Bildanalyse und Bildverstehen

Aufgabe U20 (Kanten in Multi-Merkmalsbildern)

Ein Bild sei nicht durch eine skalare Grauwertfunktion gegeben, sondern durch eine vektorwertige Funktion

$$\vec{m}(x,y) = \begin{pmatrix} m_1(x,y) \\ m_2(x,y) \\ \vdots \\ m_M(x,y) \end{pmatrix}$$

(z.B. Multispektralbild). Es sei hier der Fall zweier kontinuierlicher Variablen *x*, *y* angenommen. Man bestimme zu einem gegebenen Punkt (x_0, y_0) diejenige Richtung α (Winkel zur *x*-Achse), in der sich $\vec{m}$ am stärksten ändert (als Maß der Änderung soll der Betrag der Richtungsableitung dienen):

(a) allgemein,

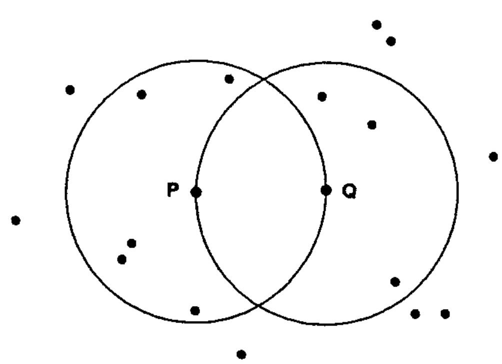
(b) für $\vec{m}(x,y) = (2xy;1;1)^T$, ($x_0$; y_0) = (1; 2).

Aufgabe U21 (punktbasierte Segmentierung)

Es sei eine Menge von Punkten in der Ebene gegeben: $P = \{p_1; p_2; p_3; \ldots p_N\}$. Ein *auf P definierter Graph* ist ein in die Ebene eingebetteter Graph mit Knotenmenge *P*, dessen Kanten Geradenstücken entsprechen, die je 2 Punkte aus *P* verbinden. Ein *minimaler aufspannender Baum* (minimal spanning tree, MST) ist ein auf *P* definierter Graph mit minimaler (euklidischer) Kantenlängensumme. Der *relative Nachbarschaftsgraph* (relative neighbourhood graph, RNG) ist ein auf *P* def. Graph, der genau dann eine Kante zwischen *p* und *q* hat, wenn *p* und *q* *relative Nachbarn* bzgl. *P* sind, d.h. für die euklidischen Abstände *d* gilt:

$$\forall r \in P: \; d(r,p) > d(p,q) \;\text{ oder }\; d(r,q) > d(p,q),$$

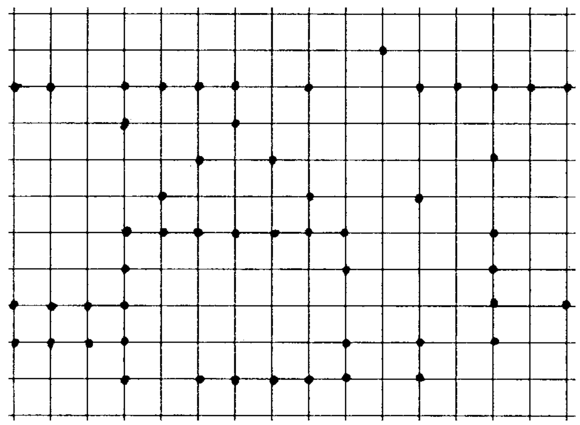
d.h. kein Punkt *r* liegt innerhalb des von *p* und *q* definierten Kreiszweiecks.

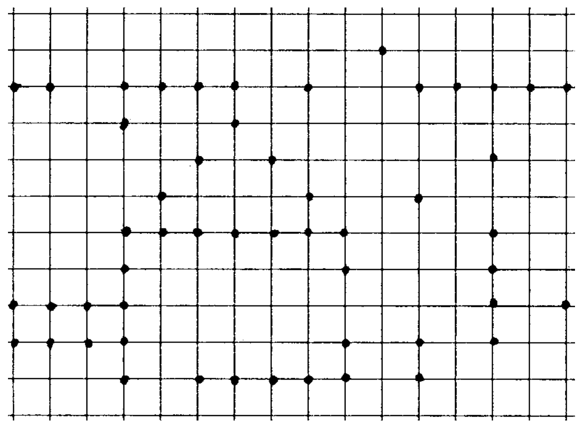


- "Greedy-Algorithmus" zur Bestimmung eines MST:
  (1) Verbinde ein Punktepaar aus P mit kürzestem Abstand.
  (2) Sei T die Menge der schon verbundenen Punkte. Suche einen Punkt p aus $P \setminus T$ und einen Punkt q aus T, so dass der Abstand unter allen solchen Punktepaaren am kürzesten ist, und verbinde p mit q.
  (3) Wiederhole (2), bis keine isolierten Punkte mehr übrig sind.

