

4. Digitalisierung und Bildoperationen

4.1 Digitalisierung (Sampling, Abtastung)

Rasterung auf 2D-Bildmatrix

mathematisch: Abb. einer 2-dim. Bildfunktion mit kontinuierlichem Definitionsbereich auf digitales Bild im obigen Sinne, also auf 2-dim. Matrix mit diskretem Def.bereich.

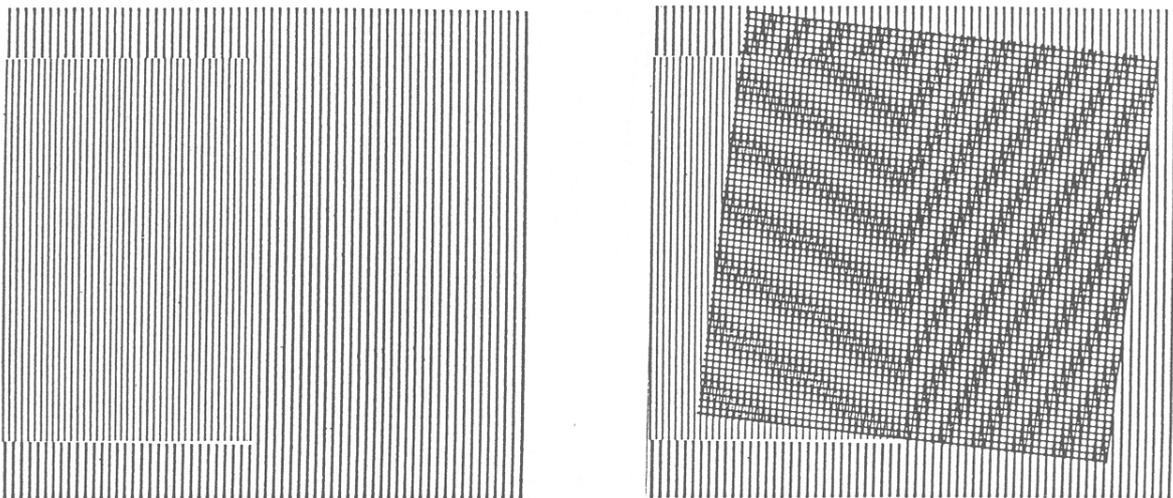
$$f(x_1, x_2) \rightarrow f_{m,n} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Bildpunkt auf dem Gitter: *Pixel* (picture element)
(manchmal auch *PeI*)

Digitalisierung immer verbunden mit Informationsverlust
– oft auch mit Verfälschungen des ursprüngl. Bildes

Moiré-Effekt:

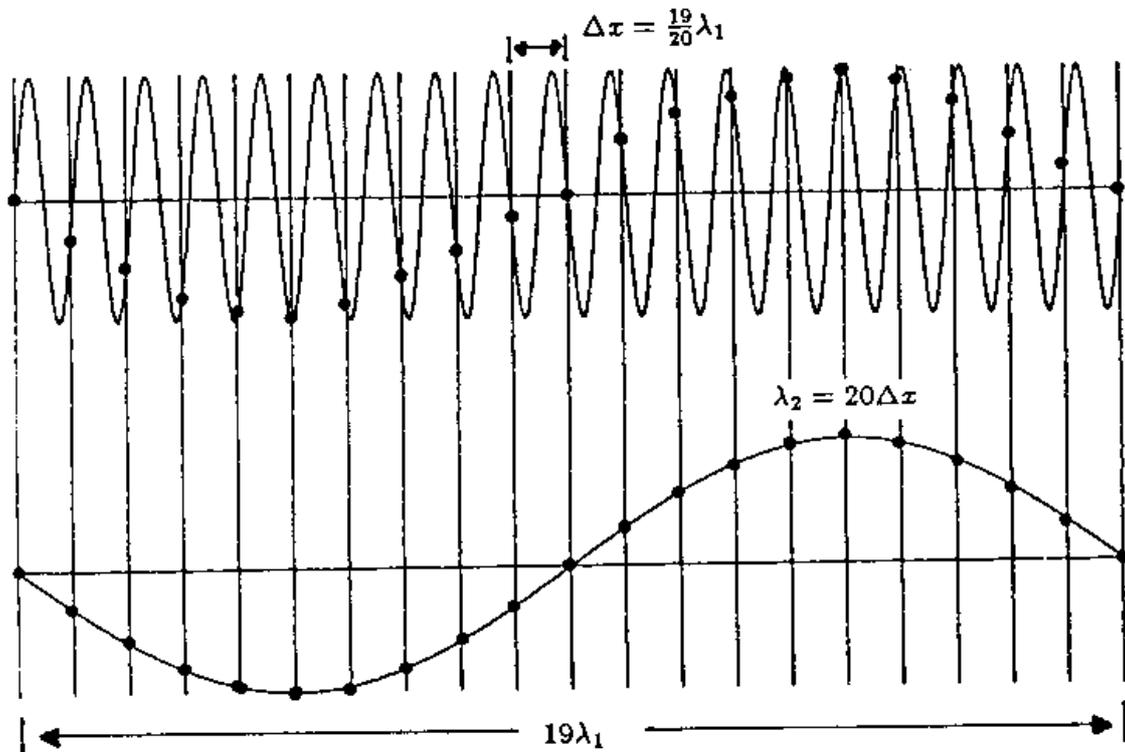
links Originalbild: zwei eindim. Gitter mit verschiedenen Linienabständen, rechts wird die Digitalisierung durch Überlagerung eines 2-dim. Rasters simuliert



(aus Jähne 1993)

= Spezialfall eines *Aliasing*-Phänomens

1-dimensionales Analogon:
 Abtastung einer Sinusschwingung mit einem
 Abtastintervall, das in der Nähe der Wellenlänge liegt



⇒ es entsteht eine "Scheinschwingung" mit großer Wellenlänge

Erklärung der Aliasing-Phänomene:
 Übergang vom 2-dim. Ortsraum in den 2-dim.
 Frequenzraum (Fourier-Transformation)

Transformation

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xu + yv)} dx dy$$

Inverse Transformation

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu + yv)} du dv$$

Eigenschaften der FT

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)\} = F(u, v)$$

- Linearität

$$\mathfrak{F}\{af_1(x, y) + bf_2(x, y)\} = aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$$

