**Bildanalyse und Bildverstehen**

## Die Faltung

Gegeben seien eine Bildmatrix *B* und eine $L \times R$-Matrix *K* ("Kern"). Die Faltung ist eine Verknüpfung *, definiert als

$$K*B = A = (a_{jk})$$

mit

$$a_{jk} = \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{R-1} k_{mn} \cdot b_{j-m,k-n} ,$$

wobei *A* das Format der Bildmatrix *B* hat.
Alternative Möglichkeiten der Randbehandlung:

- Elemente mit negativem Index = 0 setzen, oder
- Bildmatrix *B* in beide Richtungen zyklisch wiederholen.

Beispiel (mit Null-Rand):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontinuierliches Analogon (für Funktionen):

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t) g(x-s, y-t) ds dt .$$

<u>Aufgabe U5</u>
Man beweise, dass für die Faltung von Matrizen das Kommutativ- und das Distributivgesetz gelten.

<u>Aufgabe U6</u>

(a) Man falte die folgende Matrix mit dem Kern $K = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(Mittelwert-Filter):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Man wende den Mittelwertfilter aus Teil (a) auf folgende periodische Strukturen an:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \vdots & & & & & \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccc} & & & \vdots & & & & \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Man diskutiere an diesen Beispielen die Eignung als Tiefpassfilter.

Aufgabe U7

Die Bildmatrix $B$ setze sich additiv aus einem Originalbild $B_0$ und einem Rauschanteil $R$ zusammen, wobei letzterer als Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2$ definiert sei: $B = B_0 + R$, $E(R) = 0$, $Var(R) = \sigma^2$. Die Rauschanteile $r_{ij}$ in den einzelnen Positionen $i,j$ seien paarweise stochastisch unabhängig. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $K{*}B – K{*}B_0$, wenn $K$ der Mittelwertfilter aus Aufg. U6 ist?

Aufgabe U8

Günstigere Eigenschaften als der Mittelwertfilter hat der *Binomialfilter*. 1-dimensionale Form: $B_n = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0,\ldots,n}$, 2-dim. Form: $B_m^T \cdot B_n$ (Matrixprodukt). Man berechne den Binomialfilter $B_2^T \cdot B_3$ und wende ihn auf die beiden periodischen Muster aus Aufgabe U6(b) an.