

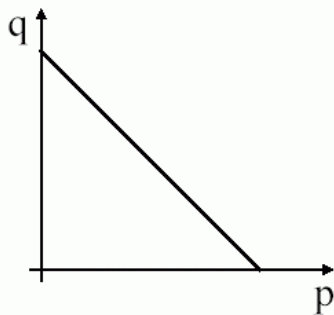
## Fortsetzung zu Kapitel 4: Bildoperationen

### Punktoperationen / Grauwerttransformationen

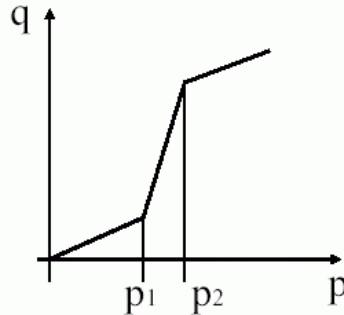
#### Zusammenfassung:

- wirken unabhängig von der Position im Bild
- Transformation  $T$  der Originalhelligkeit  $p$  in die Helligkeit  $q$ :  
 $q = T(p)$
- schnelle Implementierung durch Look-up Table
- Kontrastverbesserung

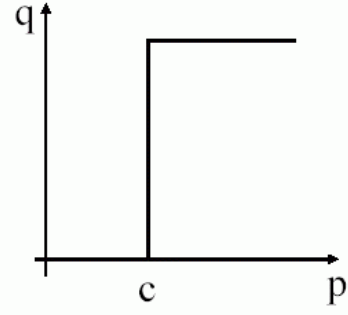
#### Beispiele:



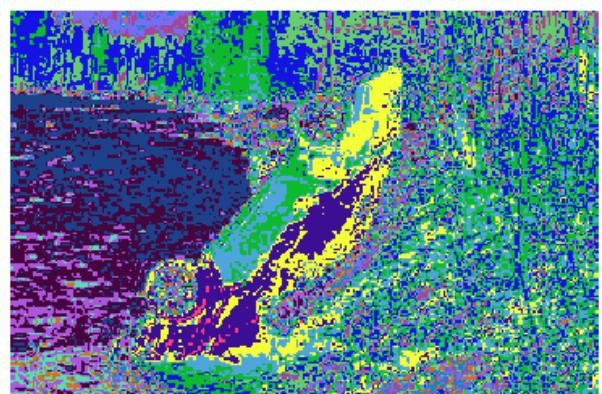
Negativbild



Kontrasterhöhung



Binärer Schwellwert



Falschfarben-Darstellung

(aus Beichel 2002)

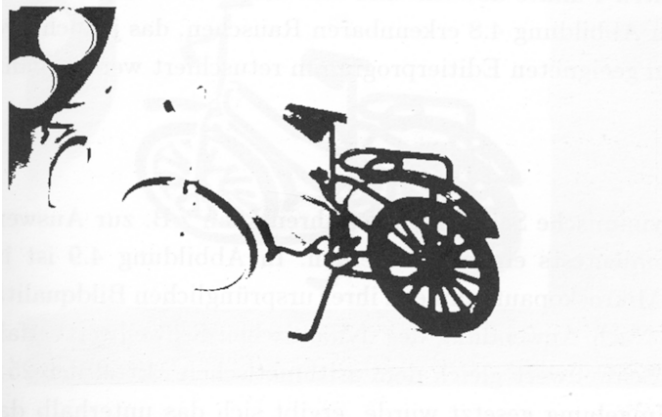
Spezialfall: Binarisierung (Schwellenwert-Operation)  
Überführung in ein Binärbild (s/w)

Schwellenwert "idealerweise" in einem "Tal" des Histogramms

Probleme:

- eindeutiges Optimum nicht immer vorhanden
- zweckmäßiger Schwellenwert kann mit der Position im Bild variieren

Beispiel:



(aus Klas 1996)

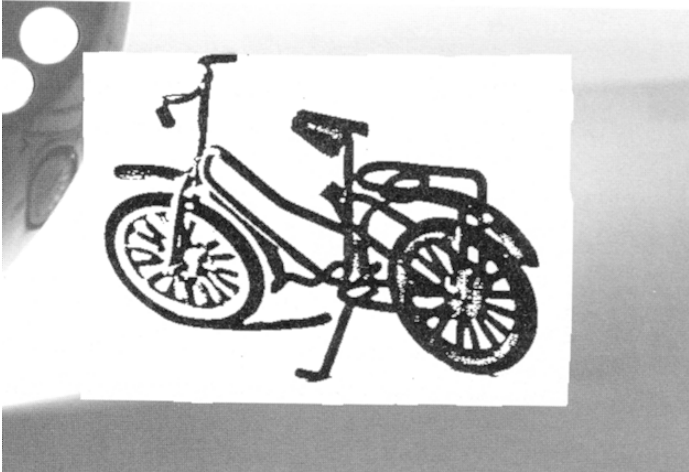
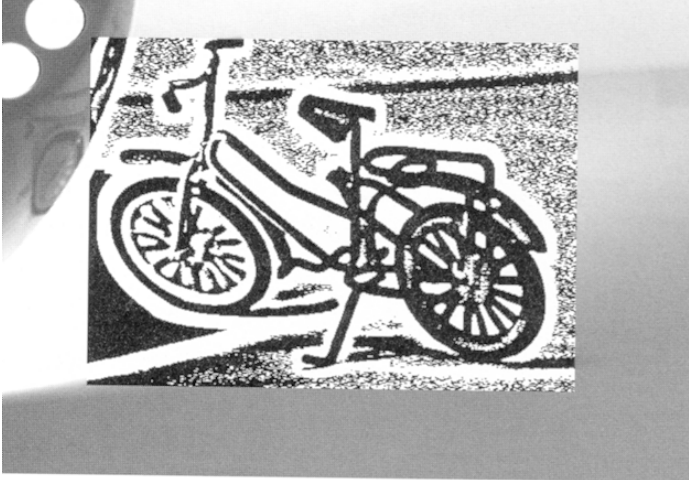
deshalb:

*Dynamischer Schwellenwert* (positionsabhängig)  
(keine lokale Operation i.e.S. mehr)

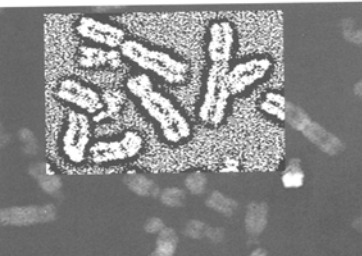
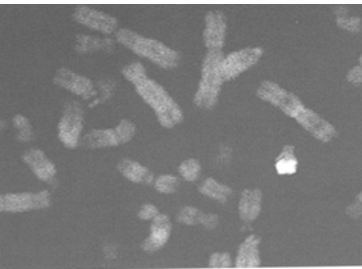
Schwellenwert als Mittelwert der Helligkeit in einer Umgebung des betrachteten Pixels (z.B.  $n^2$  Nachbarpixel)

Nachteil: es kann Hintergrundrauschen entstehen  
Entfernen durch Glättungsverfahren oder interaktiv  
(Retuschieren)

Beispiel (mit Mittelung über 50×50 Bildpunkte, oben; unten retuschiert):



Anwendung dynamischer Schwellenwertverfahren u.a. in der Mikroskopbild-Auswertung



ungleichmäßige Ausleuchtung oder inhomogene Sensor-Empfindlichkeit auch für die Grauwertbild-Weiterverarbeitung störend

daher:

*Helligkeitskorrektur*

(auch: *Shading-Korrektur*)

einfachste Methode:

- Szene einmal mit und einmal ohne die interessanten Bildbestandteile aufnehmen (Referenzbild)
- Hintergrundeinfluss durch Bildsubtraktion beseitigen (Mikroskopbildanalyse)

wenn Helligkeit bei der Bildaufnahme künstlich geregelt werden kann (z.B. Mikroskop):

Multiplikative oder additive Shading-Korrektur durch *Verrechnen mit Weiß- und Schwarzbild*

➤ Shadingmatrix:

➤ Aufnahme eines Weißbildes  $W(x,y)$ , mit

➤ Vollständigem Öffnen der Aperturblende und

➤ Vollständigen „Hochregeln“ des Lichts

➤ Berechnung aus  $W(x,y)$  des mittleren Weißwerts  $\overline{W}$

➤ Sowie Aufnahme Schwarzbild  $S(x,y)$ , mit

➤ Geschlossener Aperturblende

➤ Ohne Licht

➤ Berechnung aus  $S(x,y)$  des mittlere Schwarzwerts  $\overline{S}$

➤ Multiplikative Shadingkorrektur

$$A_M(x, y) = E(x, y) \frac{\overline{W}}{W(x, y)} - \overline{S}$$

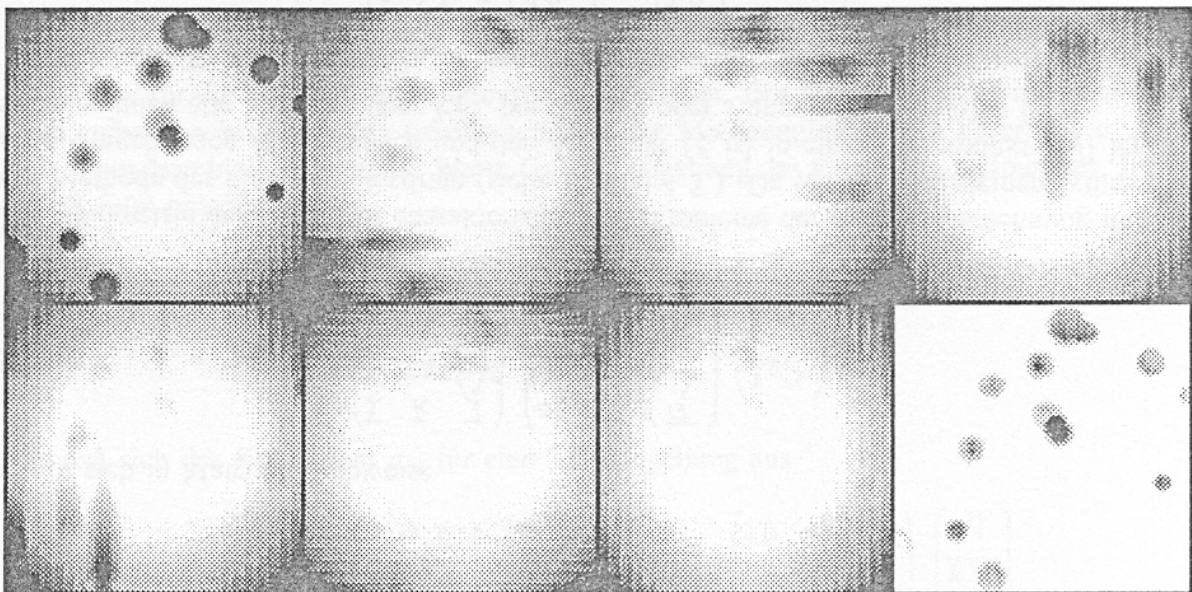
➤ Additive Shadingkorrektur

$$A_A(x, y) = E(x, y) - W(x, y) + \overline{W} - \overline{S}$$

wenn dies nicht möglich:

(inhomogenen) Hintergrund aus dem Bild selbst extrahieren  
und vom Bild subtrahieren

- gleitendes Minimum, iteriert in verschiedene Richtungen:



(aus Voss & Süße 1991)

### *Geometrische Transformationen:*

Gegenstück zu Helligkeitstransformationen

Helligkeiten bleiben erhalten, Ortskoordinaten ändern sich

## Geometrische Transformationen

- Korrektur geometrischer Verzerrungen
  - Linsenverzeichnung
  - Bildüberlagerung (z.B. in der Fernerkundung)
  - Verdrehung beim Scannen
- Vektor Funktion T:  $(x,y) \rightarrow (x',y')$

$$x' = T_x(x, y) \quad y' = T_y(x, y)$$

- $T_x$  und  $T_y$  entweder bekannt, oder berechenbar aus Pixeln im original- und transformierten Bild  
(*Passpunkte*)

### 2 Schritte:

- Transformation der Pixelkoordinaten
- Grauwert-Interpolation (da transformierte Koordinaten i.allg. nicht ganzzahlig)

### eigentliche geometr. Transformation:

- Transformation in 2D
  - Versetzung des Ursprungs
  - Skalenänderung und
  - Rotation der Achsen
- Weitere Transformationen als Kombination der drei obigen
- Affine Transformationen (lineare Algebra)
- Bildpunktoperationen
- nichtlineare Transformationen (nichtlin. Ver-, Entzerrungen)

Beschreibung einer affinen (= linear + Verschiebung) 2D-Transformation durch 3×3-Matrix  $P$  (vgl. Computergrafik-Vorlesung, Kap. 6)

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

Bildpunkt  $E$  mit alten Koordinaten  $(x, y)$  und neuen Koord.  $(x', y')$

- Als homogene Koordinaten (in Spaltenvektorschreibweise)

$$E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Neue Koordinatenwerte durch lineare Kombinationen der alten Werte mit den Koeffizienten der Transformationsmatrix

$$\begin{aligned} x' &= P_{11} \cdot x + P_{12} \cdot y + P_{13} \\ y' &= P_{21} \cdot x + P_{22} \cdot y + P_{23} \\ 1 &= P_{31} \cdot x + P_{32} \cdot y + P_{33} \end{aligned}$$

- Transformiertes Koordinatenpaar  $(x', y')$  (in Spaltenform) durch Multiplikation eine Matrix mit einem Spaltenvektor (alte Koordinaten)

$$E' = P \cdot E$$

- Translation

- Verlegung des Ursprungs um/auf  $-t_x, -t_y$
- Achsenverlauf bleibt erhalten
- Keine Skalierung

$$\begin{aligned} x' &= 1 \cdot x + 0 \cdot y - t_x \\ y' &= 0 \cdot x + 1 \cdot y - t_y \end{aligned} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ Skalierung

➤ Achsenverlauf und Ursprung bleiben erhalten

➤ Skalierung der Achsen mit  $S_x$  bzw.  $S_y$

$$x' = S_x \cdot x + 0 \cdot y + 0$$

$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ Rotation

$$y' = 0 \cdot x + S_y \cdot y + 0$$

➤ Skalierung und Ursprung bleiben erhalten

➤ Veränderung der Achsenrichtung um Winkel  $\Phi$

$$x' = \cos \Phi \cdot x + \sin \Phi \cdot y + 0$$

$$y' = -\sin \Phi \cdot x + \cos \Phi \cdot y + 0$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ Kombination

➤ Translation und Rotation durch Matrizenmultiplikation

$$M_{RT} = R \cdot T$$

➤ Inverse Transformation

$$M_{TR}^{-1} = T^{-1} \times R^{-1}$$

umgekehrte Reihenfolge der Einzeltransformationen

*Approximation beliebiger (nicht notw. affiner) Transformationen*

Ansätze:

- Polynom-Transformation



## Approximation durch polynomiale Gleichung:

$$x' = \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{m-r} a_{rk} x^r y^k \quad y' = \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{m-r} b_{rk} x^r y^k$$

- **Linear** in Bezug auf die Koeffizienten a,b
- Aus korrespondierenden **Punktpaaren** (x,y),(x',y') können die **Koeffizienten** durch Lösung linearer Gleichungen bestimmt werden
- Verwendung von mehr Punkten als unbedingt notwendig führt zu robusteren Lösungen
- Für einfachere Verzerrungen typischerweise m=2..3
- 6 bis 10 Punktpaare zur Lösung ausreichend

- **Bilineare Transformation**
  - 4 Punktpaare ausreichend

$$x' = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$$

$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy$$

- **Affine Transformation**
  - 3 Punktpaare ausreichend
  - Rotation, Translation, Skalierung, Scherung

$$x' = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Kennzahl einer Transformation:

Der **Jacobi-Koeffizient** (Funktionaldeterminante)

- liefert Information über die Koordinatenänderung

$$J = \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix}$$

- J=0: Singuläre Transformation (keine Inverse)
- J=1: Fläche invariant bzgl. Transformation

- Bilineare Transformation

$$J = a_1b_2 - a_2b_1 + (a_1b_3 - a_3b_1)x + (a_3b_2 - a_2b_3)y$$

- Affine Transformation  $J = a_1b_2 - a_2b_1$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Translation:  $J=1$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotation:  $J=1$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Skalierung:  $J=ab$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Scherung:  $J=1$

Koordinatentransformation trifft meist nicht genau das Raster;  
Werte auf dem Raster werden benötigt:

*Interpolation*

dazu meist Verwendung der Rückwärtstransformation  $T^{-1}$  zur  
verwendeten geom. Transformation  $T$

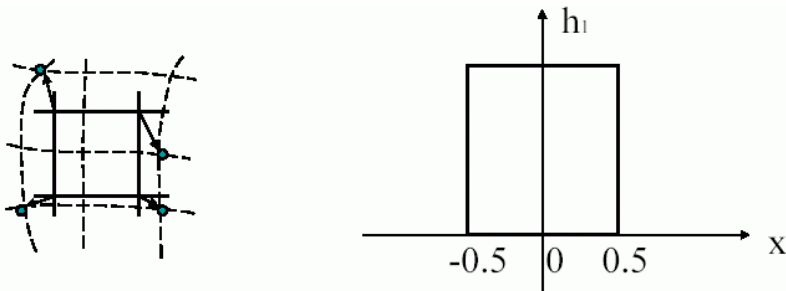
- Ursprüngliche Bildfunktion liegt nur als  
abgestastete Funktion vor:

$$g_s(l\Delta x, k\Delta y)$$

- Helligkeit kann als Faltung der  
ursprünglichen Bildfunktion mit einem  
Interpolationskern  $h_n$  betrachtet werden

$$f_n(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_s(l\Delta x, k\Delta y) h_n(x - l\Delta x, y - k\Delta y)$$

Ansätze:  
*Nearest Neighbourhood Interpolation*

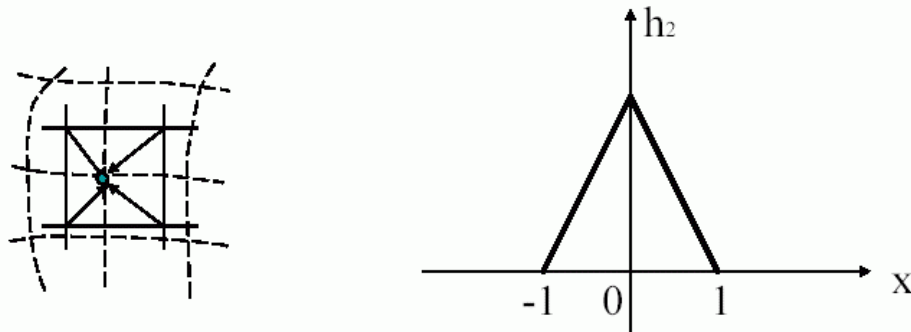


Jeder Punkt im Raster bekommt den Grauwert des nächsten Nachbarn zugewiesen.