- Verschiebung im Bildbereich

$$\mathfrak{F}\{f(x - a, y - b)\} = F(u, v)e^{-2\pi i(au + bv)}$$

- Verschiebung im Frequenzbereich

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)e^{2\pi i(u_0x + v_0y)}\} = F(u - u_0, v - v_0)$$

(Beichel 2002)

in den folgenden Formeln benötigen wir eine Verknüpfung von Funktionen, $g = f * h$:

- Faltung
$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a, b)h(x - a, y - b)dad b$$
$$(f * h)(x, y) = (h * f)(x, y)$$

(Kommutativität)

Hinsichtlich der Fouriertransformation gilt eine Dualität zwischen Faltung und punktweiser Multiplikation:

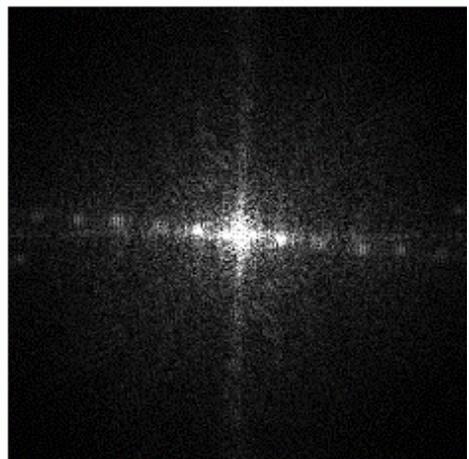
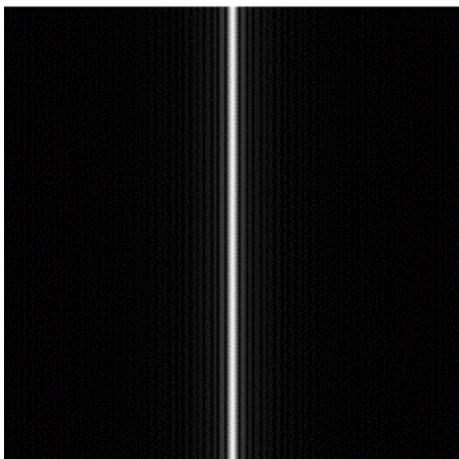
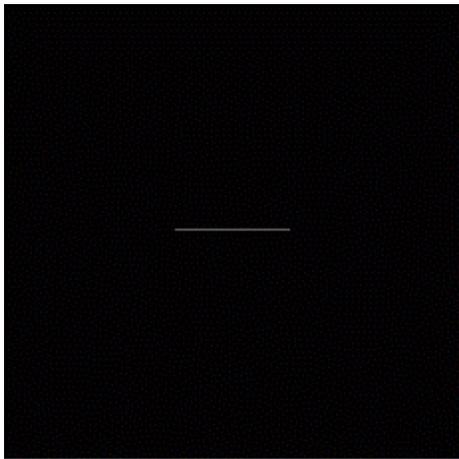
- Dualität der Faltung

$$\mathfrak{F}\{(f * h)(x, y)\} = F(u, v)H(u, v)$$

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)h(x, y)\} = (F * H)(u, v)$$

Beispiele für die Anwendung der FT:

(oben: Ausgangsbild, unten: Transformation in den Frequenzraum)



zurück zur Digitalisierung:

die Abtastfunktion ist ein "Kamm" aus vielen

Nadelimpulsen (Dirac-Impulsen δ)

die abgetastete Funktion entsteht durch (punktweise) Produktbildung mit diesem "Abtast-Nagelbrett":

- Abtastfunktion
$$s(x, y) = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y)$$

- Abgetastete Funktion

$$\begin{aligned} f_s(x, y) &= f(x, y)s(x, y) \\ &= f(x, y) \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y) \end{aligned}$$

Dem Deltakamm ("Nagelbrett") im Ortsraum entspricht im Frequenzraum auch eine Gitterfunktion, das *reziproke Gitter* (wichtig in der Kristallographie / Röntgenstrukturanalyse, Interferenzbilder!)

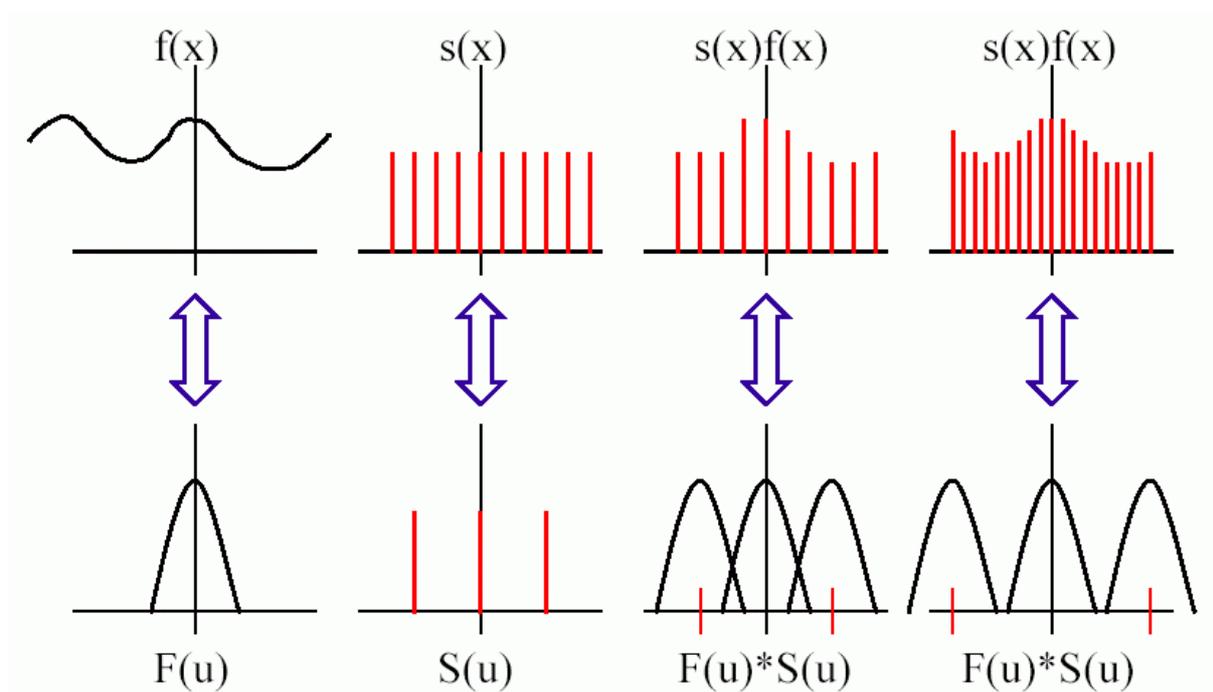
dem Produkt entspricht im Frequenzraum nach dem Dualitätssatz eine *Faltung mit dem reziproken Gitter*, was im Ergebnis einer periodischen Wiederholung der transformierten Funktion $F(u,v)$ (des "Bildspektrums") gleichkommt:

