Aufgaben zur Interpolation und Approximation von Kurven und Flächen

Aufgabe 1

Man berechne das eindeutig bestimmte Polynom p vom Grad 2 (Parabel), welches die Punkte $P_0 = (-5;\ 0)$, $P_1 = (0;\ -5)$, $P_2 = (1;\ 12)$ in der Form $(t;\ p(t))$ verbindet, mittels Lagrange-Interpolation.

Aufgabe 2

Durch die vorgegebenen Punkte $P_0 = (1;\ 1)$, $P_1 = (2;\ 2)$, $P_2 = (3;\ 1)$ soll eine kubische Splinekurve aus 2 Segmenten gelegt werden. Der Parameterbereich sei $[-1;\ 1]$ mit den Stützstellen $t_0 = -1$; $t_1 = 0$; $t_2 = 1$. Im Startpunkt P_0 sei der Tangentenvektor $(0;\ 1)$, in P_2 sei er $(0;\ -1)$. Man bestimme die 4 kubischen Komponentenfunktionen (für jedes Teilintervall und für jede Komponente x, y je eine kubische Funktion in t).

Aufgabe 3

Zu den 3 Punkte aus Aufgabe 2 werde noch $P_3 = (3;\ 0)$ hinzugenommen. Diese 4 Punkte seien die Kontrollpunkte einer kubischen Bézier-Kurve.

(a) Stellen Sie die Parametergleichung $Q(t)$ für die Bézier-Kurve auf ($t \in [0;\ 1]$).

(b) Berechnen und konstruieren Sie den Punkt auf der Kurve für $t = 1/2$.

Aufgabe 4

Der Graph $(t,\ p(t))$ des kubischen Polynoms $p(t) = 7t^3 + 6t^2 - 3t + 5$ soll über dem Intervall $[0;\ 1]$ als kubische Bézier-Kurve aufgefasst werden.

(a) Man berechne und skizziere das Kontrollpolygon.

(b) Man zerlege den Graphen an der Stelle $t = 1/2$ in 2 Teilsegmente und gebe die Bézierpunkte der beiden Teilsegmente an (Algorithmus von de Casteljau). Man trage die Bézierpunkte der Teilsegmente in die Skizze ein.

Aufgabe 5

$Q(u,\ 0)$ stelle für $u \in [0;\ 1]$ einen Halbkreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 in der positiven xz-Halbebene dar, $Q(u,\ 1)$ einen Halbkreis mit demselben Mittelpunkt und Radius in der positiven xy-Ebene. Die Kurven $Q(0,\ v)$ und $Q(1,\ v)$ seien jeweils zu einem Punkt ($(1;\ 0;\ 0)$ bzw. $(-1;\ 0;\ 0)$) entartet. Man berechne den Coons-Patch mit linearen Blendingfunktionen, der von diesen Randkurven aufgespannt wird.