$$f_1(x, y) = g_s[\text{round}(x), \text{round}(y)]$$

Probleme bei linienhaften Objekten: Stufen entstehen

*Lineare Interpolation*



Betrachtet die Helligkeit als lineare Funktion der Helligkeit der 4 umgebenden Punkte

$$f_2(x, y) = (1-a)(1-b)g_s(l, k) + a(1-b)g_s(l+1, k) + b(1-a)g_s(l, k+1) + abg_s(l+1, k+1)$$

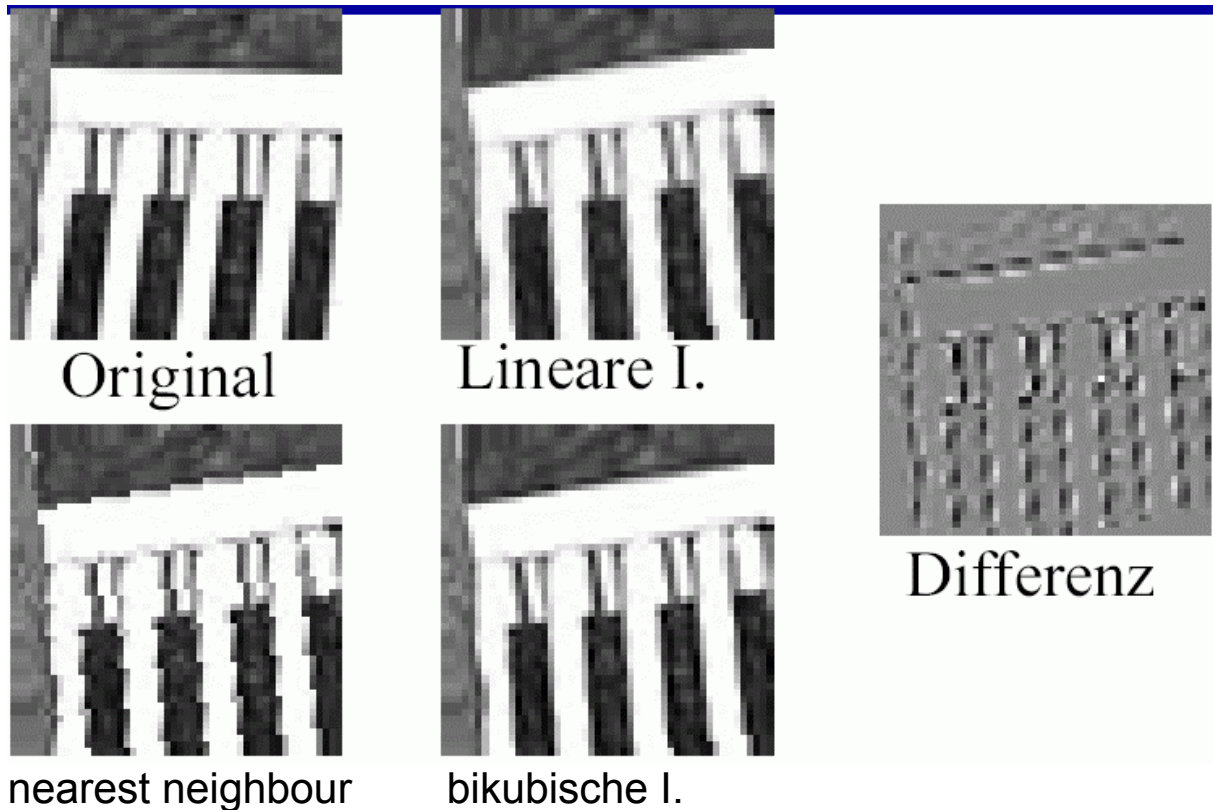
$$l = \text{round}(x), \quad a = x - l$$

$$k = \text{round}(y), \quad b = y - k$$

## Bikubische Interpolation

- approximiert die Helligkeitsfunktion lokal durch eine bikubische Fläche (vgl. Vorlesung Computergrafik)
- es werden 16 Nachbarschaftspunkte verwendet
- erhält feine Details im Bild

Beispiele:



## Lokale Bildoperationen

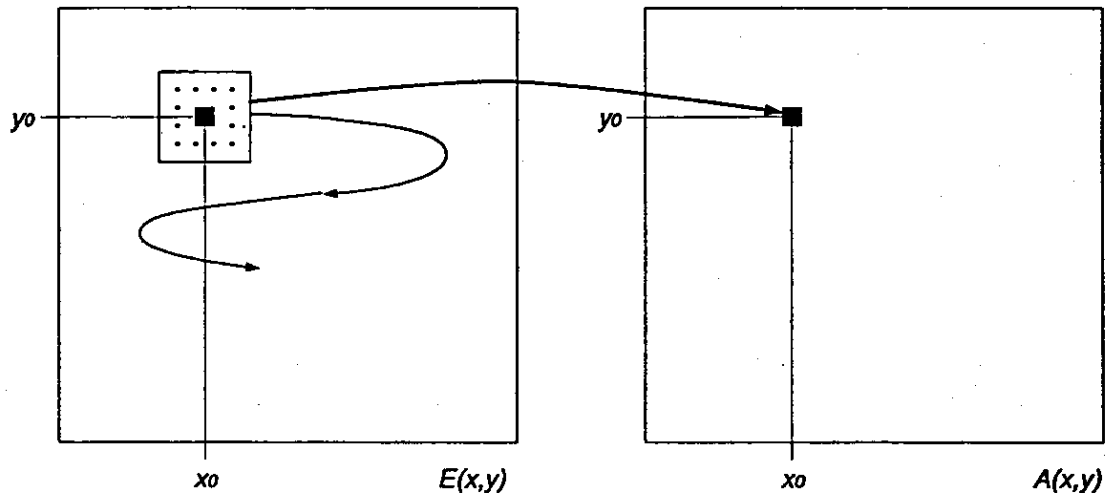
verändern Pixel in Abhängigkeit von Umgebung dieses Pixels

- Lineare Transformationen

$$f(i, j) = \sum_{(m, n) \in O} h(i - m, j - n) g(m, n)$$

entspricht diskreter Faltung mit  $h$   
 $h$  ... Faltungskern,  $O$  ... lokale  
Umgebung

- Nichtlineare Transformationen  
z.B. Medianfilter



Lokale Fensteroperation ( $E$ : Eingabebild,  $A$ : Ausgabebild)

Math. Grundlage für *lineare* lokale Transformationen:  
Faltung zweier Matrizen  $K$  (= "Kern") und  $B$  (siehe Übung)

$$a_{jk} = \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{R-1} k_{mn} \cdot b_{j-m, k-n}$$

in der Praxis oft auch um den Mittelpunkt der Kern-Matrix zentriert  
 ( $m, n = -(L-1)/2, \dots, (L-1)/2$ ).

kontinuierliches 1D-Analogon:

- Faltung zweier Signale (physikalisches Konzept)
- Faltungsintegral  $f(x)$  definiert durch folgende Beziehung

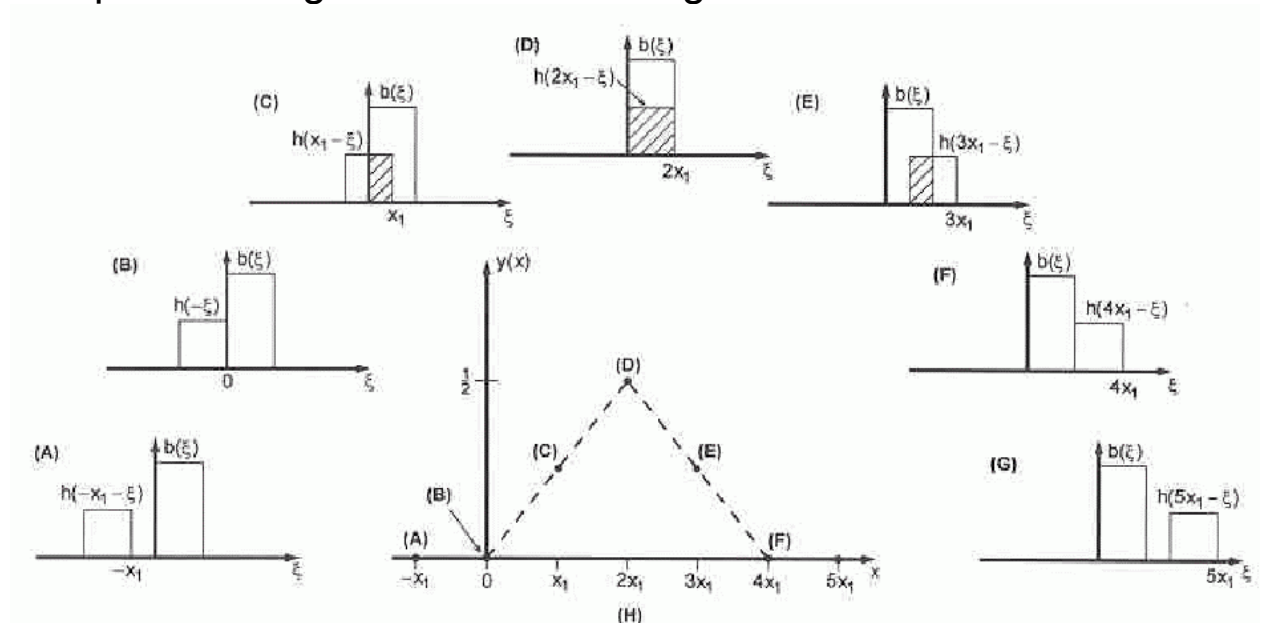
$$f(x) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} b(\xi)h(x-\xi)d\xi = b(x)*h(x)$$

$f(x)$  ist das Faltungsprodukt der Funktionen  $b(x)$  und  $h(x)$

wie ist das Integral anschaulich auszuwerten?