- Im Frequenzbereich: Summe von periodisch wiederholtem Bildspektrum $F(u,v)$

$$F_s(u,v) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(u - \frac{j}{\Delta x}, v - \frac{k}{\Delta y}\right)$$

- führt zu **Aliasing**, wenn die einzelnen Spektren $F(u,v)$ überlappen

Beispiel (1-dimensional):



Aliasing kann verhindert werden, wenn die Ausgangsfunktion (das Ausgangsbild) ein *bandbegrenzt*es Spektrum hat (also hohe Frequenzen unterdrückt sind; $F(u,v) = 0$ für $|u| > U$, $|v| > V$ mit Schranken U , V):

Dann kann man dafür sorgen, dass die Gitterabstände Δx , Δy klein genug sind, dass keine Überlappung der Spektren im Frequenzraum der mit dem reziproken Gitter gefalteten Funktion auftritt.

Abtast-Theorem von Shannon

- Überlappung kann verhindert werden wenn:

$$\Delta x < \frac{1}{2U}, \quad \Delta y < \frac{1}{2V}$$

Das heißt:

Das Abtastintervall sollte um mehr als den Faktor 2 kleiner sein als das kleinste interessierende Detail im Bild.

$2U$, $2V$ heißen *Nyquist-Frequenzen*.

Standardabtastung:

eine Digitalisierung, bei der die Intensitäten gleichmäßig über die Fläche einer Rasterzelle gemittelt werden (z.B. bei einer idealen CCD-Kamera).

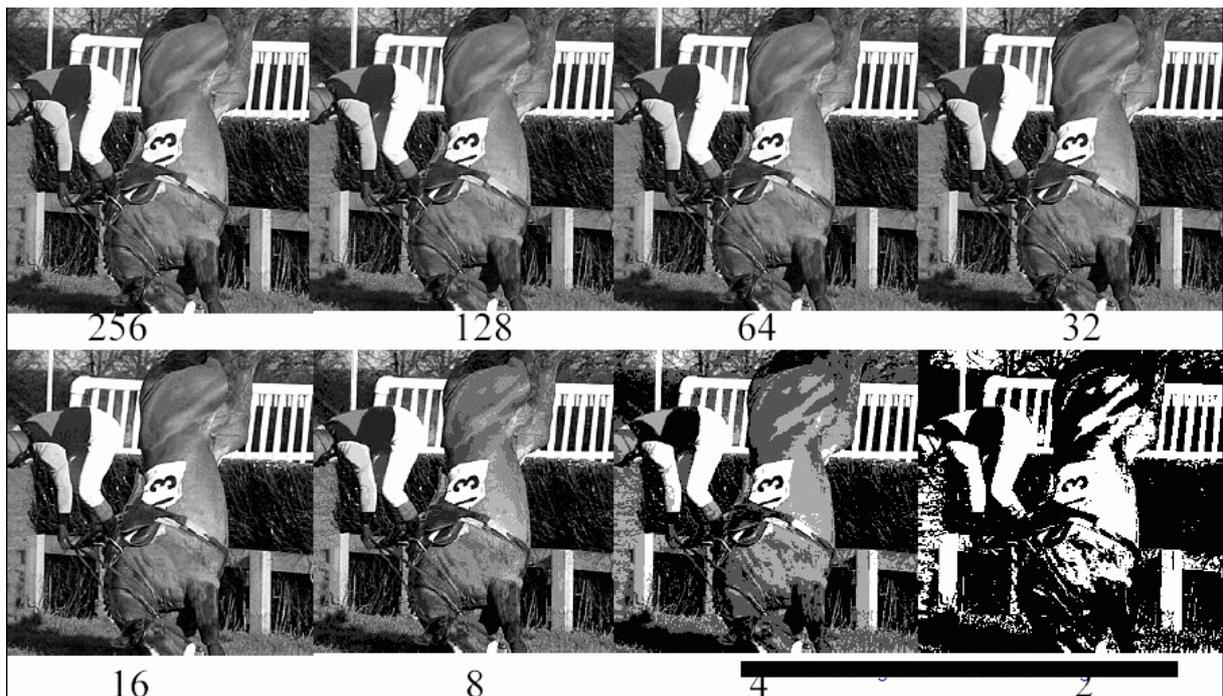
Achtung: Die Standardabtastung erfüllt *nicht* das Abtasttheorem!

⇒ die Standardabtastung führt i. allg. zu Moiré-Effekten (sichtbar z.B. bei Bearbeitung von gescannten Fotos).

Abhilfe: Filterfunktionen, die Bandbegrenzung sicherstellen.

Quantisierung der Grauwerte (Intensitätswerte)

- Übergang zwischen **kontinuierlichem** Funktionswert und **digitalem** Wert
- Anzahl der Quantisierungsstufen sollte hoch genug sein, um feine Schattierungen erkennen zu können
- Üblicherweise Einteilung in k Intervalle: $k = 2^b$ (b entspricht Anzahl der Bits, z.B. 1, 8, 24)
- Problem: **Falsche Konturen** erscheinen



Die Quantisierung der Grauwerte kann optimiert werden. Dazu die folgenden präzisen Definitionen:

Der Schritt, der nach der Diskretisierung folgt, ist die Quantisierung.

Es sei $f(j,k)$ ein diskretes Zufallsfeld, dessen Werte kontinuierlich zwischen zwei Schranken liegen: $f_{\text{MIN}} \leq f(j, k) \leq f_{\text{MAX}}$

$f_q(j,k)$: quantisiertes Zufallsfeld, das K diskrete Werte q_1, \dots, q_k annehmen kann.