- Algorithmus zur Bestimmung des RNG:
  Prüfe für jede mögliche Kante pq, ob sie Kante des RNG ist. (Verfahren wird deutlich effizienter, wenn durch a-priori-Wissen feststeht, dass Kanten, deren Längen oberhalb eines bestimmten Schwellenwertes liegen, nicht zum RNG gehören.)

(a) Man zeige, dass der Greedy-Algorithmus tatsächlich einen MST erzeugt.
(b) Man wende den Algorithmus an, um den MST und den RNG des folgenden Punktmusters zu bestimmen.





Anmerkung: Es gilt

$$P \subseteq MST \subseteq RNG \subseteq DT,$$

dabei ist DT die Delaunay-Triangulierung von P (siehe Skript zur Computergrafik, Kapitel 8c).

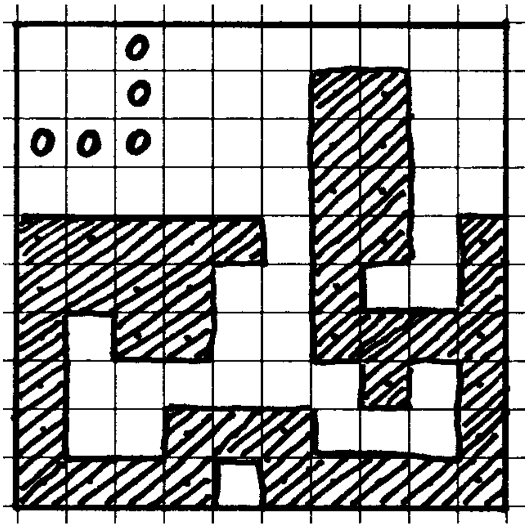
<u>Aufgabe U22</u> (geodätische Distanz, geodätische Merkmale, Wasserscheiden-Transformation)

(a) Die *geodätische Distanz* $d_A(p, q)$ zwischen 2 Bildpunkten p und q in der Bildpunkt-Teilmenge A ($p,q \in A$) ist die minimale Länge eines Pfades, der p und q verbindet (bzgl. der 8-Nachbarschaft) und ganz in A enthalten ist. (Wenn p und q in verschiedenen Zusammenhangs-komponenten von A liegen, wird $d_A(p, q) = \infty$ gesetzt.) Die Menge A wird als *geodätische Maske* bezeichnet. Die Pfade minimaler Länge in A heißen *geodätische Pfade*.
Man zeige: Auf zusammenhängenden Mengen A ist d_A eine Metrik.

(b) Die geodätische Distanz zwischen einem Bildpunkt $p \in A$ und einer Teilmenge ("Markermenge") $M \subseteq A$ ist def. als

$$d_A(p, M) = \min \{ d_A(p, m) \mid m \in M \}.$$

Man bestimme für alle Pixel der folgenden geodätischen Maske A (nicht-schraffierter Bereich) die geodätische Distanz zur mit "0" markierten Menge.



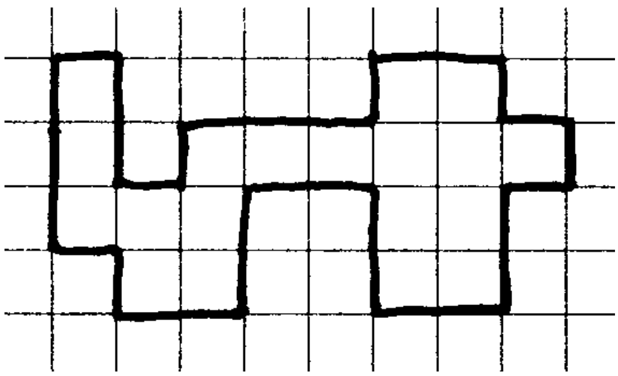
(c) Sei A eine Punktmenge. Die *geodätische Länge* $L(A)$ ist die Länge des längsten geodätischen Weges, der in A enthalten ist. Die *Ausbreitungsfunktion* P_A auf A ist def. als