- Spiegelung der Funktion  $h(\xi)$  an der Ordinate  $\rightarrow h(-\xi)$
- Verschieben von  $h(\xi)$  um  $x \rightarrow h(x-\xi)$
- Multiplikation der verschobenen Funktion  $h(x-\xi)$  mit  $b(\xi)$
- Integration der Flächen unter dem Produkt  $h(x-\xi)b(\xi)$ .  
Ergebnis ist der Wert des Faltungsintegrals am Ort  $x$ .

Beispiel: Faltung zweier Rechtecksignale



Effekt in 2D analog:

Werte der Bildmatrix werden (in gesetzmäßiger Weise) "verschmiert"

Ein Beispiel:

8	5	4	6	8	10	13	11
5	5	5	6	11	14	14	14
5	3	7	5	12	15	13	12
5	5	5	8	15	17	14	13
4	5	12	18	20	16	17	16
8	14	16	20	18	20	15	21
13	22	20	18	17	18	22	27
21	21	18	20	20	25	30	32

Bild  $E$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Matrix  $C$

	47	46	64	87	110	116	
	45	49	74	103	125	126	
	51	68	102	126	139	133	
	74	103	132	152	152	149	
	114	145	159	165	163	172	
	153	169	167	176	185	210	

Zelle  $A_{22}$

Bild  $A$

lineare lokale Filterung eines Bildes:

der Grauwert eines Bildpunktes im transformierten Bild ergibt sich aus den Grauwerten des entsprechenden Punktes im Originalbild und dessen Nachbarn in einer Umgebung  $U$  durch *Linearkombination*

Koeffizienten unabhängig von der Position:

*LSI-Filter* (linear shift invariant filter)

Jeder LSI-Filter lässt sich als Faltung darstellen.

Anwendungen:

A. *Bildglättung* (Image Smoothing)

- z.B. zur Rauschunterdrückung
- Beseitigen von Details

- Mittelung funktioniert vor allem bei Impulsrauschen
- Große Flecken (blobs) können nur schwer entfernt werden

Eleganteste Art der Rauschunterdrückung:

Mittelung über mehrere Bilder (vom gleichen Objekt)



Verrauschtes  
Bild

Mittelung über  
10 verr. Bilder

$$f(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_k(i, j)$$

wenn dies nicht möglich:  
Mittelung in lokaler Umgebung

Anwendung verschiedener Faltungskerne

Beispiel: Anwendung eines 3×3-Mittelwertoperators

Kern  $h = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , anschließende Rundung auf ganzzahlige

Grauwerte

1	1	1	1	10	10	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	6	1	8	10	2	10	0	2	2	4	7	8	9	0
1	3	1	1	9	10	7	10	0	2	2	4	6	8	9	0
1	1	1	2	8	9	10	10	0	1	1	4	7	9	10	0
1	1	1	1	10	10	10	10	0	1	2	4	7	9	9	0
1	4	1	2	9	10	2	10	0	1	2	5	8	9	9	0
1	2	1	8	10	10	10	10	0	1	2	5	8	9	9	0
1	1	1	1	10	10	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0
Ausgangsbild								transformiertes Bild							

beachte:

- Randeffekt
- Max. Grauwert des Originals wird kaum erreicht
- kleine Störungen können "aufgebläht" werden





$$h = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$h = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

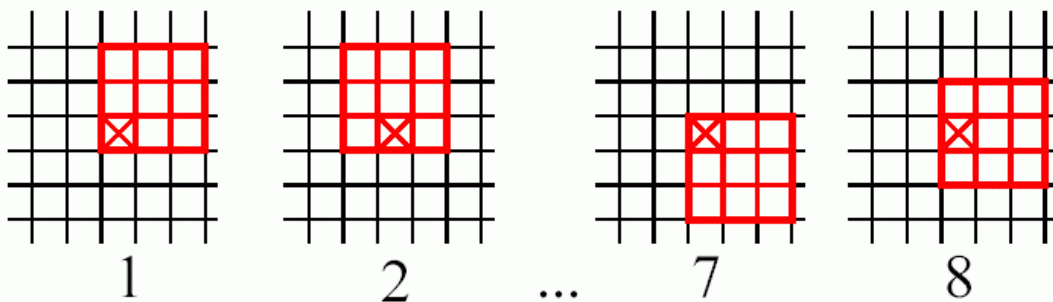
links: "Box-Filter"

rechts: "Gauß-Filter", glatterer Verlauf  $\Rightarrow$  transformiertes Bild enthält weniger Oberschwingungen

zudem besserer Erhalt der Helligkeits-Extrema des Originals

## Mittelung mit rotierender Maske

- nichtlineares Verfahren
- vermeidet blurring an Kanten
- homogener Teil der lokalen Umgebung wird verwendet
- Helligkeitswert wird nur innerhalb dieser Region berechnet
- Verwendung der Dispersion (empirische Varianz  $\sigma^2$ ) als Homogenitätsmaß



Algorithmus:

- 1) Betrachte jedes Pixel
- 2) Berechne Dispersion über alle Masken
- 3) Wähle die Maske mit minimaler Dispersion
- 4) Weise dem Pixel  $(i,j)$  den Mittelwert der Pixel dieser Maske zu

andere nichtlineare Mittelwertfilter:

- Verallgemeinerung der Mittelungstechniken

$$f(m,n) = u^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i,j \in O} a(i,j) u[g(i,j)]}{\sum_{i,j \in O} a(i,j)} \right\}$$

- Gewichtungskoeffizienten  $a(i,j)$  konstant: Homomorphe Filter
- Arithmetischer Mittelwert  $u(g)=g$
- Harmonischer Mittelwert  $u(g)=1/g$
- Geometrischer Mittelwert  $u(g)=\log g$

## Minimum-, Maximumfilter

Der 3×3-Min-Operator säubert die dunklen Regionen des Eingabebildes (vgl. Beisp. mit dem Mittelwertop.), zerstört aber andererseits die hellen Regionen:

<table border="1"><tbody><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>8</td><td>10</td><td>2</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>9</td><td>10</td><td>7</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>9</td><td>10</td><td>2</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>8</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr></tbody></table>	1	1	1	1	10	10	10	10	1	1	6	1	8	10	2	10	1	3	1	1	9	10	7	10	1	1	1	2	8	9	10	10	1	1	1	1	10	10	10	10	1	4	1	2	9	10	2	10	1	2	1	8	10	10	10	10	1	1	1	1	10	10	10	10	<table border="1"><tbody><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>8</td><td>7</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></tbody></table>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	1	8	7	0	0	1	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	10	10	10	10																																																																																																																																		
1	1	6	1	8	10	2	10																																																																																																																																		
1	3	1	1	9	10	7	10																																																																																																																																		
1	1	1	2	8	9	10	10																																																																																																																																		
1	1	1	1	10	10	10	10																																																																																																																																		
1	4	1	2	9	10	2	10																																																																																																																																		
1	2	1	8	10	10	10	10																																																																																																																																		
1	1	1	1	10	10	10	10																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																		
0	1	1	1	1	2	2	0																																																																																																																																		
0	1	1	1	1	2	2	0																																																																																																																																		
0	1	1	1	1	8	7	0																																																																																																																																		
0	1	1	1	1	2	2	0																																																																																																																																		
0	1	1	1	1	2	2	0																																																																																																																																		
0	1	1	1	1	2	2	0																																																																																																																																		
0	1	1	1	1	2	2	0																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																		
Eingabebild	Ergebnis des Min-Op.																																																																																																																																								

Der Max-Operator wirkt analog asymmetrisch

Verallgemeinerung von Min und Max:

### Rangordnungsoperatoren

Idee:

- Verwendung einer beliebigen Maske ("strukturierendes Element")
- auftretende Helligkeitswerte der Eingabematrix innerhalb der Maske werden nach der Größe sortiert
- es wird der  $k$ -te Wert in der sortierten Liste ( $k$ -Quantil) als Ausgabe-Helligkeit benutzt

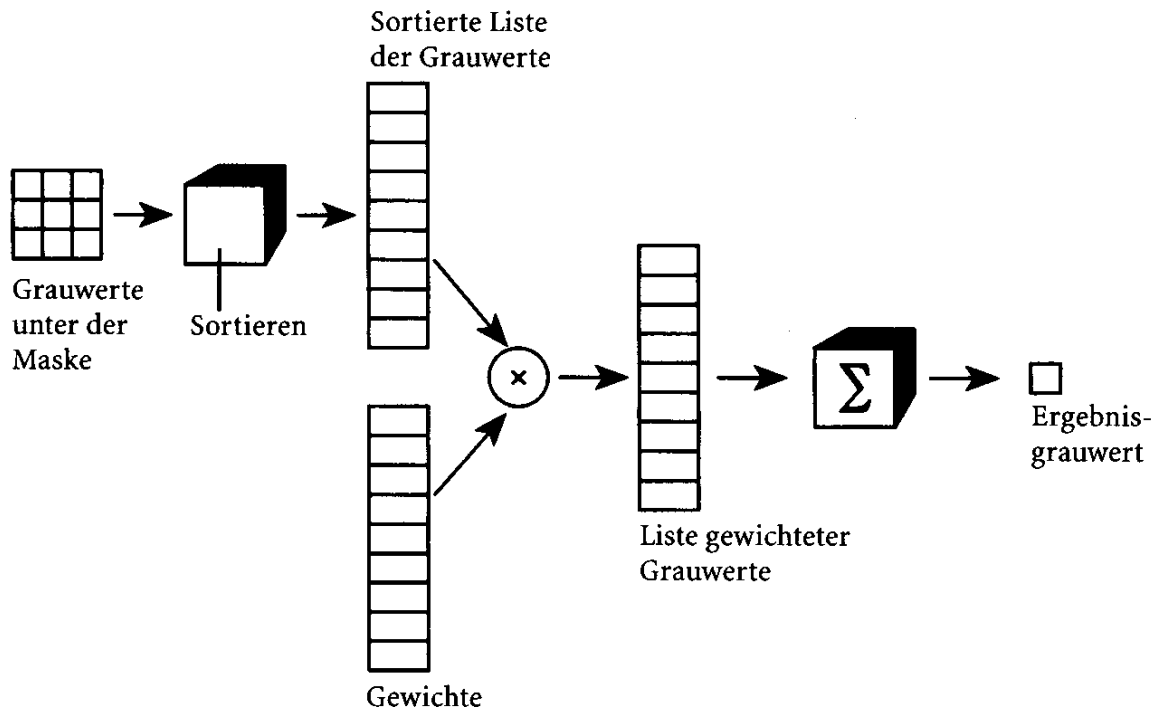
Spezialfälle:

$k=1$ : Min-Operator,  $k$ =höchster Wert= $n$ : Max-Operator

$k=n/2$ : Median-Operator

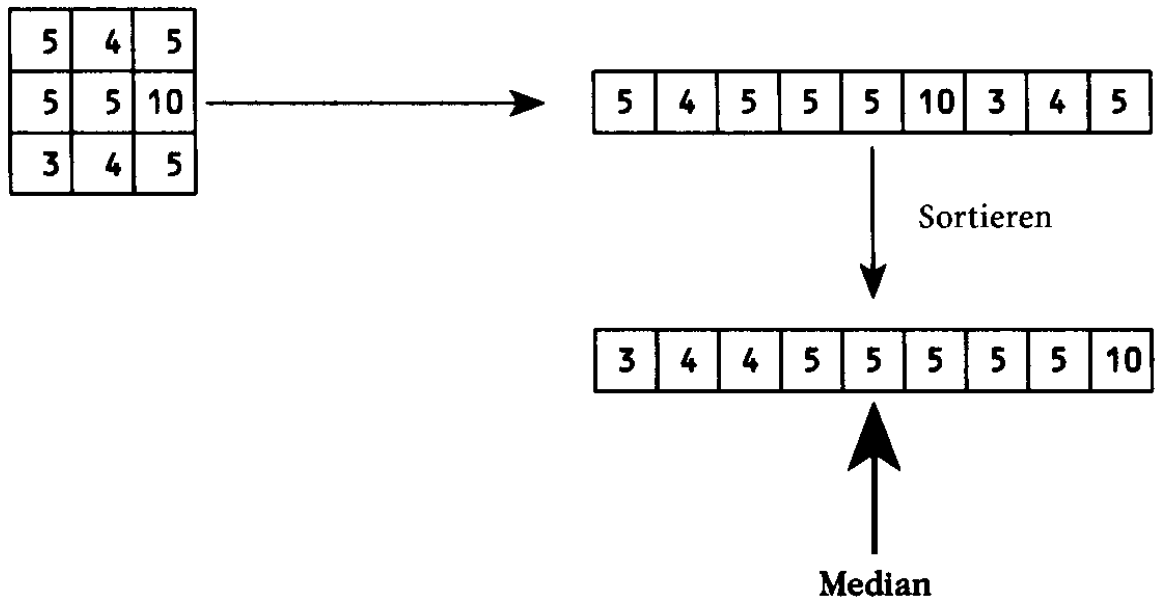
- evtl. mehrere Werte aus der sortierten Liste mit Gewichten verknüpfen

Prinzip des allgemeinen Rangordnungsoperators (mit Gewichten):



(aus Bässmann & Kreyss 1998)

Spezialfall Medianoperator:



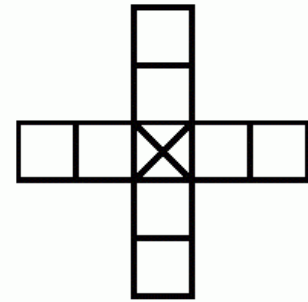
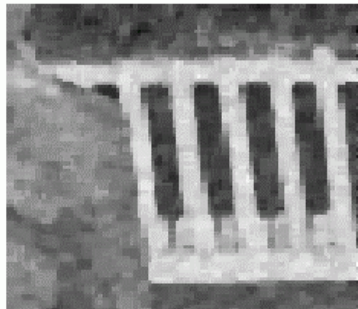
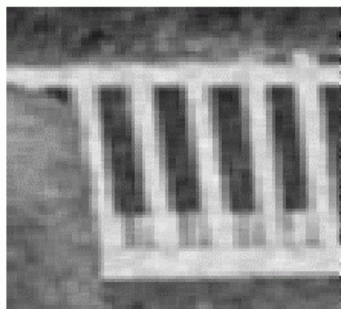
Beispiele für die Anwendung:



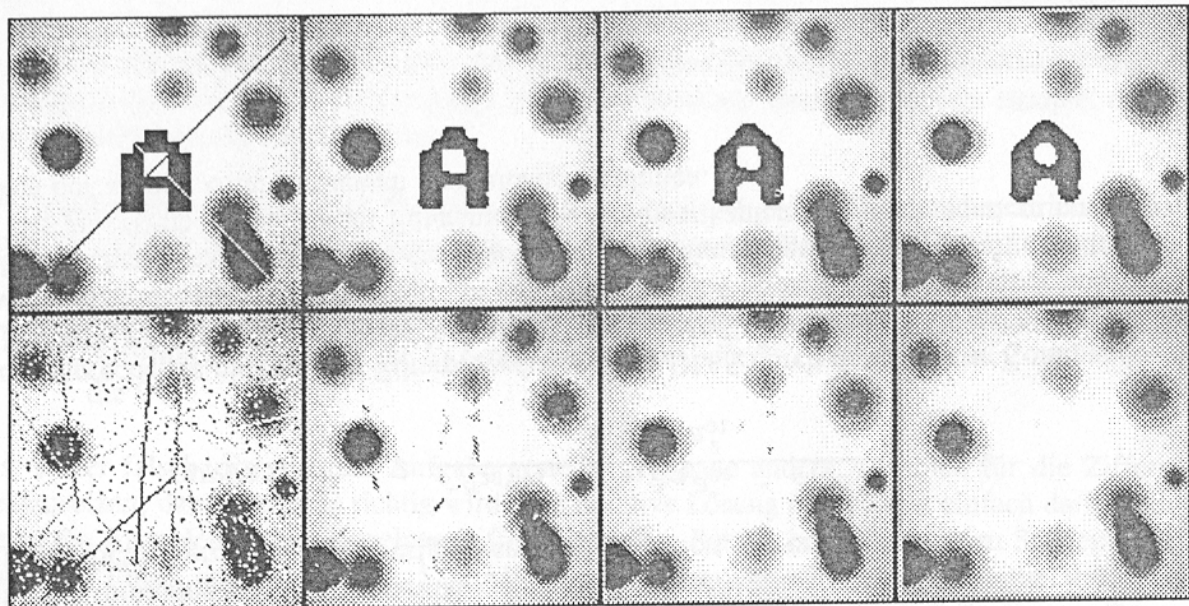
Mittelwertfilter



Medianfilter

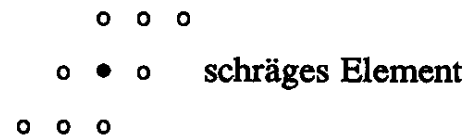
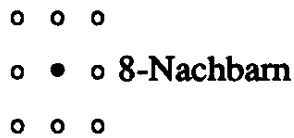


Linienerhaltende  
Maske



Medianfilter mit quadratischer Maske (Seitenlängen 3; 5; 7), angewandt auf die ganz links stehenden Originalbilder (aus Voss & Süße 1991)

unterschiedliche strukturierende Elemente:

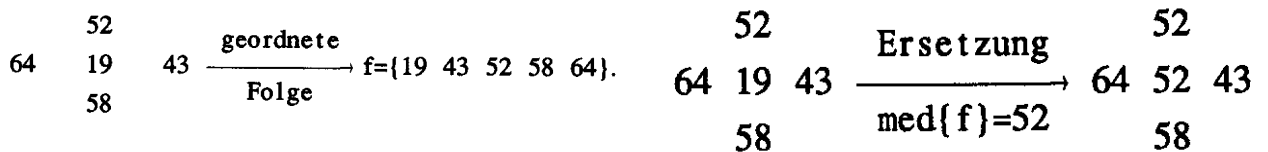


Anwendung des Median-Operators auf folgendes Grauwertbild:

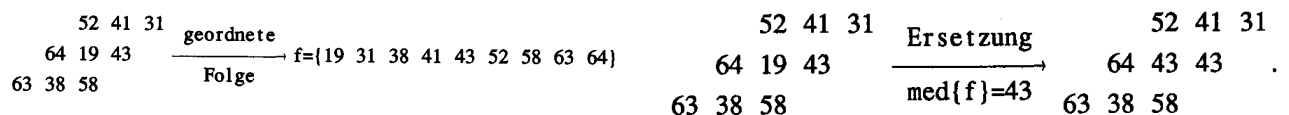
	0	1	2	3	4	...	Spalte y
0	53	68	47	36	27	...	
1	57	67	52	41	31	...	
2	61	64	19	43	35	...	
3	63	38	58	47	41	...	
...							