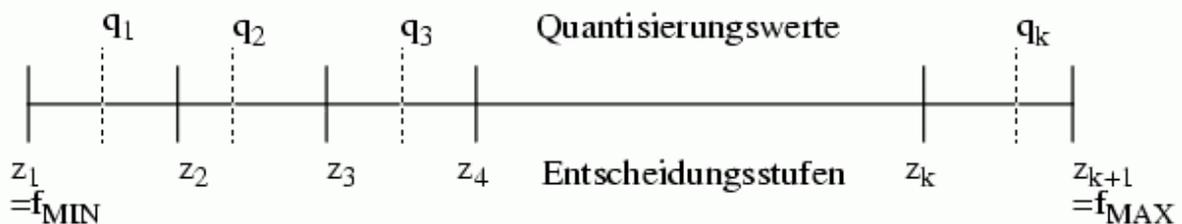
$f_q(j,k) \in \{q_1, \dots, q_k\}$ mit $q_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, k$

Quantisierer: $f(j,k) \longrightarrow f_q(j,k)$.

Ein Quantisierer bildet eine kontinuierliche Funktion f in eine diskretwertige Funktion f_q ab. Er benutzt hierfür eine Menge von Entscheidungsstufen

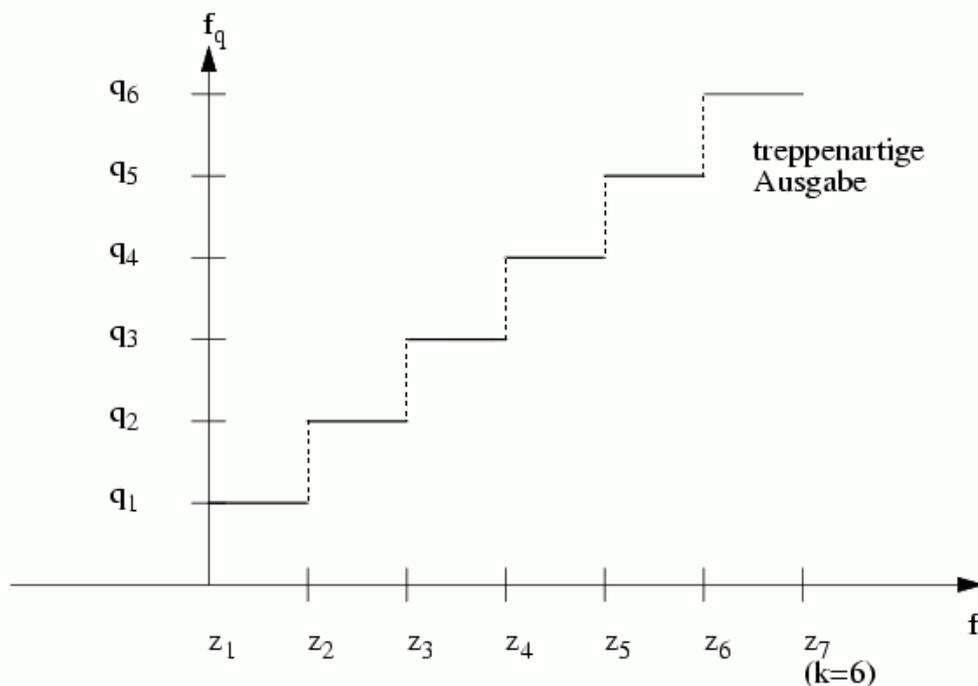
$\{z_1=f_{\text{MIN}}, \dots, z_{k+1}=f_{\text{MAX}}\}$ mit der folgenden Quantisierungsvorschrift:

Wenn $f \in [z_i, z_{i+1}]$, dann wird $f=f_q=q_i$ gesetzt. Anschaulich:



q_i liegt im allgemeinen nicht in der Mitte der Intervalle.

Sehr häufig wird auch die folgende Darstellung eines Quantisierers verwendet:



Quantisierer

Optimale Quantisierung (Lloyd-Max-Quantisierung):

Gegeben: $p_f(z)$ = Wahrscheinlichkeitsdichte des Zufallsfeldes f

Gesucht: Entscheidungsstufen z_i ($i=1, \dots, k+1$) und q_j ($j=1, \dots, k$)

Ansatz: Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers $\langle e_q^2 \rangle$:

$$e_q = z - z_q$$

$$\begin{aligned} \langle e_q^2 \rangle &= \overline{e_q^2} = E[(f - f_q)^2] = \int_{z_1}^{z_{k+1}} (z - z_q)^2 p_f(z) dz \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{z_j}^{z_{j+1}} (z - q_j)^2 p_f(z) dz \end{aligned}$$

Minimaler Quantisierungsfehler:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial}{\partial z_j} \langle e_q^2 \rangle &= (z_j - q_{j-1})^2 p_f(z_j) - (z_j - q_j)^2 p_f(z_j) \\ &= 0, \quad \text{für } j = 2, 3, \dots, k \quad (\text{keine Differenzierung in den Endpunkten}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \langle e_q^2 \rangle = -2 \int_{z_j}^{z_{j+1}} (z - q_j) p_f(z) dz = 0, \quad \text{für } j = 1, \dots, k$$

$$\text{Aus (1) folgt: (1')} \quad z_j = \frac{q_j + q_{j+1}}{2}, \quad j = 2, 3, \dots, k$$

$$\text{Aus (2) folgt (2')} \quad q_j = \frac{\int_{z_j}^{z_{j+1}} z p_f(z) dz}{\int_{z_j}^{z_{j+1}} p_f(z) dz}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Interpretation: Entscheidungsstufen z_j liegen in der Mitte zwischen den beiden benachbarten Quantisierungswerten q_{j-1} und q_j und jedes q_j liegt im lokalen normierten Mittelwert der Verteilung $p_f(z)$ in dem Intervall $[z_j, z_{j+1}]$.

Mathematisch: (1') und (2') stellen ein nichtlineares Gleichungssystem dar, das für alle j simultan gelöst werden muß, sofern z_1 und z_{k+1} vorgegeben werden.

Für folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen wurde dieses Gleichungssystem gelöst:

$$\text{a) Gau\ss:} \quad p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

$$\text{b) Laplace:} \quad p(z) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|z-\mu|}; \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

$$\text{c) Rayleigh:} \quad p(z) = \frac{2z}{\sigma(2\sigma + \mu\sqrt{2\pi})} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}}; \quad z \geq 0$$

$$\text{d) Lognormal:} \quad p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma z} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{\sigma^2}}; \quad z \geq 0$$

Bei den entsprechenden Berechnungen werden üblicherweise

$\mu = 0$, $\sigma = 1$, $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} = \sqrt{2}$, und $z_1 = -\infty$, $z_{k+1} = +\infty$ angenommen.