$$P_A(x) = \max \{ d_A(x, y) \mid y \in A \},$$

also als die maximale Länge eines von x ausgehenden geodätischen Weges in A. Die *geodätischen Endpunkte* von A sind die lokalen Maxima der Ausbreitungsfunktion von A, das *geodätische Zentrum* von A das lokale Minimum seiner Ausbreitungsfunktion. (Beachte: Im Gegensatz zum Schwerpunkt gehört das geodätische Zentrum auch bei nicht-konvexem A stets zu A.) Der *geodätische Radius* ist der Wert der Ausbreitungsfunktion am geodätischen Zentrum. Der *geodätische Formfaktor* von A ist

$$\frac{\pi \cdot L^2(A)}{4 \cdot \text{Fläche}(A)}.$$

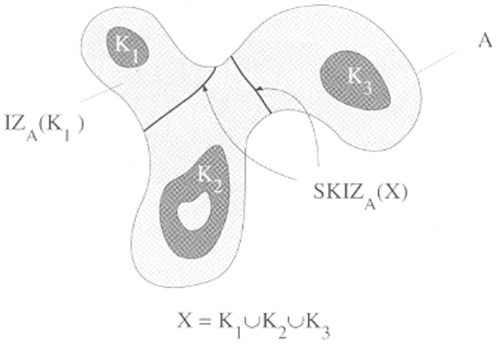
Man bestimme diese Merkmale an der folgenden Menge A.



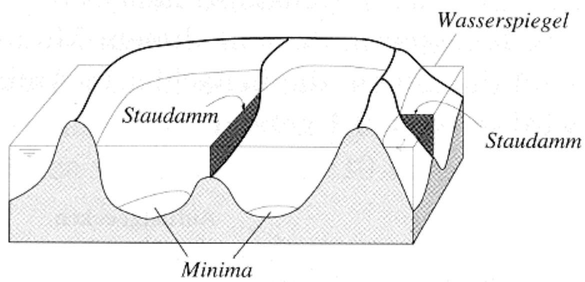
(d) Sei X eine Menge mit den Zusammenhangskomponenten K_i, $X \subseteq A$. Die *geodätische Einflusszone* (influence zone) $IZ_A(K_i)$ einer Zusammenhangskomponente von X in A ist die Menge aller Punkte von A, deren geodätische Distanz zu K_i kleiner als ihre geodätische Distanz zu jeder anderen Komponente von X ist:

$$IZ_A(K_i) = \{ p \in A \mid \forall j \neq i: d_A(p, K_i) < d_A(p, K_j) \}.$$

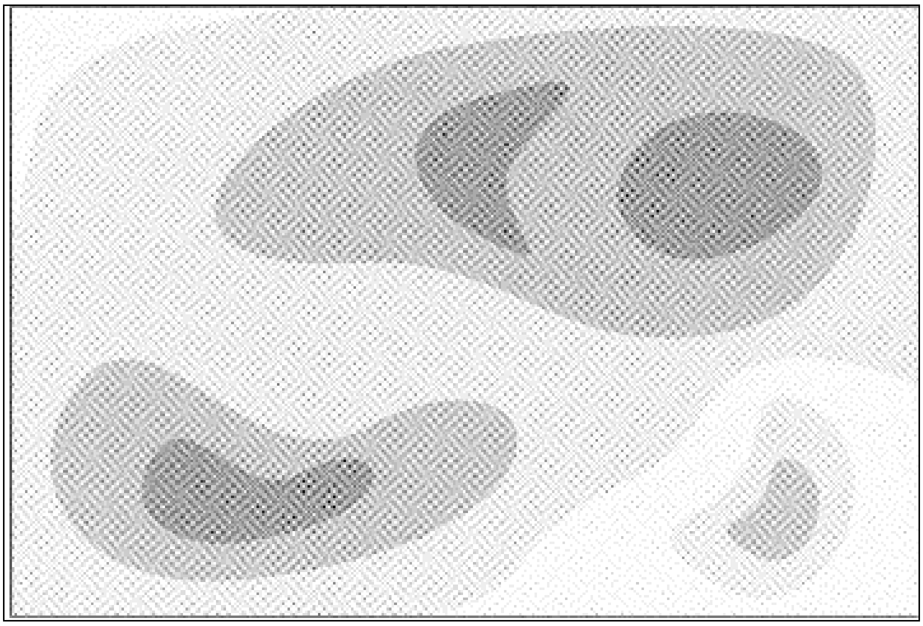
Die Grenzen der Einflusszonen bilden das *geodätische Skelett durch Einflusszonen* (*SKIZ*).