Zeile x

mit Elementarraute als strukt. Element:



mit schrägem Element:



(Beisp. aus Haberäcker 1991)

Vorteile des Medianfilters:

- verringert das Rauschen, ohne steile Grauwertkanten zu verschmieren
- vereinigt die "säubernden" Eigenschaften von Min- und Max-Operator
- liefert eine gewisse Kontrastverstärkung

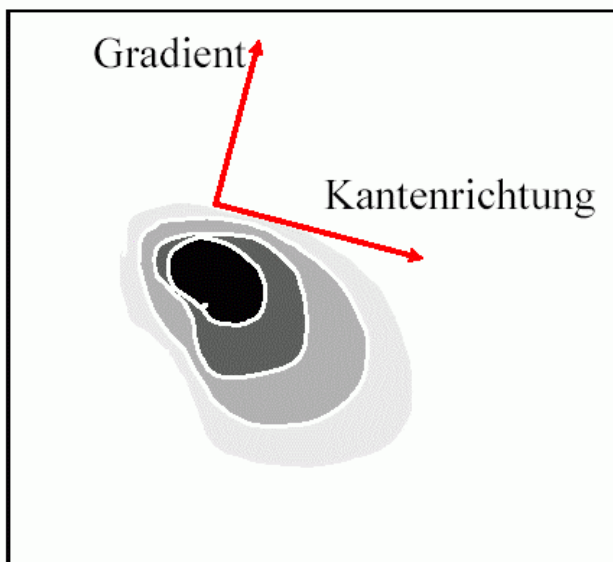
Nachteile:

- bei Verwendung größerer strukturierender Elemente werden kleine Bildbestandteile, die interessant sein könnten, eliminiert,
- hoher Rechenaufwand durch Sortieren.

## B. Hervorhebung von Grauwertsprüngen ("Kanten")

"Kante": Stelle mit abrupter Änderung der Helligkeit

- math. Beschreibung im kontinuierlichen Fall durch Ableitungen
- Gradient: Richtung der stärksten Änderung



$$|\text{grad } g(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$
$$\psi = \arg\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

$$(\arg(x, y) = \arctan(y/x))$$

- Kanten werden zur Abgrenzung von Regionen verwendet
- sie verlaufen orthogonal zum Gradienten

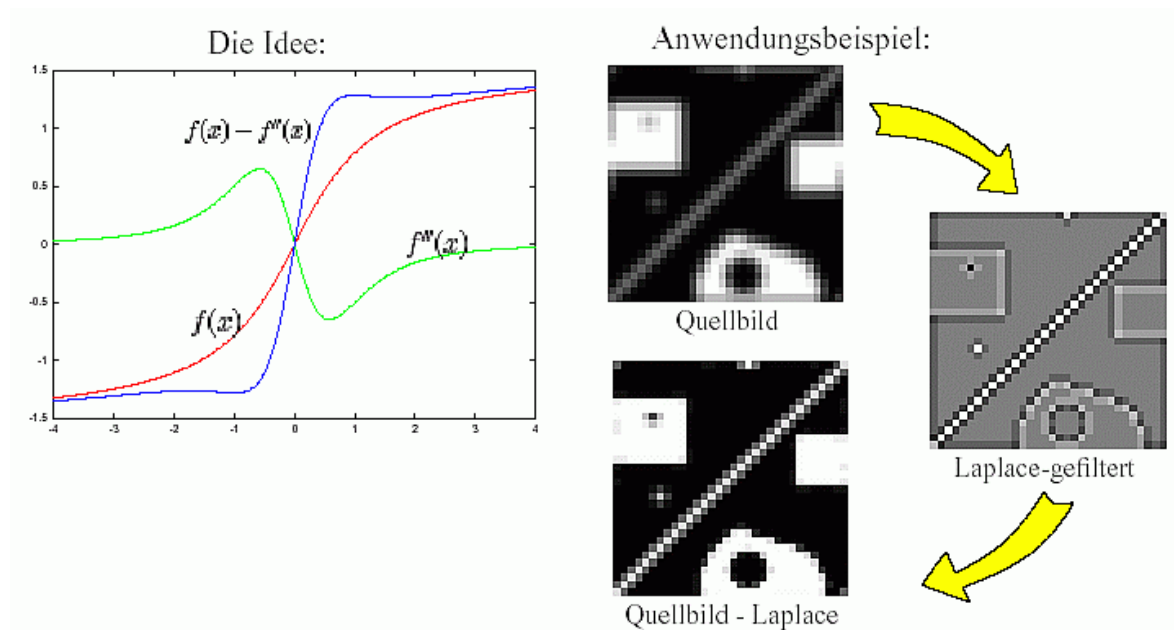
### Laplace-Operator:

Summe der zweiten partiellen Ableitungen

$$\nabla^2 g(x, y) = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2}$$

liefert Kantenstärke ohne Richtung  
rotationsunabhängig

Schärfung eines Bildes durch Subtraktion des mit dem Laplace-Filter transformierten Bildes



Originalbild



Laplace Kantenbild



Geschärftes Bild



*Diskrete Gradientenoperatoren:*  
Approximation der Ableitungen durch Differenzen

Roberts-Operator

- Einer der ältesten Operatoren (1965)
- Einfach zu berechnen
- 2x2 Umgebung
- Faltungsmasken:  $h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$   $h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- Berechnung der Kantenstärke  
 $|g(i, j) - g(i+1, j+1)| + |g(i, j+1) - g(i+1, j)|$
- NT: stark rauschabhängig



$h_1$



$h_2$



Kantenbild

Prewitt-Operator:

- Approximiert die 1. Ableitung
- Schätzung des Gradienten in 8 Richtungen (für 3x3 Masken)
- Maximumwert über alle Richtungen gibt auch die Gradientenrichtung an

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Maximum

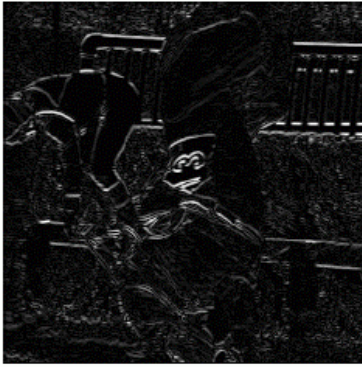
## Sobel-Operator

einfacher Detektor für horizontale und vertikale Kanten  
Grundidee: Einfluss der Grauwerte auf die Gradientenbildung  
nimmt mit dem Abstand vom aktuellen Pixel ab  $\Rightarrow$  Koeffizienten  
werden zum Rand des Operators hin kleiner  
kontinuierliche Idealform: Halbbogen einer Sinusschwingung  
Summe der Koeff. sollte 0 sein (Mittelwert-Invarianz)

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Anwendung:



$h_1$



$h_2$



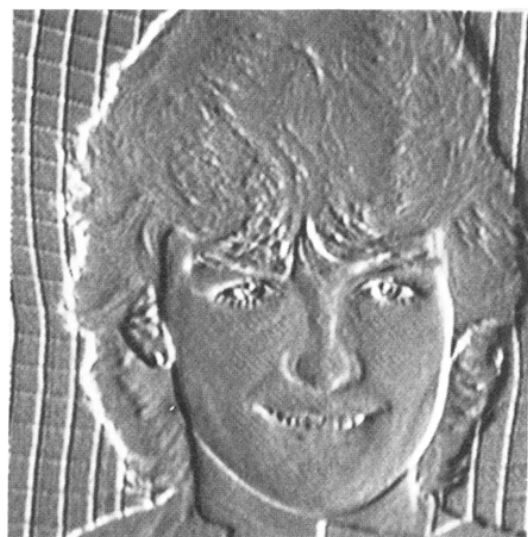
Kantenbild

anderes Beispiel (aus Haberäcker 1991):



(a)

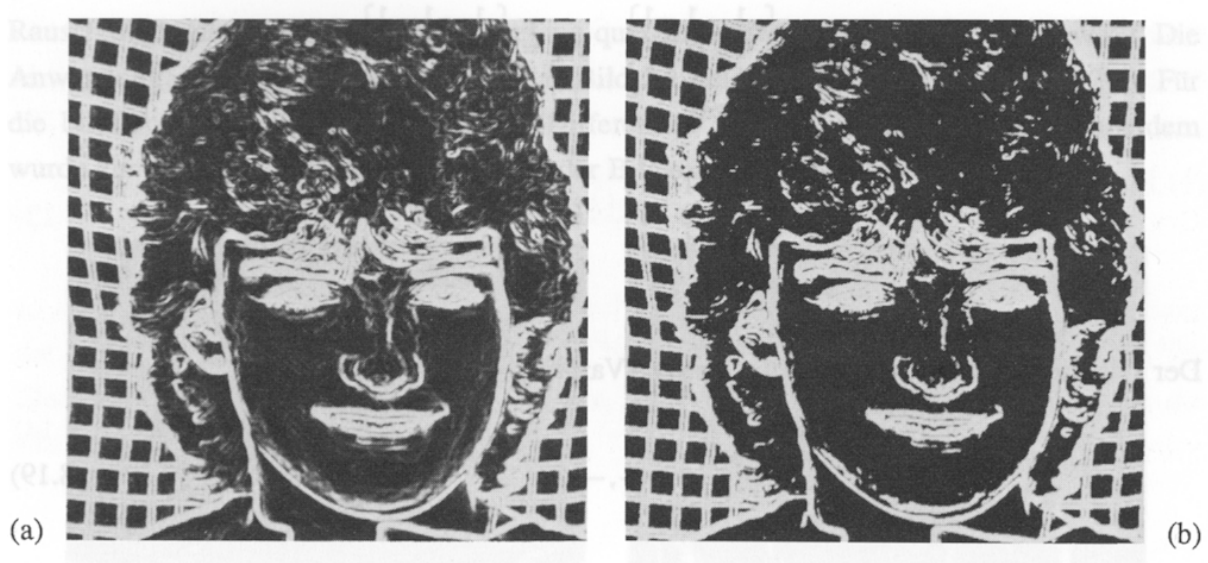
$h_1$



(b)