Spezialfall: Gleichförmige (lineare) Quantisierung

Gleichförmige Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$p_f(z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{(z_{k+1} - z_1)} \right); & z_1 \leq z \leq z_{k+1} \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

(1') gilt unverändert:

$$z_j = \frac{q_j - q_{j-1}}{2}; \text{ für } j = 1, 2, \dots, k$$

$$(2') \quad q_j = \frac{\int_{z_j}^{z_{j+1}} z \, dz}{\int_{z_j}^{z_{j+1}} dz} = \frac{(z_{j+1}^2 - z_j^2)}{2(z_{j+1} - z_j)} = \frac{(z_{j+1} + z_j)}{2} \quad \text{mit } j = 2, 3, \dots, k$$

Die Quantisierungswerte q_j befinden sich jeweils in der Mitte der zwei benachbarten Entscheidungsstufen.

(1') und (2') sind jetzt lineare Gleichungen, daher auch der Name lineare Quantisierung.

Kombination von (1') und (2').

$$q_j = \frac{1}{2} \left[\frac{q_j + q_{j-1}}{2} + \frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right] = \frac{1}{4} [2q_j + q_{j+1} + q_{j-1}]$$

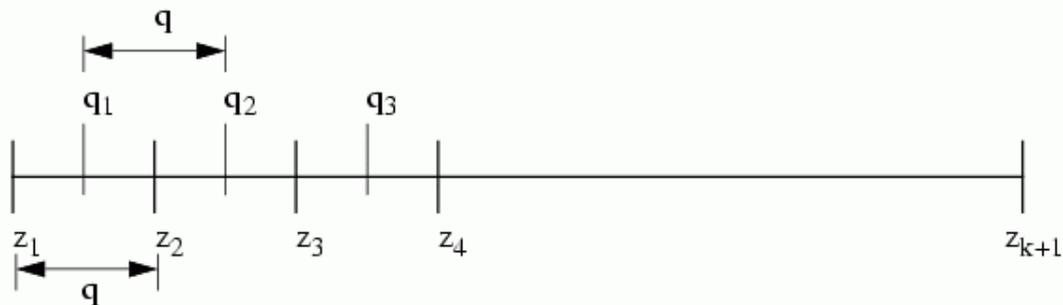
$$\frac{1}{2} q_j = \frac{1}{4} (q_{j+1} + q_{j-1})$$

$$q_j = \frac{q_{j+1} + q_{j-1}}{2}$$

Daraus folgt: $q_j - q_{j-1} = q_{j+1} - q_j = \text{const} = q$ und

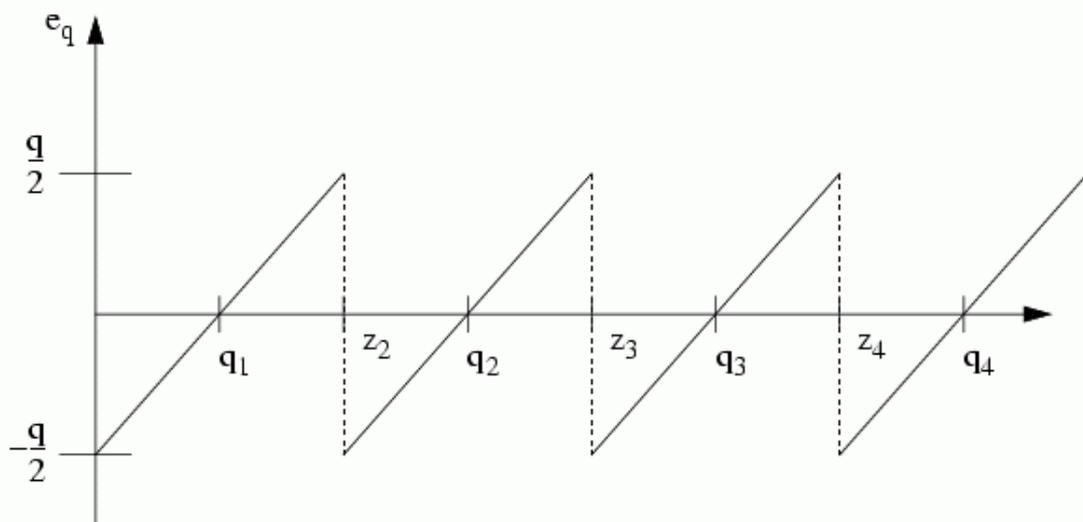
$$q_j = q_{j-1} + q, \quad z_j = q_j + q/2, \quad z_j - z_{j-1} = q_j - q_{j-1} = q$$

Die Entscheidungsstufen z_j und die Quantisierungswerte q_j sind mit demselben Abstand q äquidistant angeordnet.



Quantisierungsfehler $e_q = z - z_q = z - q_j = z - j \frac{q}{2}$, $z \in [z_j, z_{j+1}]$, $j=1, \dots, k$ ist für alle Entscheidungsintervalle $[z_j, z_{j+1}]$ gleich.

Sägezahnform: Der Fehler schwankt zwischen $-q/2$ über 0 (bei q_j) und $+q/2$.