Die *Wasserscheidentransformation* (watershed transform) eines Grauwertbildes B verläuft anschaulich so, dass das "Grauwertgebirge" B von den lokalen Minima aus "geflutet" wird. An den Stellen, wo in diesem Flutungsprozess 2 Wasserbecken (*catchment basins*) zusammenstoßen, werden 1 Pixel-dünne Dämme errichtet.



Präziser: Beginnend mit der minimalen vorkommenden Graustufe $h_{\min}$ durchläuft h alle Graustufen in aufsteigender Folge. $X_{h_{\min}}$ hat als Komponenten die lokalen Minima von B mit Wert $h_{\min}$. X_{h+1} besteht aus den geodätischen Einflusszonen der Komponenten von X_h in der Menge aller Bildpunkte mit Graustufe $\leq h+1$, vereinigt mit denjenigen Bereichen mit Graustufe $h+1$ welche keine Komponenten von X_h einschließen (neu hinzukommende lokale Minima auf Höhe $h+1$). Die Grenzen zwischen den Einflusszonen, die nach maximaler Überflutung ($X_{h_{\max}}$) entstanden sind, bilden die *Segmentierung von B durch Wasserscheiden* (watershed segmentation). (Präziser Pseudocode eines effizienten Algorithmus bei Soille 1998, S. 247ff.). Man skizziere dieses Verfahren in folgendem Grauwertbild:

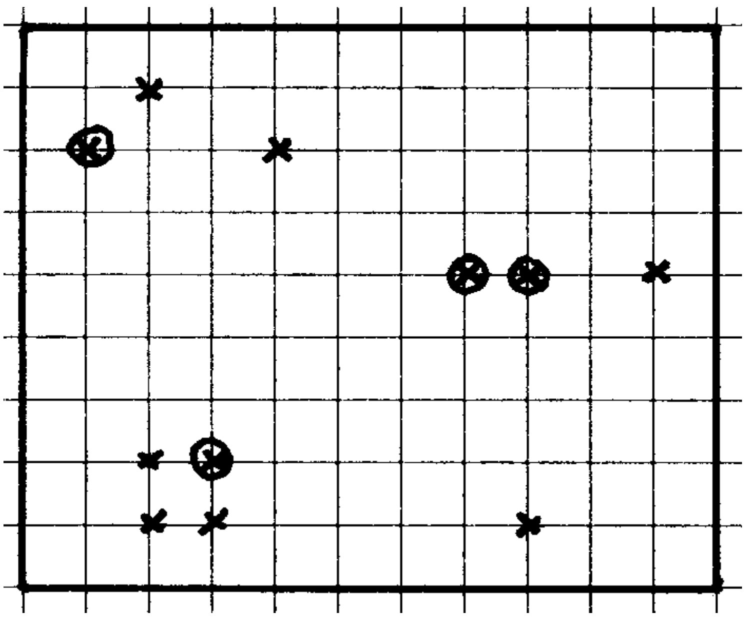


<u>Aufgabe U23</u> (Clusteranalyse)
In einem zweidimensionalen Merkmalsraum liege das unten stehende Punktmuster vor. Mit dem *Minimum-Distanz-Algorithmus* soll eine Clusterung der Punkte (Merkmalsvektoren) in 4 Cluster erzeugt werden:

(1) 4 initiale Cluster-Repräsentanten sind vorgegeben worden (mit Kreis markierte Punkte),
(2) jeder Punkt wird in dasjenige Cluster aufgenommen, dessen Repräsentant am nächsten liegt,
(3) der Schwerpunkt jedes Clusters wird berechnet und wird zum neuen Repräsentanten.

(2) und (3) werden solange wiederholt, bis alle Cluster stabil sind.

Ist die entstehende Clusterung optimal?



(Schablonen für Aufg. U23)