$h_2$

Betrag des approx. Gradienten und Binärbild nach Schwellenwertoperation:



Größere Sobel-Masken:

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

-10	-10	0	10	10
-17	-17	0	17	17
-20	-20	0	20	20
-17	-17	0	17	17
-10	-10	0	10	10

10	17	20	17	10
10	17	20	17	10
0	0	0	0	0
-10	-17	-20	-17	-10
-10	-17	-20	-17	-10

-14	-14	-14	-14	0	14	14	14	14
-29	-29	-29	-29	0	29	29	29	29
-44	-44	-44	-44	0	44	44	44	44
-60	-60	-60	-60	0	60	60	60	60
-71	-71	-71	-71	0	71	71	71	71
-60	-60	-60	-60	0	60	60	60	60
-44	-44	-44	-44	0	44	44	44	44
-29	-29	-29	-29	0	29	29	29	29
-14	-14	-14	-14	0	14	14	14	14

14	29	44	60	71	60	44	29	14
14	29	44	60	71	60	44	29	14
14	29	44	60	71	60	44	29	14
14	29	44	60	71	60	44	29	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0
-14	-29	-44	-60	-71	-60	-44	-29	-14
-14	-29	-44	-60	-71	-60	-44	-29	-14
-14	-29	-44	-60	-71	-60	-44	-29	-14
-14	-29	-44	-60	-71	-60	-44	-29	-14

(aus Bäsmann & Kreys 1998)

## Laplace-Operator

diskrete Approximation des kontinuierlichen Laplace-Op.  $\nabla^2$

meist verwendet:

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung der linken Laplace-Maske:

<table border="1"> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>9</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>8</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>8</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> </tbody> </table>	1	1	3	5	10	10	10	10	1	1	3	5	8	10	10	10	1	1	2	7	10	10	10	10	1	1	1	2	5	9	10	10	1	1	1	3	8	10	10	10	1	1	1	3	8	9	10	10	1	1	2	6	8	10	10	10	1	1	3	8	10	10	10	10	<table border="1"> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>-2</td><td>1</td><td>-3</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1</td><td>-4</td><td>9</td><td>10</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>-2</td><td>-8</td><td>-9</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>-2</td><td>-2</td><td>10</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>-3</td><td>-6</td><td>8</td><td>-2</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1</td><td>-3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	1	-3	1	2	0	0	0	-1	-4	9	10	1	0	0	0	0	-2	-8	-9	1	1	0	0	0	-2	-2	10	4	0	0	0	0	-3	-6	8	-2	1	0	0	-1	-3	3	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	3	5	10	10	10	10																																																																																																																										
1	1	3	5	8	10	10	10																																																																																																																										
1	1	2	7	10	10	10	10																																																																																																																										
1	1	1	2	5	9	10	10																																																																																																																										
1	1	1	3	8	10	10	10																																																																																																																										
1	1	1	3	8	9	10	10																																																																																																																										
1	1	2	6	8	10	10	10																																																																																																																										
1	1	3	8	10	10	10	10																																																																																																																										
0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																										
0	-2	1	-3	1	2	0	0																																																																																																																										
0	-1	-4	9	10	1	0	0																																																																																																																										
0	0	-2	-8	-9	1	1	0																																																																																																																										
0	0	-2	-2	10	4	0	0																																																																																																																										
0	0	-3	-6	8	-2	1	0																																																																																																																										
0	-1	-3	3	2	3	0	0																																																																																																																										
0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																										
Ausgangsbild	Ergebnis der Anwendung eines 3×3-Laplace-Operators																																																																																																																																

(aus Bässmann & Kreyss 1998)

Anwendung auf "realistische" Bilder: siehe weiter oben

größere Laplace-Masken:

$$L = \frac{1}{3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & -1 & 2 \\ \hline -1 & -4 & -1 \\ \hline 2 & -1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$L = \frac{1}{35} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ \hline 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$L = \frac{1}{2345} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 259 & 112 & 259 & \\ \hline & 259 & -182 & -329 & -182 & 259 \\ \hline & 112 & -329 & -476 & -329 & 112 \\ \hline & 259 & -182 & -329 & -182 & 259 \\ \hline & & 259 & 112 & 259 & \\ \hline \end{array}$$

(aus Voss & Süße 1991)

zur Bestimmung der 2. Ableitung:

- Problem: stark rauschabhängig
- Abhilfe: Zuerst Glätten, danach Ableitung
- Gaußfilter hat passende Eigenschaften:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

- $\sigma$  proportional zur Größe der lokalen Umgebung

- 2. Ableitung des geglätteten Bildes mit Laplace Operator  $\nabla^2$   $\nabla^2[G(x, y, \sigma) * f(x, y)]$
- Reihenfolge kann getauscht werden, aufgrund der Linearität:  $[\nabla^2 G(x, y, \sigma)] * f(x, y)$
- Ableitung des Gaußfilters ist unabhängig vom Bildinhalt und kann vorausberechnet werden.

$$h(x, y) = c \left( \frac{x^2 + y^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \right) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$$

"Laplacian of Gaussian" oder LoG-Operator  $h$

- Operator  $h(x, y)$  wird aufgrund seiner Form auch als **Mexican Hat** Operator bezeichnet
- Diskrete Approximation:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 16 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

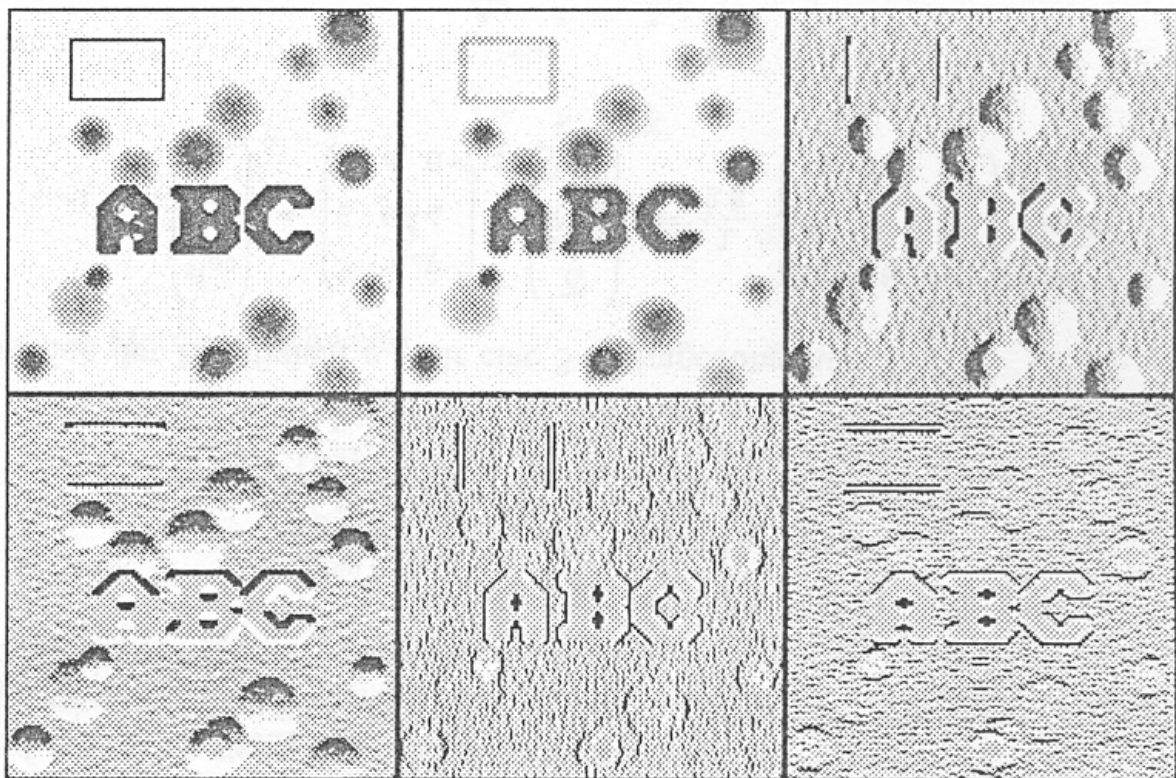
Faltungsmasken des LoG werden sehr groß für große  $\sigma$  (40 Pixel bei  $\sigma=4$ )

Approximation des LoG-Operators durch die Differenz zweier Gaußscher Mittelungskerne mit verschiedenen  $\sigma$ : "Difference of Gaussian", DoG.

Kantenbestimmung aus 2. Ableitung: "zero crossings" (Nulldurchgänge) zu detektieren

- einfacher Schwellenwert liefert keine befriedigenden Ergebnisse
- Detektion der Nulldurchgänge mit  $2 \times 2$ -Fenster: innerhalb müssen Werte mit beiden Vorzeichen vorkommen
- Verbesserung: nur solche Pixel auswählen, wo die 1. Ableitung groß genug ist.
- Menschliche Kantendetektion funktioniert vermutlich nach ähnlichen Prinzipien!

zusammenfassendes Bild zu linearen lokalen Filtern:  
 Original, Mittelwertoperator, 1. Ableitung (x, y), 2. Ableitung (x, y). (aus Voss & Süße 1991).





zur Detektion und Verstärkung von Grauwertstufen sind manchmal nichtlineare Operatoren den linearen überlegen:

Eingabebild:

1	1	3	5	10	10	10	10
1	1	3	5	8	10	10	10
1	1	2	7	10	10	10	10
1	1	1	2	5	9	10	10
1	1	1	3	8	10	10	10
1	1	1	3	8	9	10	10
1	1	2	6	8	10	10	10
1	1	3	8	10	10	10	10

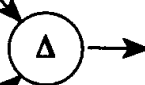
absolute Differenz zwischen 3×3-Min und Max (Hervorhebung der Grauwertübergänge zwischen dunkler und heller Region):

Min

	1	1	2	5	8	10	
	1	1	1	2	5	9	
	1	1	1	2	5	9	
	1	1	1	2	5	9	
	1	1	1	3	8	9	
	1	1	1	3	8	9	

Max

	3	7	10	10	10	10	
	3	7	10	10	10	10	
	2	7	10	10	10	10	
	1	3	8	10	10	10	
	2	6	8	10	10	10	
	3	8	10	10	10	10	



	2	6	8	5	2	0	
	2	6	9	8	5	1	
	1	6	9	8	5	1	
	0	2	7	8	5	1	
	1	5	7	7	2	1	
	2	7	9	7	2	1	

Verfeinerung:  
 "closest-of-min-and-max-Operator"

ersetzt aktuelles Pixel durch minimalen oder maximalen Grauwert aus der aktuellen Maske (hier 3×3). Ist die Differenz zum Minimum kleiner, wird das Minimum genommen, sonst das Maximum.