(aus Levi 2002)

4.2 Bildoperationen

(g_I : Input-Bild, g_O : Output-Bild)

Klassen von Operationen

Punktoperation

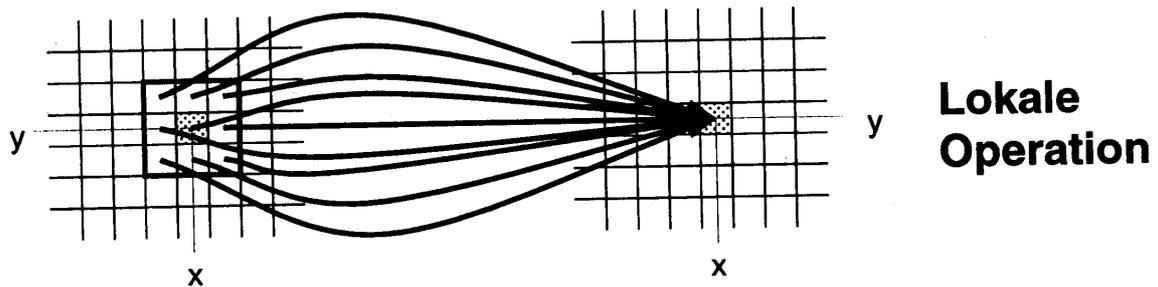
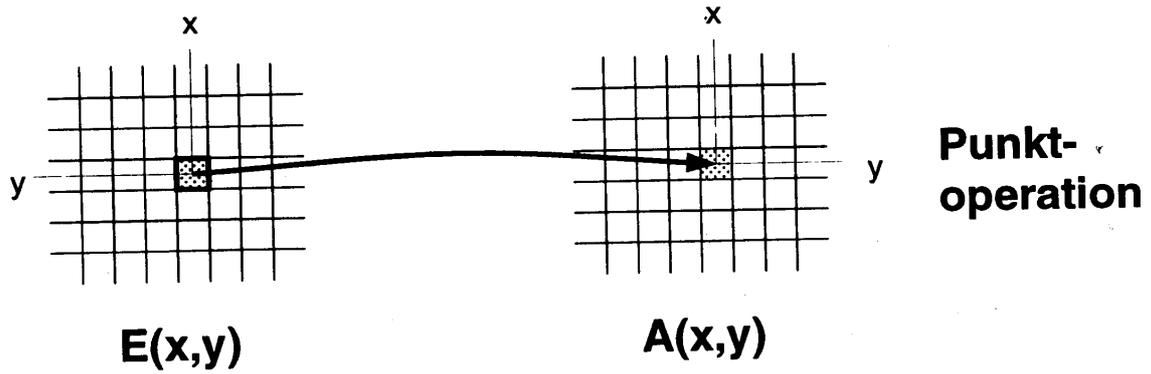
$$g_O(i, j) = f \{ g_I(i, j, k) \mid k = 0, 1, \dots, K - 1 \}$$

Lokale Operation

$$g_O(i, j) = f \left[\left\{ g_I(i - l, j - m, k) \mid l = -\frac{L-1}{2}, \dots, +\frac{L-1}{2}; \right. \right. \\ \left. \left. m = -\frac{M-1}{2}, \dots, +\frac{M-1}{2}; k = 0, \dots, K - 1 \right\} \right]$$

Globale Operation

$$g_O(i, j) = f \left[\left\{ g_I(i, j, k) \mid i = 0, \dots, I - 1; j = 0, \dots, J - 1; \right. \right. \\ \left. \left. k = 0, \dots, K - 1 \right\} \right]$$



(aus Pinz 1994)

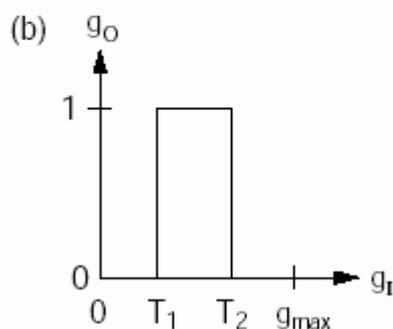
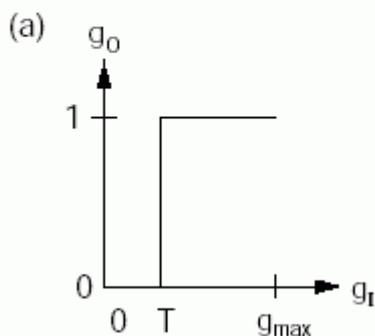
Punktoperationen an einem Eingangsbild

(1) Veränderung der Helligkeit H und des Kontrastes K

$$g_o(i,j) = K \cdot g_I(i,j) + H$$

(2) Tabellenoperationen

– Schwellwertbildung



Kennlinie für eine Schwellwertbildung mit (a) ein und (b) zwei Schwellen

$$(a) \quad g_o(i,j) = 0 \text{ wenn } g_I(i,j) \leq T \\ 1 \text{ sonst}$$

$$(b) \quad g_o(i,j) = 0 \text{ wenn } g_I(i,j) \leq T_1 \text{ oder } g_I(i,j) > T_2 \\ 1 \text{ sonst}$$

– Konversionen

$$g_o(i,j) = Cg_I^2(i,j)$$

$$g_o(i,j) = C\sqrt{g_I(i,j)}$$

$$g_o(i,j) = \ln [C_1g_I(i,j) + C_2]$$

$$g_o(i,j) = \exp [g_I(i,j) + C_1] + C_2$$

– Funktionstabelle

$$g_o = f(g_I)$$

häufig verwendete Funktionen:

linear $y = x$

negative linear $y = -x$

quadratisch $y = \frac{x^2}{255}$

Wurzel $y = \sqrt{255x}$

Binär $y = \begin{cases} 0, & x < x_u \\ 1, & x_u < x < x_o \\ 0, & x > x_o \end{cases}$

Gauß $y = 255 - \frac{5795}{\sqrt{2\pi e}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

für $0 \leq x \leq 255$ und $\sigma = 82, m = 0$

Punktoperationen mit mehreren Eingangsbildern

(3) Differenzbildung von Bildern

- Hintergrundsubtraktion

$$g_O(i, j) = g_I(i, j) - g_B(i, j)$$

- Änderungsdetektion

$$g_O(i, j) = | g_I(i, j, k) - g_I(i, j, k + 1) |$$

(4) Summenbildung von Bildern

- Lineartransformation

$$g_O(i, j) = a \cdot g_R(i, j) + b \cdot g_G(i, j) + c \cdot g_B(i, j)$$

- Rauschminderung durch Mittelung

$$g_O(i, j) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} g_I(i, j, k)$$

(5) Produktbildung von Bildern

(Maskierung, Shading-Korrektur)

$$g_O(i, j) = g_B(i, j) \cdot g_I(i, j)$$

(nach Liedtke 2002)

- Punktoperationen stehen auf der untersten Komplexitätsstufe der Bildverarbeitungsoperatoren
- neuer Grauwert oder neue Position werden ohne Berücksichtigung der Umgebung des jeweiligen Punktes berechnet

häufige Realisierung:
Lookup-Table (LUT)

