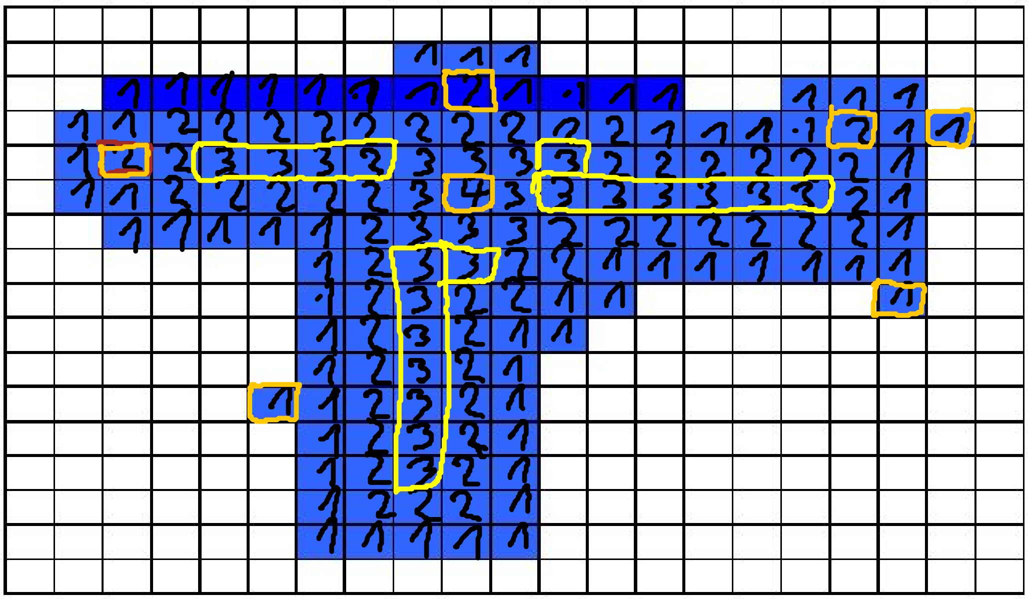
Bildanalyse und Bildverstehen
Lösung Aufgabe U19

1. Verfahren
d = 1;
iteriere:
markiere alle Objektpunkte am Rand (bzgl. 8-Nachbarschaft)
mit d;
lösche diese Punkte aus dem Objekt;
d++;
bis keine Objektpunkte mehr übrig sind; Mittelachsenpunkte = Punkte mit d>0, in deren 8-Nachbarschaft
keine Punkte mit höherem d-Wert liegen.



								1	1	1										
		1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1			1	1	1		
	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1	1	
	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1		
	1	1	2	2	2	2	2	3	4	3	3	3	3	3	3	3	2	1		
		1	1	1	1	1	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1		
						1	2	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1		
						1	2	3	2	2	1	1						1		
						1	2	3	2	1	1									
						1	2	3	2	1										
					1	1	2	3	2	1										
						1	2	3	2	1										
						1	2	3	2	1										
						1	2	2	2	1										
						1	1	1	2	1										

(Skelett : eingerahmt)
Vorteile : - einfaches Verfahren
- benutzt unmittelbar Def .der Distanz im Gitter.
Nachteile: - Skelett unzusammenhängend
- isolierte Teile des Skeletts ganz außen

2. Verfahren

Algorithmus:

Für jeden Punkt wird die 8-Nachbarschaft wie folgt durchnummeriert:

p_9	p_2	p_3
p_8	$\boxed{p_1}$	p_4
p_7	p_6	p_5

Es sei $Z(x)$ die Anzahl der (8-)Nachbarpunkte von x mit Grauwert 1.
$S(x)$ sei die Anzahl der $0 \rightarrow 1$-Übergänge in der gerichteten, zyklischen Pixelkette $p_2 p_3 \ldots p_9 p_2$.
Alle Objektpunkte werden in den folgenden Durchläufen untersucht.

