Bildanalyse und Bildverstehen

Die Faltung

Gegeben seien eine Bildmatrix B und eine $L \times R$-Matrix K ("Kern"). Die Faltung ist eine Verknüpfung *, definiert als

$$K * B = A = (a_{jk})$$

mit

$$a_{jk} = \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{R-1} k_{mn} \cdot b_{j-m,k-n} \ ,$$

wobei A das Format der Bildmatrix B hat.
Alternative Möglichkeiten der Randbehandlung:

- Elemente mit negativem Index = 0 setzen, oder
- Bildmatrix B in beide Richtungen zyklisch wiederholen.
- Verwendung modifizierter Filtermasken am Rand

Beispiel (mit Null-Rand):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontinuierliches Analogon (für Funktionen):

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t) g(x-s, y-t) ds dt \ .$$

<u>Aufgabe U5</u>
Man beweise, dass für die Faltung von Matrizen das Kommutativ- und das Distributivgesetz gelten.

<u>Aufgabe U6</u>

(a) Man falte die folgende Matrix mit dem Kern $K = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(Mittelwert-Filter):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Man wende den Mittelwertfilter aus Teil (a) auf folgende periodische Strukturen an:

$$\begin{matrix} & & & \vdots & & & & & \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & & & \vdots & & & & & \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & & \end{matrix}$$

Man diskutiere an diesen Beispielen die Eignung als Tiefpassfilter.

<u>Aufgabe U7</u>

Günstigere Eigenschaften als der Mittelwertfilter hat der *Binomialfilter*. 1-dimensionale Form: $B_n = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0,\ldots,n}$, 2-dim. Form: $B_m^T \cdot B_n$ (Matrixprodukt). Man berechne den Binomialfilter $B_2^T \cdot B_3$ und wende ihn auf die beiden periodischen Muster aus Aufgabe U6(b) an.