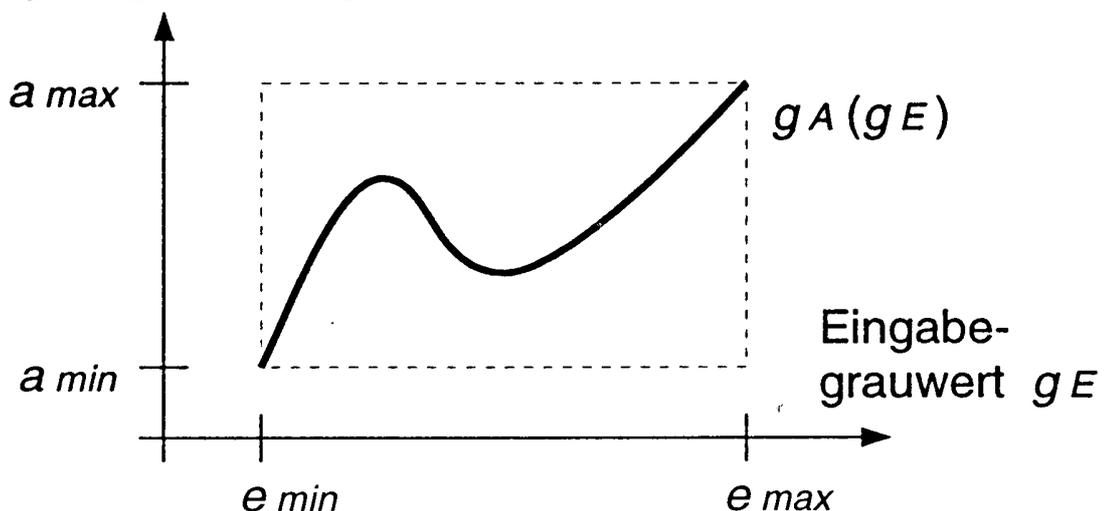
$$g_o(i, j) = \text{LUT}(g_i(i, j))$$

Speicher: unter Adresse x (Eingabe-Grauwert) ist Inhalt (transformierter Grauwert) y

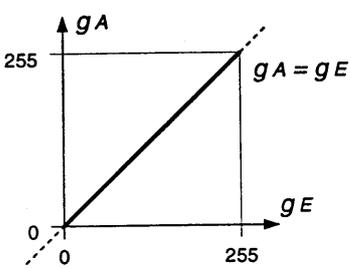
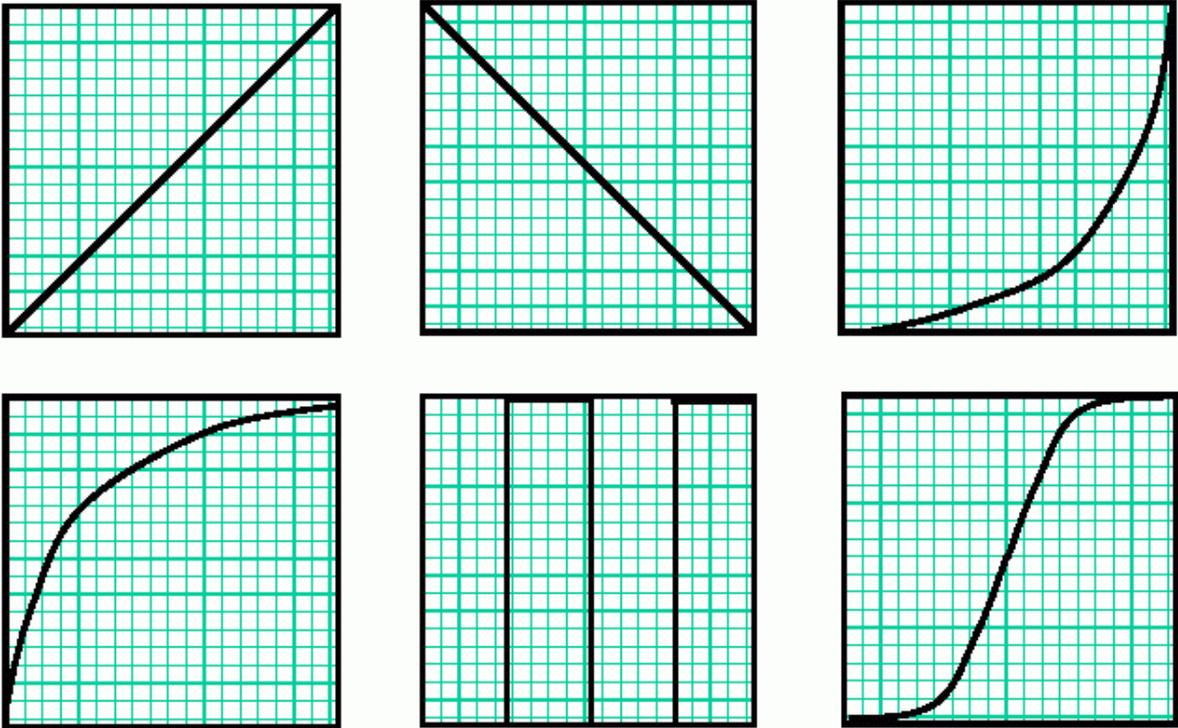
Vorteil: Berechnung erfolgt nur einmal; sehr schnell – auch Hardware-Unterstützung

Darstellung als Tabelle oder in Diagrammform

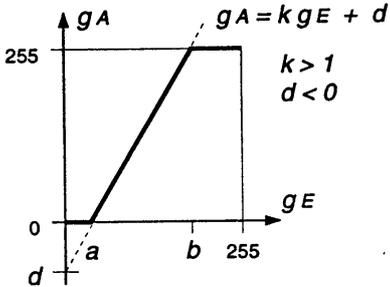
Ausgabegrauwert g_A



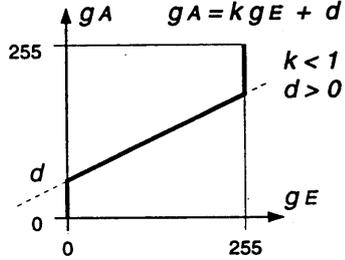
häufig verwendete Funktionen für LUTs:



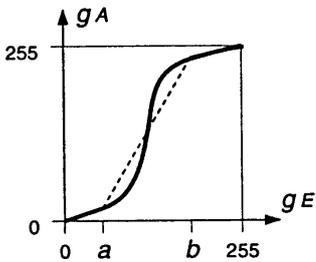
a. Identität



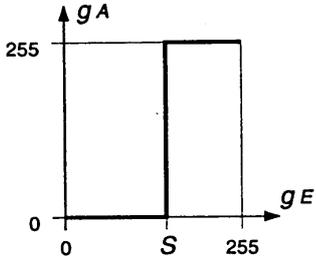
b. Kontrasterhöhung



c. Kontrastverminderung



d. Detailkontrasterhöhung



e. Schwellwertoperation

Anwendungsbeispiele:

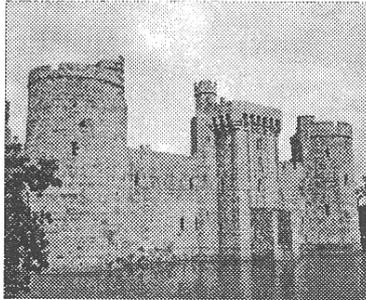
Invertierung



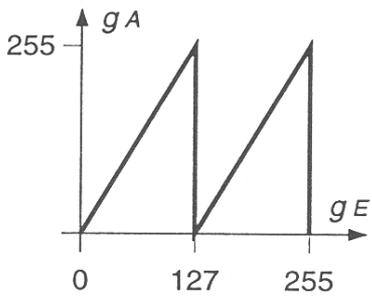
Dunkelung / Aufhellung



Schwellenwert / Spreizung



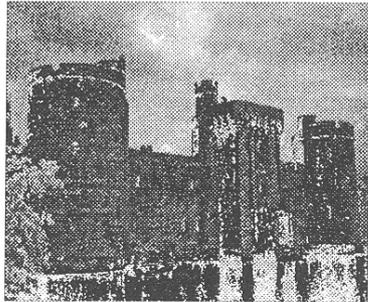
(a)



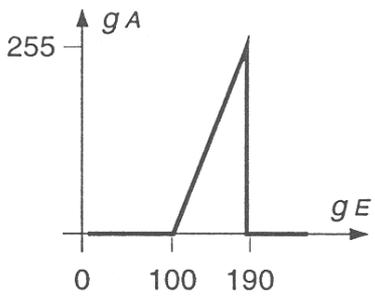
(b)

gE	gA
0	0
1	2
...	...
127	255
128	0
...	...
255	255

(c)



(d)



(e)

gE	gA
0	0
...	...
100	0
...	...
190	255
191	0
...	...
255	0

(f)



(g)

Dehnung (Spreizung) der Grauwertskala:

allg. Transformationsgleichung

$$g_o(i, j) = u \cdot g_i(i, j) + v$$

Konstante u beeinflusst den Kontrast, v die Helligkeit

➤ Dehnung GW-Skala

➤ Diskreter Fall (mit 8Bit)

$$A(x, y) = \begin{cases} 255 & , \text{wenn } u \cdot E(x, y) + v > 255 \\ 0 & , \text{wenn } u \cdot E(x, y) + v < 0 \\ u \cdot E(x, y) + v & , \text{sonst} \end{cases}$$

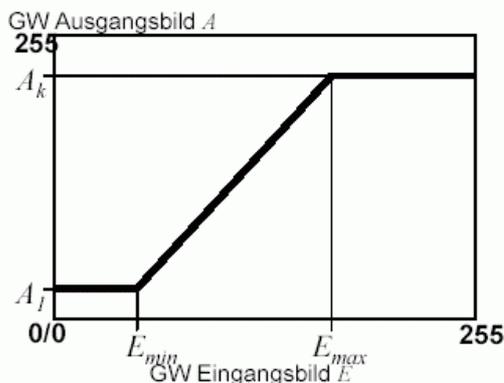
➤ nicht linear

(hier A : Ausgabebild, E : Eingabebild)

➤ Lineare Dehnung GW-Skala

➤ $E(x, y)$ mit E_{min} und E_{max}

➤ $A(x, y)$ mit A_l und A_k

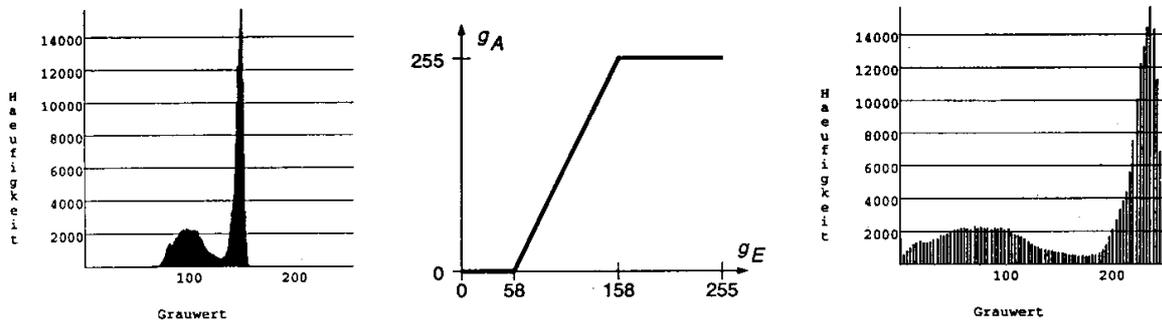


mit $E_{min} \leq E(x, y) \leq E_{max}$

und $A_l \leq A(x, y) \leq A_k$

$$A(x, y) = \frac{A_k - A_l}{E_{max} - E_{min}} \cdot (E(x, y) - E_{min}) + A_l$$

Wirkung auf das Histogramm:



- Lineare Dehnung GW-Skala mit Clipping
 - Abschneiden der Extremwerte + Dehnung
 - Man wählt Intervall, sodass

$$E_{\min} \leq E'_{\min} \leq E'_{\max} \leq E_{\max}$$

- Nur 1% - 5% der (Extrem-)Werte sollten jeweils in den Intervallen liegen

$$E_{\min} - E'_{\min} \quad \text{bzw.} \quad E_{\max} - E'_{\max}$$

Histogramm-Einebnung

- Histogrammebnung (Grauwertäqualisation)
 - Histogramm: Häufigkeit des Auftretens von GW
 - Gleichverteilung der GW über die (diskrete) GW-Skala
 - Verstärkt den Kontrast um das Maximum und verringert den Kontrast um das Minimum

siehe Übung