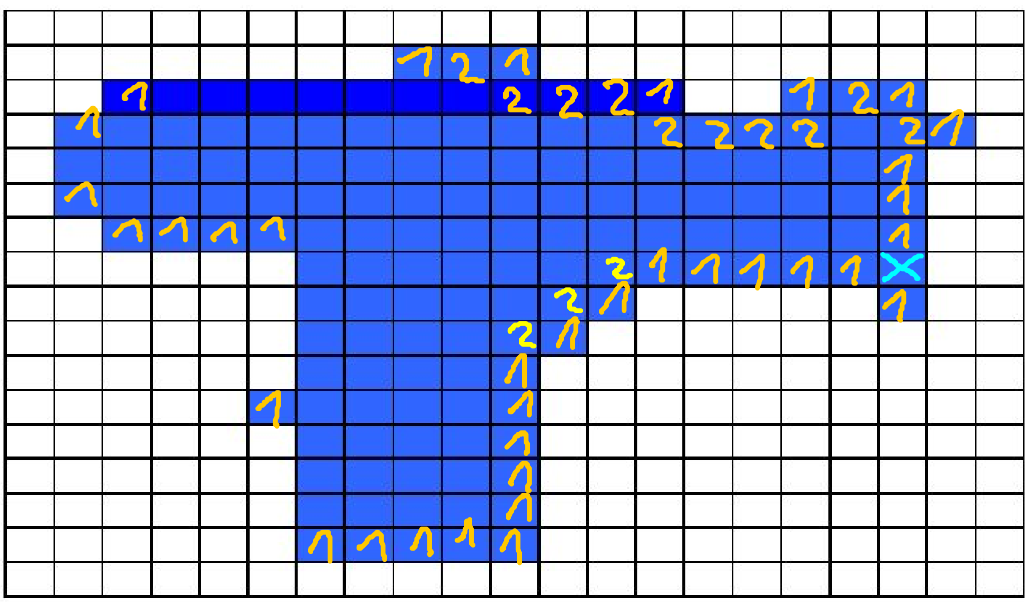
Durchlauf 1:

Ein Punkt wird markiert, wenn er die Bedingungen

(1) $2 \leq Z(p_1) \leq 6$
(2) $S(p_1) = 1$
(3) $p_2 p_4 p_6 = 0$
(4) $p_4 p_6 p_8 = 0$

erfüllt.

Nach dem Durchlauf werden alle markierten Punkte gelöscht (d.h. auf 0 gesetzt).



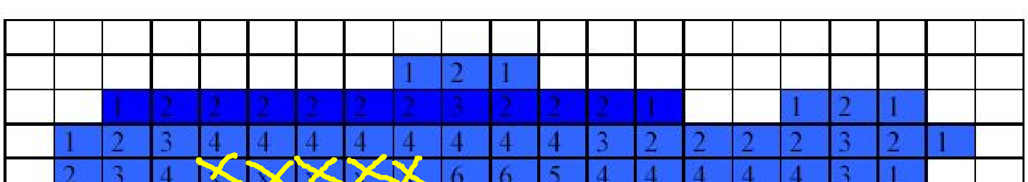
Durchlauf 2:

Ein Punkt wird markiert, wenn er die Bedingungen (1), (2),

(3') $p_6 p_8 p_2 = 0$
(4') $p_8 p_2 p_4 = 0$

erfüllt.

Nach dem Durchlauf werden alle markierten Punkte gelöscht.
Die Durchläufe 1 und 2 werden solange alternierend wiederholt, bis keine weiteren Punkte mehr gelöscht werden können.
Die übriggebliebenen Objektpunkte bilden das Skelett.

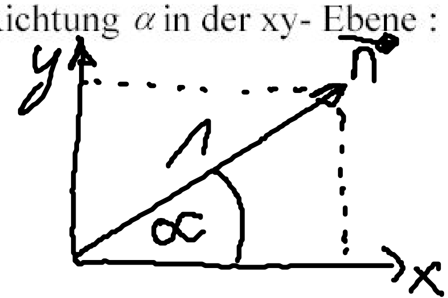


	2	3	[illegible]	x	[illegible]	[illegible]	[illegible]	x	6	6	5	4	4	4	4	4	3	1		
	1	2	3	3	3	3	6	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	1		
		1	1	1	1	2	4	x	6	5	1	3	3	3	3	3	4	1		
						2	4	x	6	4	3	2	1	1	1	1	1	x		
						2	4	x	4	3	2	1						1		
						2	4	x	3	2	1									
						2	4	x	3	1										
					1	2	4	x	3	1										
						2	4	x	3	1										
						2	4	4	3	1										
						2	3	3	2	1										
						1	1	1	1	1										

X = Skelett-Zellen
Nachteil : Verfahren aufwändiger als Verfahren 1, mehrere Schleifendurchläufe (Anzahl steht am Anfang noch nicht fest)
Vorteil : Skelett zusammenhängend;
Entspr. Eher der intuitiven Vorstellung von einem Skelett.