Ergebnis bei Anwendung auf obiges Eingabebild:

1	1	1	3	10	10	10	10
1	1	1	2	10	10	10	10
1	1	1	10	10	10	10	10
1	1	1	1	2	10	10	10
1	1	1	1	10	10	10	10
1	1	1	1	10	10	10	10
1	1	1	10	10	10	10	10
1	1	1	10	10	10	10	10

(besser als mit Laplace!)

neues Eingabebild:

1	1	1	3	10	10	10	10
1	1	1	3	3	10	10	10
1	1	3	3	3	10	10	10
1	1	3	3	3	10	10	10
1	1	3	3	3	10	10	10
1	1	1	3	3	10	10	10
1	1	1	1	3	3	10	10
1	1	1	1	1	1	3	10

Iterative Anwendung des 3×3-closest-of-min-and-max-Operators:

1	1	1	1	10	10	10	10
1	1	1	1	3	10	10	10
1	1	3	3	3	10	10	10
1	1	3	3	3	10	10	10
1	1	3	3	3	10	10	10
1	1	1	3	1	10	10	10
1	1	1	1	1	1	10	10
1	1	1	1	1	1	1	10

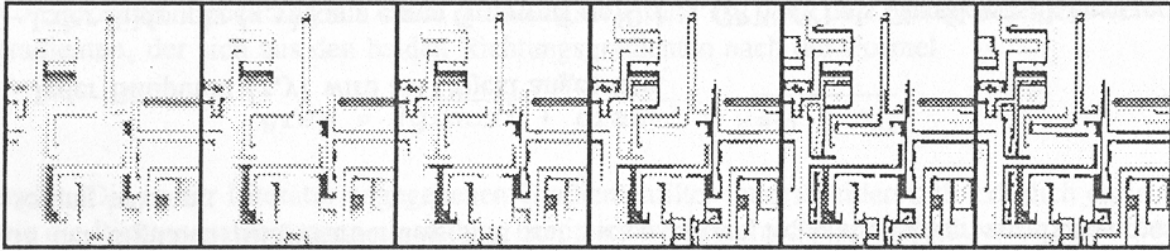
1	1	1	1	10	10	10	10
1	1	1	1	1	10	10	10
1	1	3	3	1	10	10	10
1	1	3	3	3	10	10	10
1	1	3	3	1	10	10	10
1	1	1	3	1	10	10	10
1	1	1	1	1	1	10	10
1	1	1	1	1	1	1	10

1	1	1	1	10	10	10	10
1	1	1	1	1	10	10	10
1	1	3	3	1	10	10	10
1	1	3	3	1	10	10	10
1	1	3	3	1	10	10	10
1	1	1	3	1	10	10	10
1	1	1	1	1	1	10	10
1	1	1	1	1	1	1	10

(Bsp. aus Bässmann & Kreyss 1998)

Iteration stoppen, wenn das Verfahren konvergiert:  
*"Relaxationsverfahren"*

Anwendung eines solchen nichtlin. Relaxationsfilters auf ein reales Bild (nach 1, 4, 16, 64, 256 Schritten):



(aus Voss & Süße 1991)

## C. Bildrestauration

Vorverarbeitungsschritt, um bekannte Bildstörungen zu bearbeiten

- je besser die Störung bekannt ist, desto besser kann die Restaurierung gelingen

Gründe für Bildstörungen:

- schlechte, defekte oder verschmutzte optische Linsen
- Nichtlinearität der Sensoren
- Körnigkeit des Filmmaterials
- relative Bewegung zwischen Objekt und Kamera ("Verwackeln", motion blur)
- falsche Brennweite
- atmosphärische Turbulenzen (Fernerkundung, Astronomie)
- Probleme beim Scannen
- Störungen bei der Übermittlung der Bildsignale (TV)
- Mängel am Ausgabegerät

2 Gruppen von Verfahren:

- Deterministische Methoden  
Anwendung bei geringem Rauschen und bekannter Störung
- Stochastische Techniken  
versuchen die beste Lösung aufgrund bestimmter stoch. Kriterien (meist Methode der kleinsten Quadrate) zu finden.  
Schätzung der Störung als erster Schritt.

Schätzung der Störung  
mittels

- *a priori*-Wissen: Art der Störung bekannt, nur Parameter müssen geschätzt werden (z.B. lineare Bewegung zwischen Objekt und Kamera. Geschwindigkeit und Richtung gesucht.)
- *a posteriori*-Wissen: Interessante Punkte im gestörten Bild suchen (Ecken, Geradenstücke) und ursprüngliches Aussehen schätzen, oder spektrale Untersuchung homogen texturierter Bereiche.

Häufige Störquelle:

aus einem einzelnen schwarzen Punkt wird (aufgrund der Unvollkommenheit der optischen Abb. oder des Sensors) ein mehr oder weniger verschmierter grauer Fleck

- Grauwertfunktion dieses Flecks:

Punktverbreiterungsfunktion (point spread function, PSF).

Störung = Faltung mit der PSF.

zusätzlich oft: additives, stochastisches Rauschen.

Somit: 3 Typen von Bildrestaurationsproblemen (Wiederherstellung des Originalbildes  $F$  aus dem gestörten Bild  $G$ ):

- *Entfaltung* bei  $G = P * F$ , d.h. man kann das Rauschen vernachlässigen, so dass nur die durch die Punktverbreiterungsfunktion  $P$  bewirkte Verschmierung rückgängig gemacht werden muss  
(- Problem: Faltung ist i.allg. nicht invertierbar! siehe Übung)
- *Rauschbeseitigung* bei  $G = F + R$ , d.h. die Qualität der Abbildung ist so gut, dass man den Einfluss der Punktverbreiterung vernachlässigen kann
- *Allgemeine Restauration* bei  $G = P * F + R$ , d.h. beide Einflussfaktoren sind nicht vernachlässigbar.

Störungen, die leicht zu korrigieren sind:

Spezialfälle von Fall 1 mit einfach beschreibbarer Faltung.  
Entfaltung durch  $F = HG$ .

- Relative Bewegung zwischen Objekt und Kamera:

$$H(u, v) = \frac{\sin(\pi V T u)}{\pi V u}$$

- V... konstante Geschwindigkeit in x-Rtg.  
T... Zeit

- Falscher Fokus:  $H(u, v) = \frac{J_1(ar)}{ar}$

J ... Bessel Funktion 1. Ordnung

$r^2 = u^2 + v^2$     a ... Verschiebung

- **Atmosphärische Turbulenzen:** Modell aus empirischen Versuchen  $H(u, v) = e^{-c(u^2 + v^2)^{5/6}}$

c ... Konstante abhängig von der Art der Turbulenz ( aus Experimenten)

(aus Beichel 2002)

*Periodisches Störsignal* oder Störsignal mit anderweitig bekanntem Spektrum:

- Übergang in den Frequenzraum mittels Fourier-Transformation (globale Transformation)
- dort erscheint Störsignal in Form weniger singulärer Punkte
- Löschen dieser Punkte
- Rücktransformation

Ansatz zur allgemeinen Restauration auf der Grundlage stochastischer Prozesse:

Theorie der *Wiener-Filter*

(siehe z.B. Voss & Süße 1991, S. 102 ff.)

### *Elimination gestörter Bildzeilen:*

- Detektion gestörter Zeilen mittels der Korrelation aufeinanderfolgender Bildzeilen
- Annahme: Korrelationskoeffizient zwischen benachbarten, ungestörten Zeilen in natürlichen Bildern groß

### Vorgehensweise:

- Beginne Verarbeitung mit korrekter Bildzeile
- berechne zu je 2 aufeinanderfolgenden Zeilen  $k$  und  $k+1$  den Korrelationskoeffizienten  $r_{k,k+1}$  :

$$r_{k,k+1} = \frac{\sum_{j=0}^{R-1} (a(k, j) - \bar{a}(k))(a(k+1, j) - \bar{a}(k+1))}{\sqrt{\sum_{j=0}^{R-1} (a(k, j) - \bar{a}(k))^2 \cdot \sum_{j=0}^{R-1} (a(k+1, j) - \bar{a}(k+1))^2}}$$

( $R$ : Anzahl der Spalten,  $a(k, j)$ : Grauwert des Bildpunktes in Zeile  $k$  und Spalte  $j$ ,  $\bar{a}(k)$ : mittlerer Grauwert der Bildzeile  $k$ .)

- liegt der Betrag  $|r_{k,k+1}|$  über einem vorgegebenen Schwellenwert  $c$ , wird die Bildzeile  $k+1$  als korrekt angenommen, sonst als fehlerhaft.