1) = P_{r+1},$$

$$\forall r \in \{0; 1; \dots; n-2\}: \frac{d}{dt} S_r(t) \Big|_{t=1} = \frac{d}{dt} S_{r+1}(t) \Big|_{t=0}$$

somit hat man die stetige (einmalige) Differenzierbarkeit der Gesamtkurve sichergestellt.

Eigenschaften:

- Die parabolischen Blendingfunktionen sind Subsplinesfunktionen dritten Grades
- leicht zu programmieren
- lokale Interpolation, Oszillation gering.