Lösung zu Aufgabe U20

(a) normalisierter Richtungsvektor $\vec{n}$ mit Richtung α in der xy- Ebene :



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung von $\vec{m}\, bzgl.\, \vec{n}$:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial \vec{n}} \\ \frac{\partial m_2}{\partial \vec{n}} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial m_m}{\partial \vec{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \cos\alpha \cdot \frac{\partial m_2}{\partial x} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \cos\alpha \cdot \frac{\partial m_m}{\partial x} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial m_m}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \frac{\partial m_m}{\partial x} & \frac{\partial m_m}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = J \cdot \vec{n}$$

Jakobimatrix

Funktionalmatrix von $\vec{m}(x,y)$

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = \left\| J \cdot \vec{n} \right\|^2 = \left\langle J \cdot \vec{n},\ \ J \cdot \vec{n} \right\rangle = \left(J \cdot \vec{n} \right)^T \cdot \left(J \cdot \vec{n} \right) = \vec{n}^{\cdot T}\ J^T . J . \vec{n} = \vec{n}^{\cdot T}\ M . \vec{n}$$

$$\text{mit } M = J^T \bullet J = \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{2x} & \ldots m_{Mx} \\ m_{1y} & m_{2y} & \ldots m_{My} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{1y} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ m_{Mx} & m_{My} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} m_{ix}^2 & \sum m_{ix} m_{iy} \\ \sum m_{ix} m_{iy} & \sum m_{iy}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

symetr. Matrix

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = (\cos\alpha \quad \sin\alpha) \bullet \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$f(\alpha) := \left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = \vec{n}^T \cdot M \cdot \vec{n}$$

Extremmalproblem unter Nebenbedingung $\left\| \vec{n} \right\|^2 = \vec{n}^T \cdot \vec{n} = 1$,

äquivalent zu Extremmalproblem . ohne NB:

$R\left(\vec{x}\right) := \frac{\vec{x}^T M \cdot \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x} \cdot}$ -> Max (wegen $R\left(\vec{x}\right) = R(c \bullet \vec{x})$ für $c \neq 0$)

$R\left(\vec{x}\right)$ heißt Rayleigh-Quotient.

Aus der Lin.Algebra : Die Extremwerte von R sind die Eigenwerte von M, die Eigenvektoren von M lösen die Extremwertaufgabe.
Eigenwerte (EW) von M:

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = (A-\lambda)(c-\lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}$$

(b) Zahlenbeisp:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \frac{\partial m_3}{\partial x} & \frac{\partial m_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2y & 0 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y^2 & 4xy \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \ldots \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ldots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ 4xy & 4x^2 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $x_0 = 1, y_0 = 2 : M = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{EW}: \quad \lambda_{1,2} = \tfrac{20}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{12}{2})^2 + 64} = 10 \pm \sqrt{100} = 10 \pm 10$$

$$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 0$$

Eigenvektoren : zu $\lambda_2 : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in KernM : \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu λ_1: muss $\perp$ zu $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sein, also $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Probe : $\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normiert : $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{matrix}$ $(\alpha_1 = \arctan 2)$

$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $(\alpha_2 = \arctan(-1/2))$

Wo ist Max. der Richtungsabl. ? =bei $\vec{n}_1$ (Wert 20)

Probe : $\left\| \dfrac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}_1} \right\|^2 = 16\cos^2\alpha_1 + 2 \cdot 8 \cdot \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 + 4\sin^2\alpha_1 = \dfrac{64}{5} + \dfrac{32}{5} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{100}{5} = 20$

$\left\| \dfrac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}_2} \right\|^2 = \dfrac{16}{5} + 2 \cdot 8 \cdot \left(-\dfrac{2}{5}\right) + 4 \cdot \dfrac{4}{5} = 0$